# Le modèle de dimères : introduction

Béatrice de Tilière
Université Paris-Dauphine

Journées ALEA, CIRM, 13-17 mars 2023

# Plan

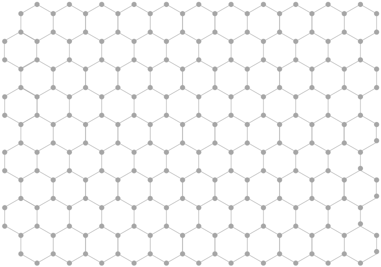
- Modèles de mécanique statistique définis sur des graphes
- Définition du modèle de dimères
- Comportement macroscopique
- Résultats fondateurs dans le cas fini
- Modèle de dimères sur les graphes planaires, infinis, bipartis $\mathbb{Z}^2$-périodiques

# Modèles de mécanique statistique sur graphes

*Comprendre le comportement macroscopique d'un système physique dont les interactions sont décrites au niveau microscopique*

Le cadre général pour les modèles définis sur les graphes est :

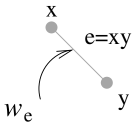
- La structure du système physique est représentée par un graphe $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$, fini.



# Modèles de mécanique statistique sur graphes

- Ensemble de configurations sur le graphe $\mathsf{G}$ : $\mathcal{C}(\mathsf{G})$,
  - configurations de sommets
  - configurations d'arêtes
  - configurations de sommets/arêtes
- Paramètres :
  - intensité des interactions entre les composants microscopiques
  - température extérieure.

$\Rightarrow$ Fonction de poids $w = (w_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$ sur les arêtes.



# Modèles de mécanique statistique sur graphes

- A une configuration $\mathsf{C}$, on associe une énergie $\mathcal{E}_w(\mathsf{C})$.
- Mesure de Boltzmann sur les configurations :

$$\forall\, \mathsf{C} \in \mathcal{C}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}(\mathsf{C}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})}}{Z(\mathsf{G}, w)},$$

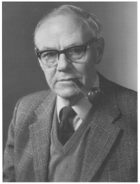
où $Z(\mathsf{G}, w) = \sum_{\mathsf{C} \in \mathcal{C}(\mathsf{G})} e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})}$ est la fonction de partition.

*Comprendre le comportement des configurations lorsque le graphe est grand ou lorsque la maille est petite.*

# Le modèle de dimères

*Répartition de molécules di-atomiques à la surface d'un cristal*

Ralph H. Fowler (1889-1944)



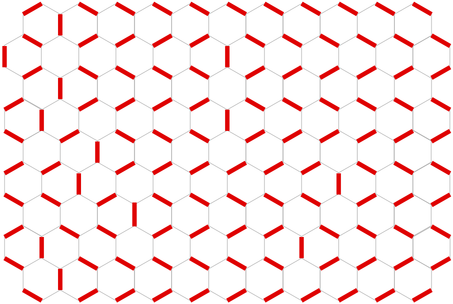
George S. Rushbrooke (1915-1995)

- Graphe $G = (V, E)$.
- Une configuration de dimères ou couplage parfait : sous-ens. d'arêtes $M$ t.q. chaque sommet touche exactement une arête de $M$.

$$\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \mathcal{M}(G) = \text{ens. des configurations de dimères.}$$

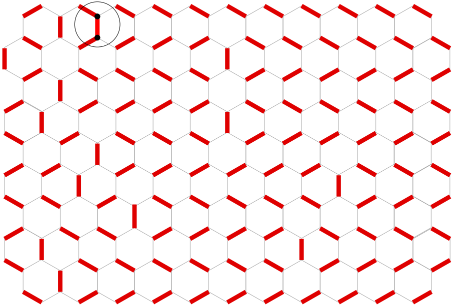
# Le modèle de dimères

- Une configuration de dimères.



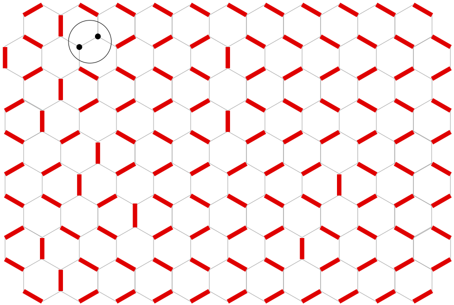
# Le modèle de dimères

- Une configuration de dimères.



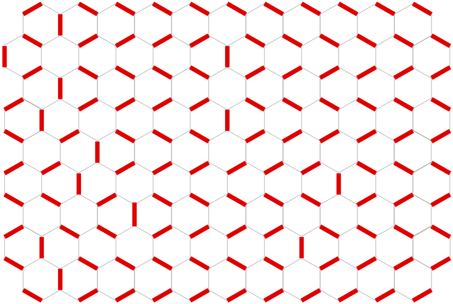
# Le modèle de dimères

- Une configuration de dimères.



# Le modèle de dimères

- Une configuration de dimères.



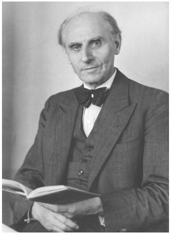
- Fonction de poids positive : $\nu = (\nu_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}}$.
- Energie d'une configuration $\mathsf{M}$ : $\mathcal{E}_{\nu}(\mathsf{M}) = -\sum_{\mathsf{e} \in \mathsf{M}} \log \nu_{\mathsf{e}}$.
- Mesure de Boltzmann des dimères :

$$\forall\, \mathsf{M} \in \mathcal{M}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{dim}}(\mathsf{M}) = \frac{\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{M}} \nu_{\mathsf{e}}}{Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}, \nu)}.$$

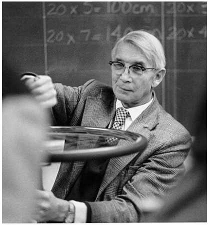
  - Arêtes avec poids plus élevé ont plus de chances d'être présentes.

# Le modèle d'Ising

*Modèle de ferro-magnétisme, de mélange de deux matériaux*



Wilhelm Lenz (1888-1957)



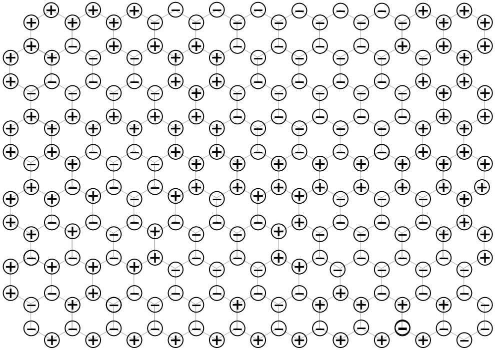
Ernst Ising (1900-1998)

- Graphe $G = (V, E)$.
- Une configuration de spins $\sigma$ associe un spin $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ à chaque sommet $x$ du graphe $G$.

$$\Rightarrow \mathcal{C}(G) = \{-1, 1\}^V = \text{ens. des configurations de spins.}$$

# Le modèle d'Ising

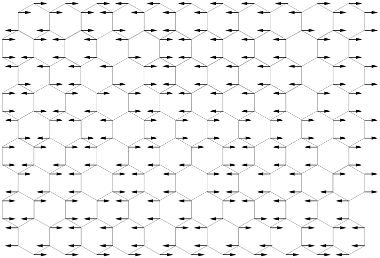
- Une configuration de spins



# Le modèle d'Ising

- Une configuration de spins/deux interprétations

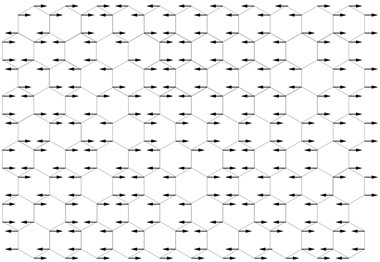
Moment magnétique :
$+1/\rightarrow$, $-1/\leftarrow$



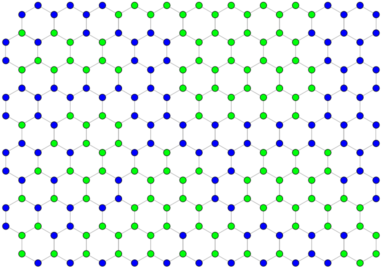
# Le modèle d'Ising

- Une configuration de spins/deux interprétations

Moment magnétique :
+1/$\rightarrow$, $-1$/$\leftarrow$



Mélange de deux matériaux :
+1/●, -1/●.



# Le modèle d'Ising

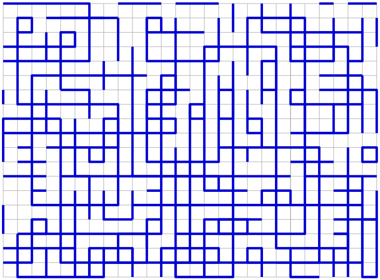
- Fonction de poids positive : constantes de couplages $J = (J_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e} \in \mathsf{E}}$.
- Energie d'une configuration de spins : $\mathcal{E}_J(\sigma) = -\sum_{\mathsf{e}=\mathsf{xy} \in \mathsf{E}} J_{\mathsf{xy}} \sigma_{\mathsf{x}} \sigma_{\mathsf{y}}$.
- Mesure de Boltzmann d'Ising :

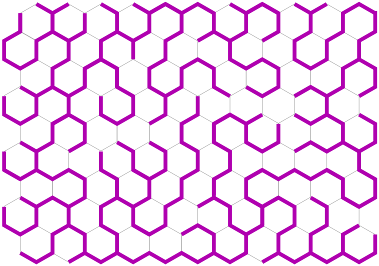
$$\forall\, \sigma \in \{-1,1\}^{\mathsf{V}}, \quad \mathbb{P}_{\text{Ising}}(\sigma) = \frac{e^{-\mathcal{E}_J(\sigma)}}{Z_{\text{Ising}}(\mathsf{G}, J)}.$$

  - Deux spins voisins $\sigma_{\mathsf{x}}, \sigma_{\mathsf{y}}$ ont tendance à s'aligner.
  - Plus élevé est la constante $J_{\mathsf{xy}}$, plus forte est cette tendance.

# Autres modèles de mécanique statistique sur graphes

- **Percolation** : flux d'un liquide à travers un matériau poreux.
- **arbres/forêts couvrants** : reliés aux réseaux électrique, marche aléatoire.
- **Random cluster model (FK)** : contient la percolation, les arbres couvrants, représentation FK du modèle d'Ising.
- **Modèles vertex (6-8…)** : le 6-vertex est un modèle pour la glace.
- **Modèles de boucles $O(n)$**.

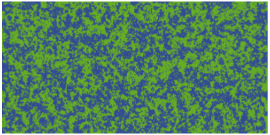




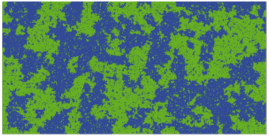
# Comportement macroscopique

*Fixer une boîte*
*Faire tendre la longueur des arêtes vers 0*
*Analyser une configuration typique.*

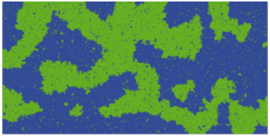
- Modèle d'Ising (illustrations de R. Cerf)



$J$ petit



$J$ critique



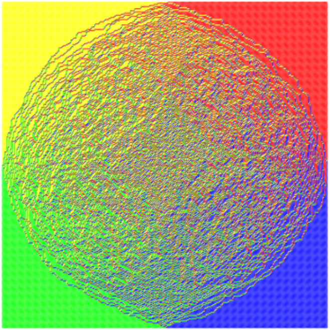
$J$ grand

- Sur $\mathbb{Z}^2$ : $J_c \equiv \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$ [Kramers et Wannier]
- Transition de phase : étudiée à travers la magnétisation.

# Comportement macroscopique

*Fixer une boîte*
*Faire tendre la longueur des arêtes vers 0*
*Analyser une configuration typique.*

- Modèle de dimères (illustration de Tomas Berggren)



Un pavage par dominos du diamant aztèque

- On remarque trois phases sur la même illustration

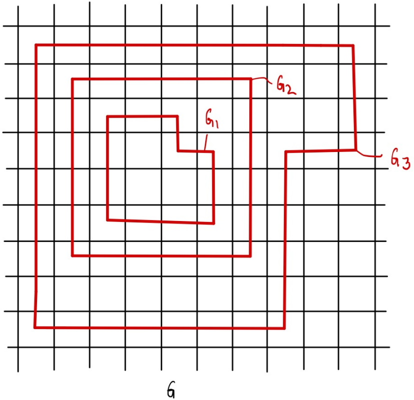
# Comportement macroscopique

*Se donner un graphe infini* $\mathsf{G}$

*Prendre une exhaustion du graphe* $\mathsf{G}$ *par des graphes finis :* $(\mathsf{G}_n)_{n\geq 1}$

*Etudier la "limite" des modèles finis sur* $(\mathsf{G}_n)_{n\geq 1}$.

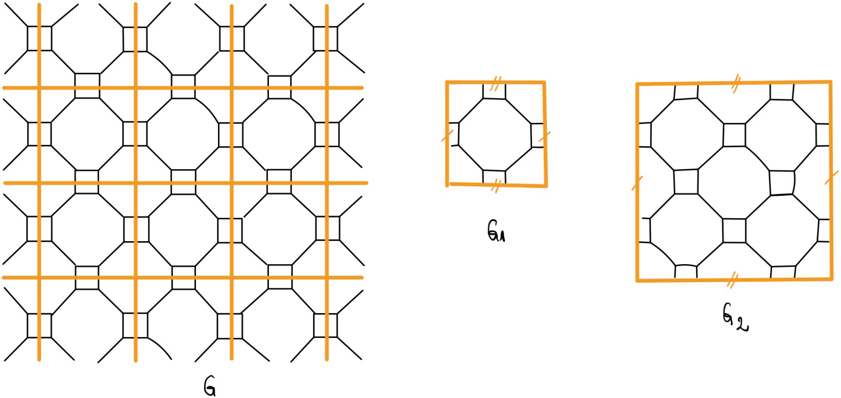
- Exhaustion par des graphes planaires.



# Comportement macroscopique

*Se donner un graphe infini* $\mathsf{G}$
*Prendre une exhaustion du graphe* $\mathsf{G}$ *par des graphes finis :* $(\mathsf{G}_n)_{n\geq 1}$
*Etudier la "limite" des modèles finis sur* $(\mathsf{G}_n)_{n\geq 1}$.

- Si $\mathsf{G}$ est $\mathbb{Z}^2$-périodique : exhaustion par des graphes toriques.



# Comportement macroscopique

- Identification de la transition de phase.
- Compréhension des régimes sous/sur critiques.
- Compréhension du modèle critique (à la transition de phase) :
  - Universalité et invariance conforme.
  - Conjectures : Nienhuis, Cardy, Duplantier ...

    Preuves : Lawler, Schramm, Werner, D. Chelkak, S. Smirnov, Hugo Duminil-Copin ...

# Modèles exactement solubles

- Un des outils pour étudier le comportement macroscopique est la fonction de partition :

$$Z(\mathsf{G}, w) = \sum_{\mathsf{C} \in \mathcal{C}(\mathsf{G})} e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})},$$

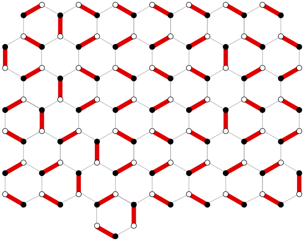
  la constante normalisatrice dans la mesure de Boltzmann.

$$\forall\, \mathsf{C} \in \mathcal{C}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}(\mathsf{C}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_w(\mathsf{C})}}{Z(\mathsf{G}, w)}.$$

- le modèle est fortement exactement soluble s'il existe une formule exacte et explicite pour la fonction de partition
- Trois modèles fortement exactement solubles :
  - Ising-2d : Onsager (1944) - Fisher (1966).
  - Dimères-2d : Kasteleyn, Temperley-Fisher (1961).
  - Arbres couvrants : Kirchhoff (1848).

# Fonction de partition du modèle de dimères

- $\mathsf{G} = (\mathsf{W} \sqcup \mathsf{B}, \mathsf{E})$ : graphe fini, planaire, biparti.
- $\mathcal{M}(\mathsf{G})$ : ens. des config. de dimères/couplages parfaits de $\mathsf{G}$.



- Mesure de Boltzmann des dimères :

$$\forall\, \mathsf{M} \in \mathcal{M}(\mathsf{G}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{dim}}(\mathsf{M}) = \frac{\prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{M}} \nu_{\mathsf{e}}}{Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}, \nu)},$$

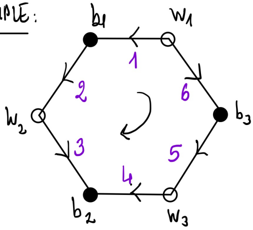
où $Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}, \nu) = \sum_{\mathsf{M} \in \mathcal{M}(\mathsf{G})} \prod_{\mathsf{e} \in \mathsf{M}} \nu_{\mathsf{e}}$ est la fonction de partition.

# Fonction de partition

- Supposons que $|\mathsf{B}| = |\mathsf{W}| = n$, $\mathsf{W} = \{\mathsf{w}_1, \dots, \mathsf{w}_n\}$, $\mathsf{B} = \{\mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_n\}$.
- Supposons que les arêtes de $\mathsf{G}$ sont munies d'une orientation de Kasteleyn : les faces intérieures sont "clockwise odd".
- Matrice de Kasteleyn $\mathsf{K}$ : matrice d'adjacence orientée et pondérée

$$\mathsf{K}_{\mathsf{w}_i,\mathsf{b}_j} = \begin{cases} \nu_{\mathsf{w}_i\mathsf{b}_j} & \text{si } \mathsf{w}_i \sim \mathsf{b}_j \text{ et } \mathsf{w}_i \to \mathsf{b}_j \\ -\nu_{\mathsf{w}_i\mathsf{b}_j} & \text{si } \mathsf{w}_i \sim \mathsf{b}_j \text{ et } \mathsf{w}_i \leftarrow \mathsf{b}_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXAMPLE:




$$K = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

# Fonction de partition

**Théorème** (Kasteleyn, Temperley-Fisher '61)
*Supposons que le graphe* G *est muni d'une orientation de Kasteleyn. Alors,*

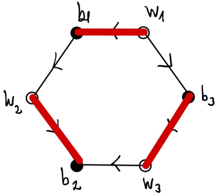
$$Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G},\nu) = |\det \mathsf{K}|.$$

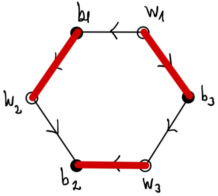
Idée de preuve.

- $\det \mathsf{K} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \mathsf{K}_{\mathsf{w}_1,b_{\sigma(1)}} \dots \mathsf{K}_{\mathsf{w}_n,b_{\sigma(n)}}$.
- Termes non-nuls du développement de $\det \mathsf{K} \longleftrightarrow$ config. dimères

EXAMPLE:

dimers:




$\sigma = \begin{array}{c} w \\ b \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$ $\qquad$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3\ 2\ 1).$

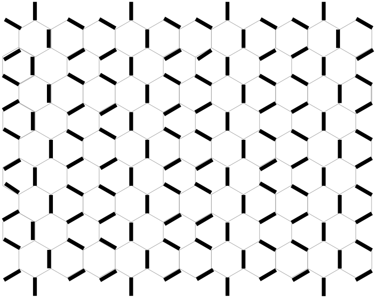
det K: $\quad 1.\ K_{w_1 b_1} K_{w_2 b_2} K_{w_3 b_3} \qquad 1.\ K_{w_1 b_3} K_{w_2 b_1} K_{w_3 b_2}.$

# Fonction de partition

- Un terme typique dans le développement de $\det \mathsf{K}$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathsf{K}_{\mathsf{w}_1,b_{\sigma(1)}}\dots\mathsf{K}_{\mathsf{w}_n,b_{\sigma(n)}} = \pm\operatorname{sgn}(\sigma)\nu_{\mathsf{w}_1\mathsf{b}_{\sigma(1)}}\dots\nu_{\mathsf{w}_n\mathsf{b}_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est Kasteleyn, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ s'annulent.



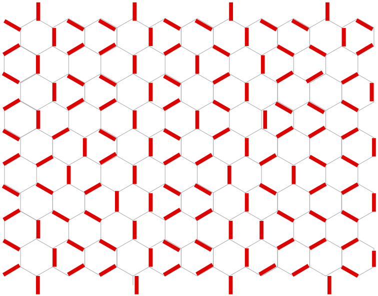
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det \mathsf{K}$.

# Fonction de partition

- Un terme typique dans le développement de $\det \mathsf{K}$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathsf{K}_{\mathsf{w}_1,b_{\sigma(1)}}\ldots\mathsf{K}_{\mathsf{w}_n,b_{\sigma(n)}} = \pm\operatorname{sgn}(\sigma)\nu_{\mathsf{w}_1\mathsf{b}_{\sigma(1)}}\ldots\nu_{\mathsf{w}_n\mathsf{b}_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est Kasteleyn, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ s'annulent.



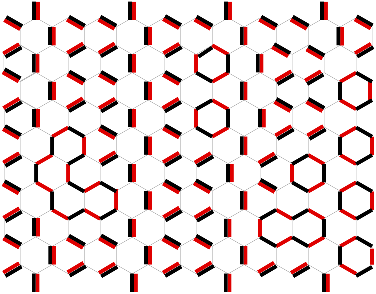
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det \mathsf{K}$.

# Fonction de partition

- Un terme typique dans le développement de $\det \mathsf{K}$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathsf{K}_{\mathsf{w}_1,b_{\sigma(1)}}\dots\mathsf{K}_{\mathsf{w}_n,b_{\sigma(n)}} = \pm\operatorname{sgn}(\sigma)\nu_{\mathsf{w}_1\mathsf{b}_{\sigma(1)}}\dots\nu_{\mathsf{w}_n\mathsf{b}_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est Kasteleyn, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ s'annulent.



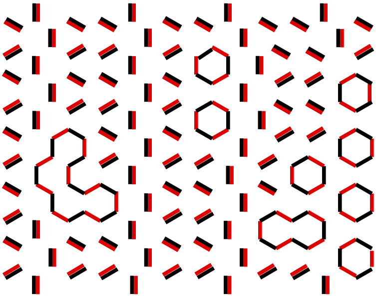
Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det \mathsf{K}$.

# Fonction de partition

- Un terme typique dans le développement de $\det \mathsf{K}$ est

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathsf{K}_{\mathsf{w}_1,b_{\sigma(1)}}\ldots\mathsf{K}_{\mathsf{w}_n,b_{\sigma(n)}} = \pm\operatorname{sgn}(\sigma)\nu_{\mathsf{w}_1\mathsf{b}_{\sigma(1)}}\ldots\nu_{\mathsf{w}_n\mathsf{b}_{\sigma(n)}}.$$

- $\pm$ provient de l'orientation.
- Si l'orientation est Kasteleyn, $\pm$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ s'annulent.



Superposer 2 config. de dimères, montrer qu'elles ont même signe dans $\det \mathsf{K}$.

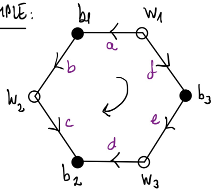
# Fonction de partition

**Théorème (Kasteleyn, Temperley-Fisher '61)**

*Supposons que le graphe* G *est muni d'une orientation de Kasteleyn. Alors,*

$$Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}, \nu) = |\det \mathsf{K}|.$$

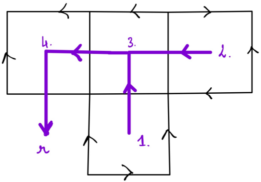
EXAMPLE:




$$K = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline w_1 & & & \\ w_2 & & & \\ w_3 & & & \end{array} \qquad K = \begin{bmatrix} a & 0 & f \\ -b & c & 0 \\ 0 & d & -e \end{bmatrix}$$

$$\det K = -ace - bdf = -Z_{\mathrm{dim}}(G, \nu).$$

- Construction d'une telle orientation



# Mesure de Boltzmann

### Théorème (Kenyon'97)

*Soit* $\{\mathsf{e}_1 = \mathsf{w}_1\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{e}_k = \mathsf{w}_k\mathsf{b}_k\}$ *un ss-ens. d'arêtes de* $\mathsf{G}$*. La probabilité des config. de dimères contenant ce ss-ens. d'arêtes est égale à :*

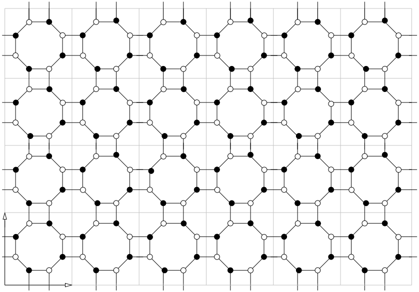
$$\mathbb{P}_{\dim}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_k) = \left| \left( \prod_{j=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_j,\mathsf{b}_j} \right) \det_{1 \le i,j \le k} \mathsf{K}^{-1}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j} \right|.$$

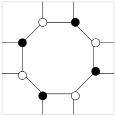
### Preuve (idée).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\dim}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_k) &= \frac{Z_{\dim}(\mathsf{G},\nu)|_{\{\mathsf{M}\in\mathcal{M}(\mathsf{G}):\, \{\mathsf{e}_1,\ldots,\mathsf{e}_k\}\in \mathsf{M}\}}}{Z_{\dim}(\mathsf{G},\nu)} \\
&= \frac{\left| \left( \prod_{j=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_j,\mathsf{b}_j} \right) \det\left( \mathsf{K}^{\{\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k\}}_{\{\mathsf{w}_1,\ldots,\mathsf{w}_k\}} \right) \right|}{|\det \mathsf{K}|} \\
&= \left| \left( \prod_{j=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_j,\mathsf{b}_j} \right) \det\left( \mathsf{K}^{-1\,\{\mathsf{w}_1,\ldots,\mathsf{w}_k\}^c}_{\quad\{\mathsf{b}_1,\ldots,\mathsf{b}_k\}^c} \right) \right| \quad \text{(identité de Jacobi).} \ \square
\end{aligned}$$

# Modèle de dimères sur graphes bipartis $\mathbb{Z}^2$-périodiques

- Fonction de poids périodiques $\nu$ sur $\mathsf{G}$, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
- Exhaustion de $\mathsf{G}$ par des graphes toriques : $(\mathsf{G}_n) = (\mathsf{G}/n\mathbb{Z}^2)$.





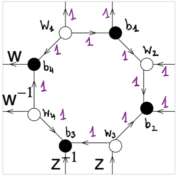
Domaine fondamental $\mathsf{G}_1$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, modèle de dimères sur $\mathsf{G}_n$ :

$$\forall\, \mathsf{M} \in \mathcal{M}(\mathsf{G}_n), \quad \mathbb{P}^n_{\mathrm{dim}}(\mathsf{M}) = \frac{\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{M}} \nu_{\mathsf{e}}}{Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}_n, \nu)},$$

# Polynôme caractéristique

- Domaine fondamental : $\mathsf{G}_1$




$$\mathsf{K}_1(\mathsf{z},\mathsf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -w \\ -z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & w^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\mathsf{K}_1$ la matrice de Kasteleyn du domaine fondamental $\mathsf{G}_1$.
- Multiplier le poids des arêtes par $\mathsf{z},\mathsf{z}^{-1},\mathsf{w},\mathsf{w}^{-1} \to \mathsf{K}_1(\mathsf{z},\mathsf{w})$.
- Le polynôme caractéristique est :

$$P(\mathsf{z},\mathsf{w}) = \det \mathsf{K}_1(\mathsf{z},\mathsf{w}).$$

Exemple : $P(\mathsf{z},\mathsf{w}) = 5 - \mathsf{z} - \frac{1}{\mathsf{z}} - \mathsf{w} - \frac{1}{\mathsf{w}}$.

# Prendre la "limite" : énergie libre

- Energie libre du modèle.

$$f = - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{\mathrm{dim}}(\mathsf{G}_n, \nu)$$

**Théorème (Cohn-Kenyon-Propp'01, K.-Okounkov-Sheffield'06)**

*L'énergie libre du modèle de dimères est explicitement donnée par*

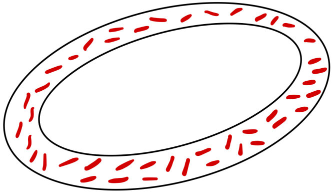
$$f = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log |P(z,w)| \frac{dz}{z} \frac{dw}{w},$$

*où* $\mathbb{T}^2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1\}$.

Exemple : $f = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log |5 - \mathsf{z} - \mathsf{z}^{-1} - \mathsf{w} - \mathsf{w}^{-1}| \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}$.

# Prendre la "limite" : mesure de Gibbs

- Mesure de Gibbs est une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(\mathsf{G})$ satisfaisant aux conditions de Dobrushin-Lanford-Ruelle (DLR) :
  - si on fixe un couplage parfait dans une région annulaire, les couplages parfaits à l'intérieur et extérieur sont indépendants,
  - la probabilité d'un coupage parfait intérieur $\mathsf{M}$ est $\propto$ à $\prod_{\mathsf{e}\in\mathsf{M}} \nu_{\mathsf{e}}$.



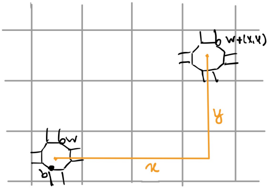
# Mesure de Gibbs

**Théorème (Cohn-Kenyon-Propp'01, K.-Okounkov-Sheffield'06)**

*La limite faible des mesures de Boltzmann* $\mathbb{P}^n_{\mathrm{dim}}$ *défini une mesure de Gibbs ergodique* $\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}$ *sur* $\mathcal{M}(\mathsf{G})$*, t.q. la probabilité des config. de dimères contenant le ss-ens. d'arêtes* $\{\mathsf{e}_1 = \mathsf{w}_1\mathsf{b}_1, \ldots, \mathsf{e}_k = \mathsf{w}_k\mathsf{b}_k\}$ *est égal à :*

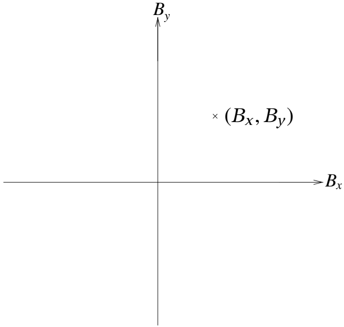
$$\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_k) = \left|\left(\prod_{j=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_j,\mathsf{b}_j}\right) \det_{1\leq i,j\leq k} (\mathsf{K}^{-1}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j})\right|,$$

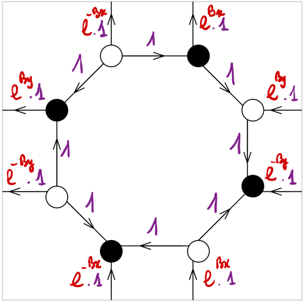
$$\mathsf{K}^{-1}_{\mathsf{b},\mathsf{w}+(x,y)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mathrm{cof}(\mathsf{K}_1(\mathsf{z},\mathsf{w}))^t_{\mathsf{b},\mathsf{w}}}{P(\mathsf{z},\mathsf{w})} \mathsf{z}^{-y}\mathsf{w}^{x} \frac{d\mathsf{z}}{\mathsf{z}}\frac{d\mathsf{w}}{\mathsf{w}}$$



# Ensemble des mesures de Gibbs ergodiques [KOS'06]

- Coordonnées “champ magnétique”




$\rightsquigarrow$ Fonction de poids $\nu^{(B_x,B_y)}$, matrice de Kasteleyn $\mathsf{K}^{(B_x,B_y)}$

- Remarques :
  - localement, la mesure de Boltzmann est la même
  - à comprendre comme un changement de conditions au bord.

# Ensemble des mesures de Gibbs ergodiques [KOS'06]

**Théorème (Kenyon-Okounkov-Sheffield '06)**

- *Le modèle de dimères sur un graphe planaire, $\mathbb{Z}^2$-périodique, biparti a un ensemble à deux paramètres de mesures de Gibbs ergodiques $\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}^{(B_x,B_y)}$ indexées par les coordonnées "champ magnétique".*
- *Elles sont explicitement obtenues comme limite faible des mesures de Boltzmann $\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}^{n,(B_x,B_y)}$ avec "champ magnétique" $(B_x, B_y)$.*
- *La mesure $\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}^{(B_x,B_y)}$ est explicitement donnée par :*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{dim}}^{(B_x,B_y)}(\mathsf{e}_1,\dots,\mathsf{e}_k) = \left|\left(\prod_{j=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_j,\mathsf{b}_j}^{(B_x,B_y)}\right) \det_{1\leq i,j\leq k} \left[(\mathsf{K}^{(B_x,B_y)})^{-1}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j}\right]\right|,$$

*où*

$$(\mathsf{K}^{(B_x,B_y)})^{-1}_{\mathsf{b},\mathsf{w}+(x,y)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mathrm{cof}(\mathsf{K}_1^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w}))^t_{\mathsf{b},\mathsf{w}}}{P^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w})}\mathsf{z}^{-y}\mathsf{w}^{x}\frac{d\mathsf{z}}{\mathsf{z}}\frac{d\mathsf{w}}{\mathsf{w}}.$$

# Diagramme de phases [KOS '06]

Les phases du modèle sont caractérisées par

- la décroissance des corrélations :

  polynomiale (liquide), exponentielle (gaz), zéro (solide)

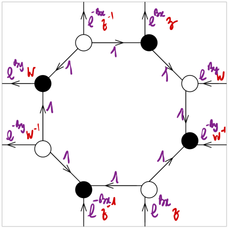
- *i.e.*, taux de décroissance de

$$(\mathsf{K}^{(B_x,B_y)})^{-1}_{\mathsf{b},\mathsf{w}+(x,y)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{\operatorname{cof}(\mathsf{K}_1^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w}))^t_{\mathsf{b},\mathsf{w}}}{P^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w})}\mathsf{z}^{-y}\mathsf{w}^{x}\frac{d\mathsf{z}}{\mathsf{z}}\frac{d\mathsf{w}}{\mathsf{w}}.$$

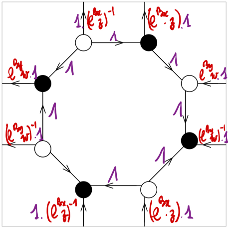
- *i.e.*, position des zéros de $P^{(B_x,B_y)}(z,w)$ sur $\mathbb{T}^2$.

# Diagramme de phases [KOS '06]

$$\boxed{P^{(B_x,B_y)}(z,w) = P(e^{B_x}z, e^{B_y}w)}$$



$$\mathsf{K}_1^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{-B_x}z^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -e^{B_y}w \\ -e^{B_x}z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-B_y}w^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



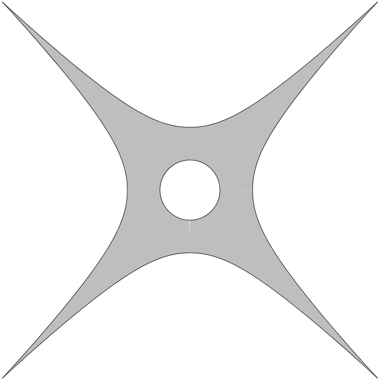
$$\mathsf{K}_1(e^{B_x}z, e^{B_y}\mathsf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (e^{B_x}z)^{-1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -e^{B_y}w \\ -e^{B_x}z & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (e^{B_y}w)^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Diagramme de phases [KOS '06]

- La courbe spectrale :

$$\mathcal{C} = \{(\mathsf{z}, \mathsf{w}) \in (\mathbb{C}^*)^2 : \; P(\mathsf{z}, \mathsf{w}) = 0\}.$$

- Amoebe : image de $\mathcal{C}$ par l'application $(\mathsf{z}, \mathsf{w}) \mapsto (\log |\mathsf{z}|, \log |\mathsf{w}|)$.



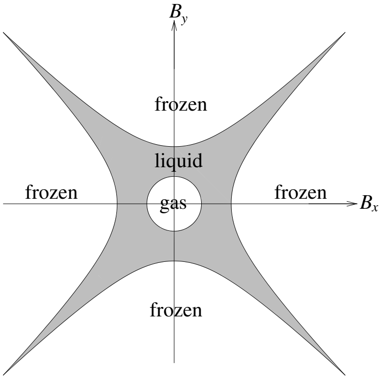
Amoebe du graphe carré-octogone

# Diagramme de phases [KOS '06]

- La courbe spectrale :

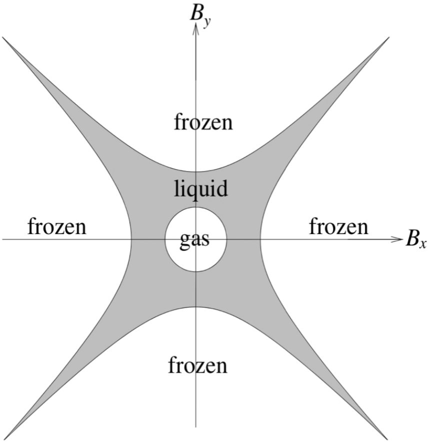
$$\mathcal{C} = \{(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 : \; P(z, w) = 0\}.$$

- Amoebe : image de $\mathcal{C}$ par l'application $(z, w) \mapsto (\log|z|, \log|w|)$.




$$P^{(B_x,B_y)}(z, w) = P(e^{B_x} z, e^{B_y} w)$$

# Diagramme de phases [KOS '06]




- Point $(z,w) \in \mathbb{T}^2$: $P(z,w)=0$

$\iff$ $|z|=|w|=1$ and $P(z,w)=0$

$\downarrow$ $(\log|z|, \log|w|)$

$(0,0)$ and $P(z,w)=0$.

---

- Point $(z,w) \in \mathbb{T}^2$: $P^{(B_x,B_y)}(z,w)=0$

$\iff$ Point $(z',w')$ : $|z'|=e^{B_x}$ $|w'|=e^{B_y}$ and $P(z',w')=0$.

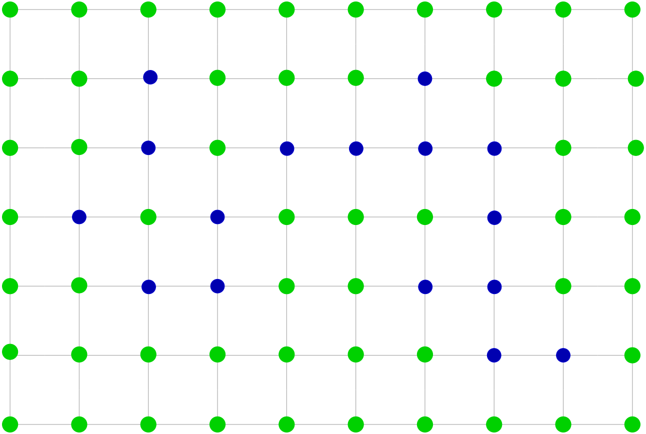
$\downarrow$ $(\log|z|, \log|w|)$

$(B_x, B_y)$ and $P(z',w')=0$.

$$P^{(B_x,B_y)}(z,w) = P(e^{B_x}z, e^{B_y}w)$$

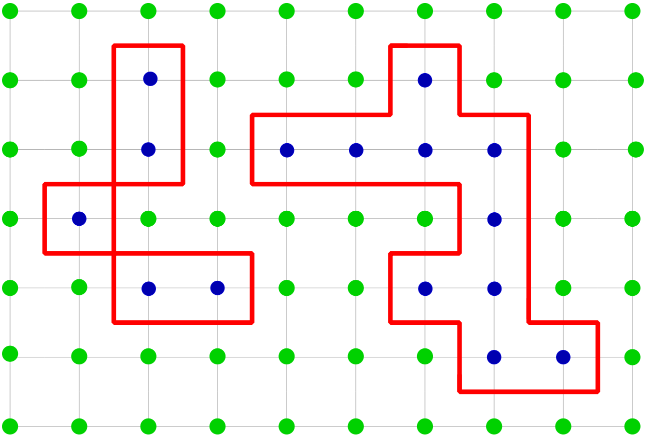
# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Modèle d'Ising sur G.



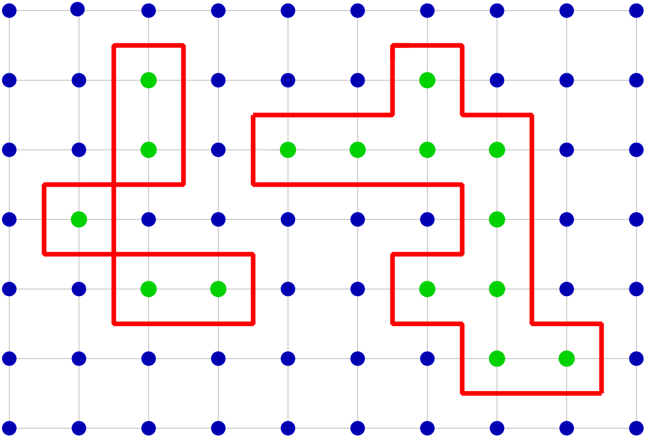
# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Développement basse température [Kramers-Wannier].



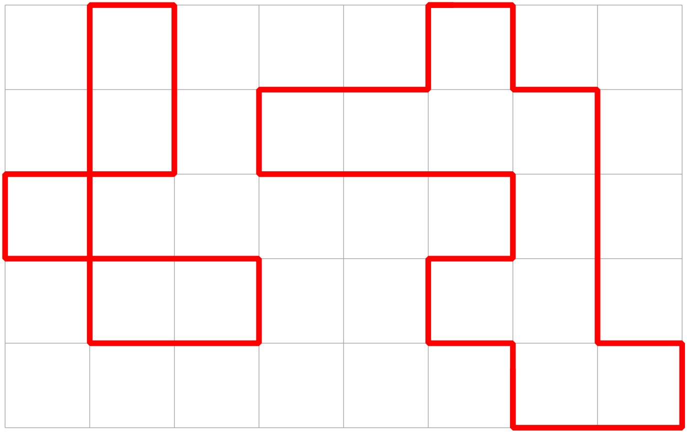
# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Développement basse température [Kramers-Wannier].



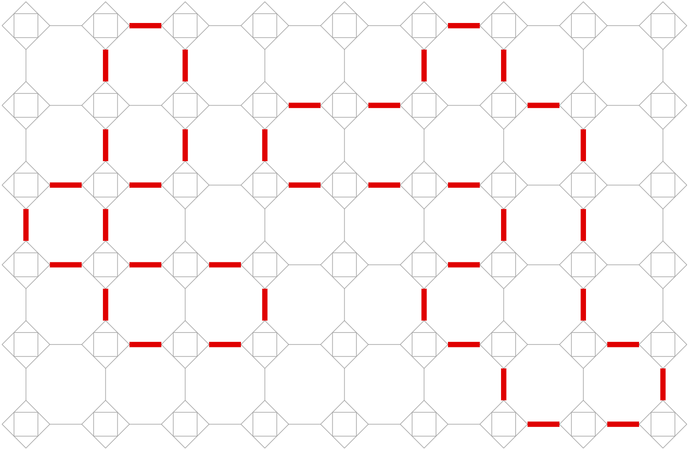
# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Contours polygonaux sur $\mathsf{G}^*$.



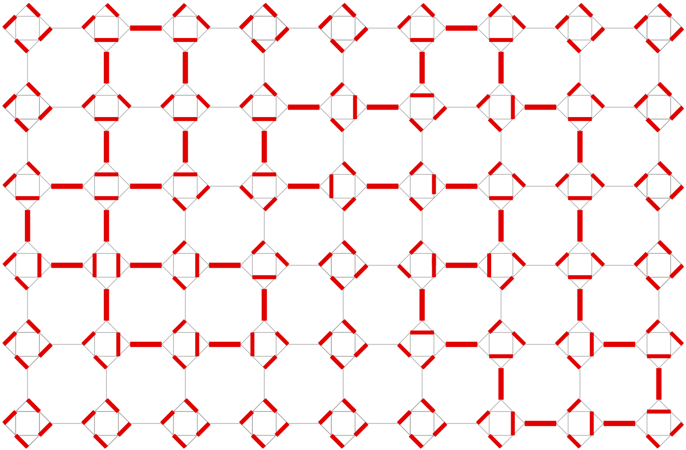
# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Correspondance de Fisher : garder les arêtes des contours polygonaux.



# Relation entre les modèles : Ising - dimères [Fisher'66]

- Remplir les décorations : $2^{|V^*|}$ possibilités.



# Le modèle de dimères sur les graphes minimaux : le cas elliptique et au-delà

Béatrice de Tilière
Université Paris-Dauphine

travaux en collaboration avec

Cédric Boutillier (Sorbonne U.) & David Cimasoni (U. Genève)

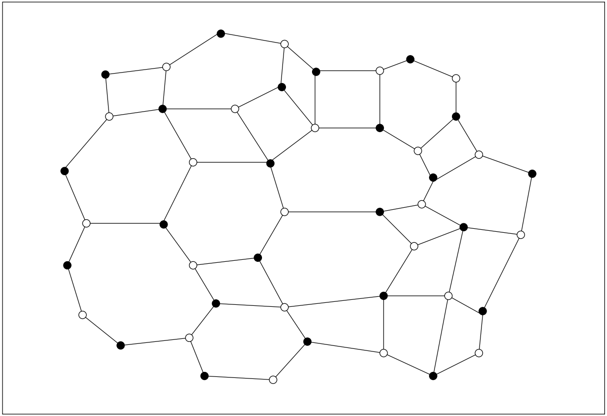
Journées ALEA, CIRM, 13-17 mars 2023

# Plan

- Graphes isoradiaux et minimaux
- Modèle de dimères et courbes de Harnack
- Modèle de dimères avec poids de Fock
- Conclusions

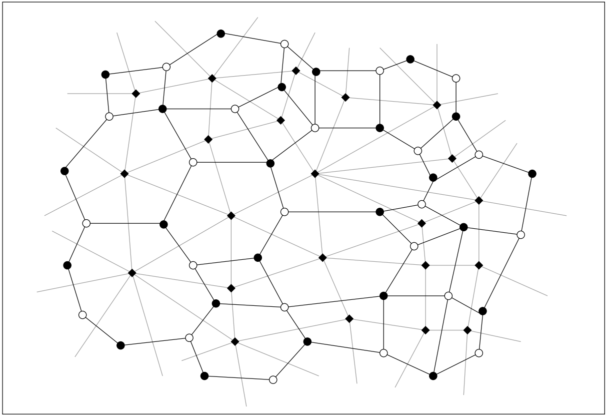
# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.



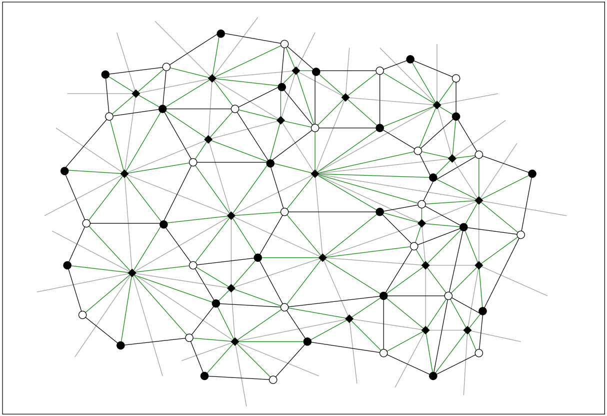
# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.



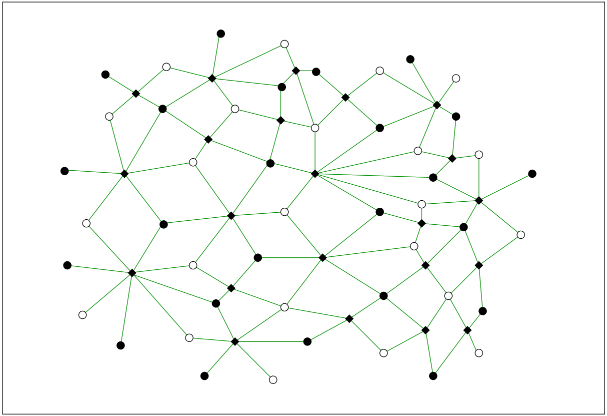
# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.



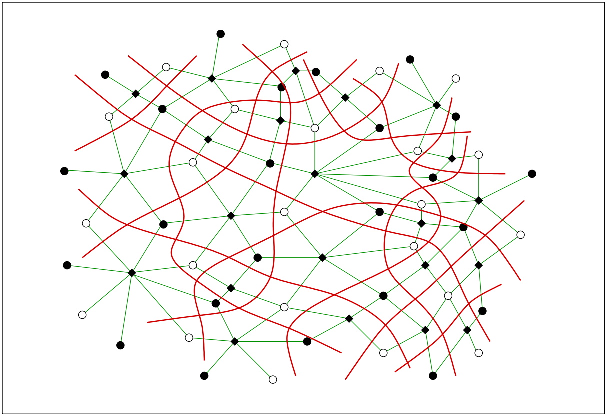
# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.



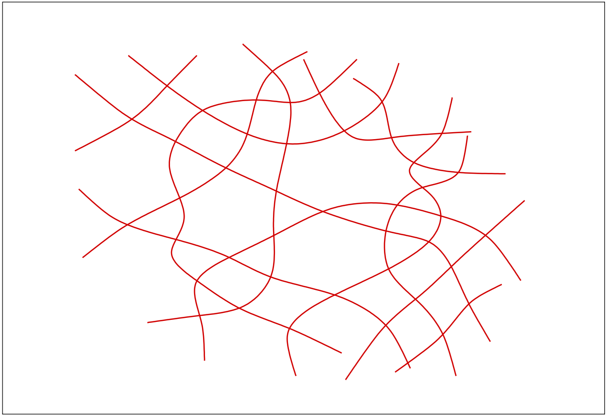
# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.



# Graphe des quads, train-tracks

- Graphe $\mathsf{G}$ planaire, infini, plongé; graphe dual $\mathsf{G}^*$ plongé.
- Graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ associé, train-tracks.

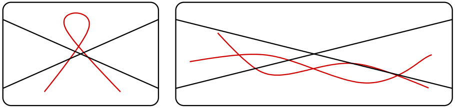


# Graphes isoradiaux

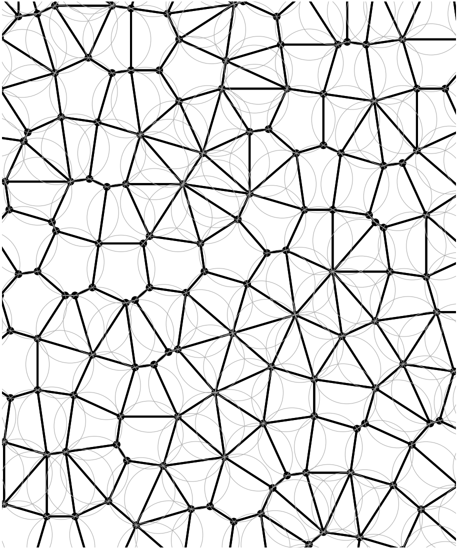
- Un plongement isoradial d'un graphe $\mathsf{G}$ infini, planaire est un plongement tel que chaque face est inscrite dans un cercle de rayon 1, et tel que les centre des cercles sont à l'intérieur des faces [Duffin] [Mercat] [Kenyon].
- Equivalent à : le graphe des quads $\mathsf{G}^{\diamond}$ est plongé de sorte que toutes ses faces soient des losanges.

**Théorème (Kenyon-Schlencker'04)**

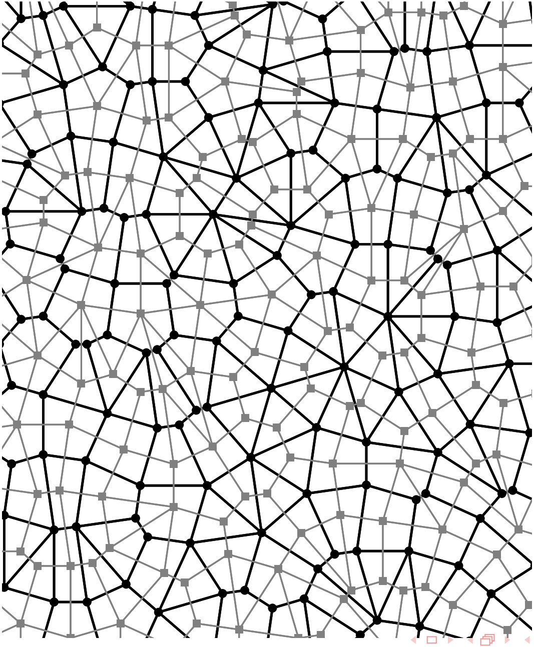
*Un graphe infini planaire $\mathsf{G}$ admet un plongement isoradial ssi*



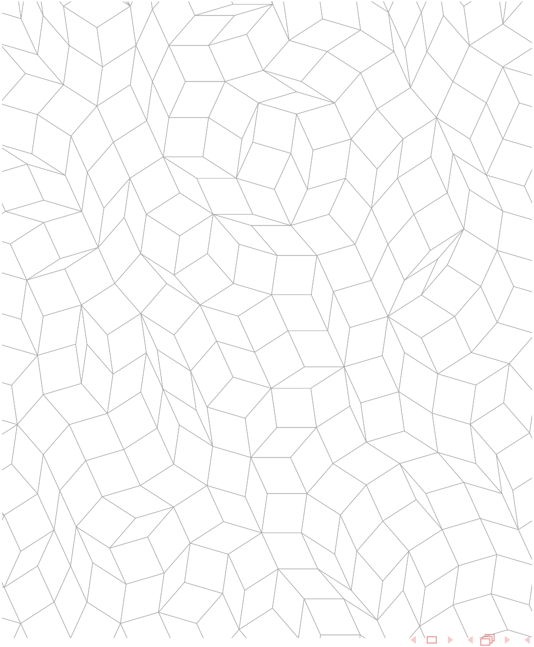
# Plongements isoradiaux



# Plongements isoradiaux

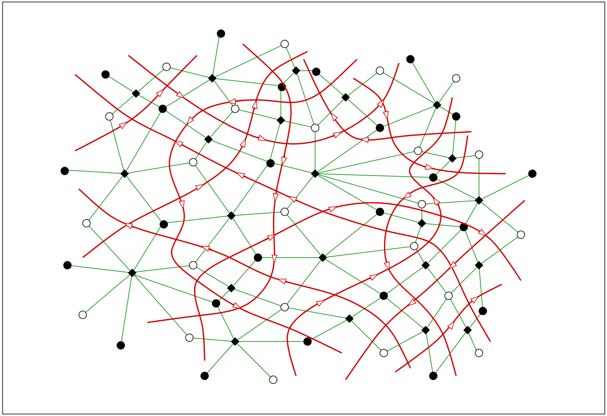


# Plongements isoradiaux



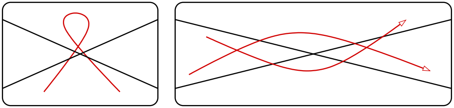
# Graphes minimaux

- Si le graphe $\mathsf{G}$ est biparti, les train-tracks sont naturellement orientés (sommets blancs à gauche, noirs à droite) $\rightsquigarrow \vec{\mathcal{T}}$



# Graphes minimaux

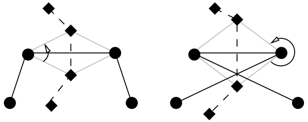
- Si le graphe $\mathsf{G}$ est biparti, les train-tracks sont naturellement orientés (sommets blancs à gauche, noirs à droite) $\rightsquigarrow \vec{\mathcal{T}}$
- Un graphe $\mathsf{G}$ planaire, biparti est minimal si



[Thurston'04] [Gulotta'08] [Ishii-Ueda'11] [Goncharov-Kenyon'13]

# Immersions des graphes minimaux

- Une immersion minimale d'un graphe $\mathsf{G}$ infini, planaire, biparti est une immersion de son graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$ telle que :
  - toutes les faces soient des losanges (plats ou renversés)

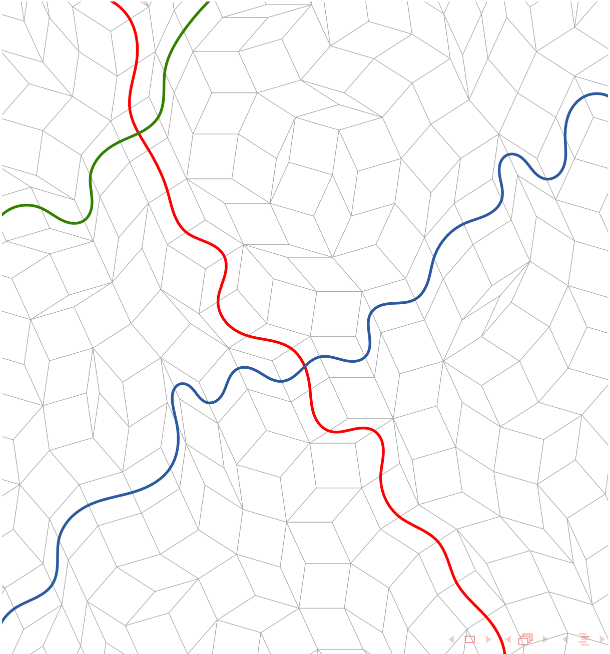


  - l'immersion est plate : la somme des angles des losanges autour de chaque sommet et chaque face est égale à $2\pi$.

## Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT'22)

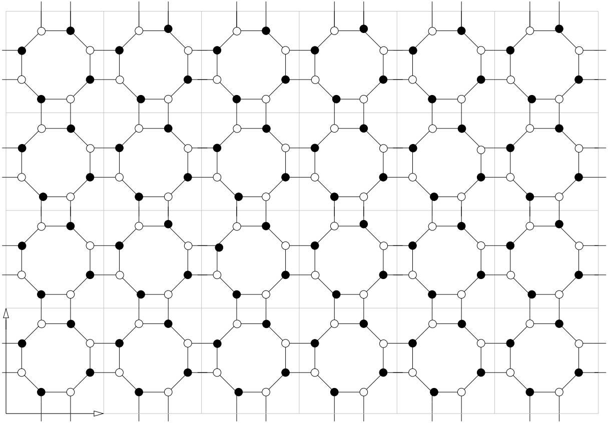
- *Un graphe $\mathsf{G}$ infini, planaire, biparti admet une immersion minimale ssi il est minimal.*
- *L'espace des immersions minimales de $\mathsf{G}$ est un sous-ens. explicite des applications $\{(\alpha) : \vec{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$ (préserve l'ordre cyclique).*

# Immersions des graphes minimaux



# Rappel du contexte

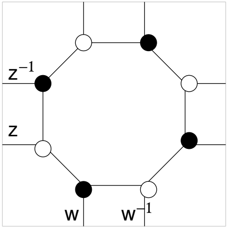
- Supposons que le graphe $\mathsf{G}$ est biparti, infini, $\mathbb{Z}^2$-périodique.



- Exhaustion de $\mathsf{G}$ par des graphes toriques : $(\mathsf{G}_n) = (\mathsf{G}/n\mathbb{Z}^2)$.

# Rappel du contexte

- Domaine fondamental : $\mathsf{G}_1$




- Soit $\mathsf{K}_1$ la matrice de Kasteleyn du domaine fondamental $\mathsf{G}_1$.
- Multiplions les poids des arêtes par $z, z^{-1}, w, w^{-1} \to \mathsf{K}_1(z, w)$.
- Le polynôme caractéristique est :

$$P(z, w) = \det \mathsf{K}_1(z, w).$$

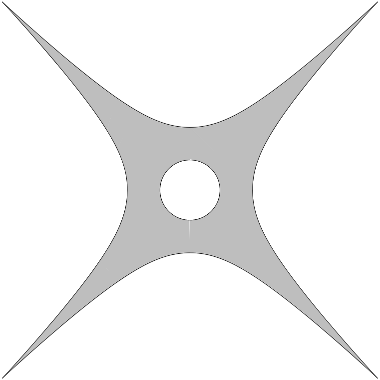
Exemple : fonction de poids $\nu \equiv 1$, $P(z, w) = 5 - z - \frac{1}{z} - w - \frac{1}{w}$.

# Modèle de dimères : courbe spectrale

- La courbe spectrale :

$$\mathcal{C} = \{(\mathsf{z}, \mathsf{w}) \in (\mathbb{C}^*)^2 : \; P(\mathsf{z}, \mathsf{w}) = 0\}.$$

- Amoebe $\mathcal{A}$ : image de $\mathcal{C}$ par l'application $(\mathsf{z}, \mathsf{w}) \mapsto (\log|\mathsf{z}|, \log|\mathsf{w}|)$.



Amoebe du réseau carré-octogone

# Courbes de Harnack

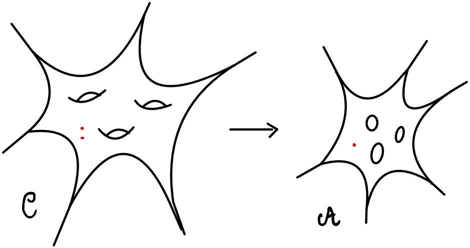
- Le lieu réel de la courbe spectrale $\mathcal{C}$ est :

$$\{(z,w) \in \mathcal{C} : (\bar{z},\bar{w}) = (z,w)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y) = 0\}.$$

- Une courbe est maximale si le nombre de composantes connexes de son lieu réel est le genre de la courbe +1.

- Une courbe de Harnack est une courbe maximale t.q. les tentacules croisent les axes dans le “bon ordre”.

De manière équiv. [Mikhlakin-Rullgård ’01] : courbe t.q. application $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est $2-1$ sur son intérieur.



# Modèle de dimères et courbes de Harnack

## Théoremes

- *Courbes spectrales des modèles de dimères bipartis* $\overset{\text{[Ke.-Ok.-Sh.'06] [Ke.-Ok.'06]}}{\longleftrightarrow}$ *courbes de Harnack avec points sur ovales.*
- *Courbes spectrales des modèles de dimères bipartis isoradiaux avec poids critiques [Kenyon '02]* $\overset{\text{[Kenyon-Okounkov'06]}}{\longleftrightarrow}$ *courbes de Harnack de genre 0.*

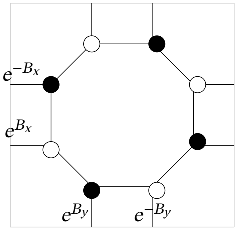
  *Application ($\longleftarrow$) explicite.*
- *Courbes spectrales des modèles de dimères bipartis minimaux* $\overset{\text{[Goncharov-Kenyon '13]}}{\longleftrightarrow}$ *courbes de Harnack avec points sur ovales.*

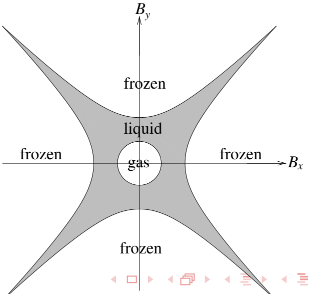
  *Application ($\longrightarrow$) explicite.*
- *[Fock'15] Application ($\longleftarrow$) explicite pour toutes les courbes algébriques. (pas de positivité en général).*

# Mesure de Gibbs pour les modèles de dimères bipartis

## Théoremes (Kenyon-Okounkov-Sheffield'06)

- *Le modèle de dimères sur un graphe planaire, $\mathbb{Z}^2$-périodique, biparti a un ensemble à deux paramètres de mesures de Gibbs ergodiques.*
- *Elles sont explicitement obtenues comme limite faible des mesures de Boltzmann avec "champ magnétique" $(B_x, B_y)$.*
- *Le diagramme de phase est donné par l'amoebe de la courbe spectrale $\mathcal{C}$.*



# But de notre travail

- Trouver l'application ($\longleftarrow$) pour les courbes de Harnack de genre général.
- [Kenyon'02] prouve une formule “locale” pour la mesure de Gibbs d'entropie maximale dans le cas du modèle de dimères critique sur les graphes isoradiaux.

  $\rightsquigarrow$ Extension à la famille à deux paramètres de mesures de Gibbs dans le cas de genre général.
- Extension au cas des graphes non-périodiques.

# But de notre travail

Modèle de dimères
avec poids de Fock

Formules locales pour
les mesures de Gibbs
(genre 0 [Kenyon'02])

Dans un certain sens,
le modèle de dimères avec poids de Fock contient
tous les modèles de dimères sur les graphes bipartis pérodiques,
et s'étend aux graphes non-périodiques.

# La version dimères des poids de Fock

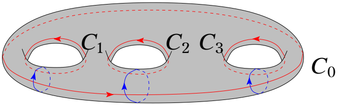
- Outil 1. Données géométriques et fonction theta.
  - Genre 1.
    - Paramètre $q = e^{i\pi\tau}$, $\tau \in i\mathbb{R}^+$, $\Lambda(q) = \pi\mathbb{Z} + \pi\tau\mathbb{Z}$
    - $\mathbb{T}(q) = \mathbb{C}/\Lambda := \Sigma$
    - (Première) fonction theta de Jacobi sur $\mathbb{C}$

$$\theta(z) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)z.$$

    - Blocs pour construire les fonctions méromorphes sur $\mathbb{T}(q)$.
    - $\theta(z) \sim 2q^{\frac{1}{4}} \sin(z)$ lorsque $q \to 0$.

# La version dimères des poids de Fock

- **Outil 1.** Données géométriques et fonction theta.
  - Genre $g \geq 1$.
    - Courbe maximale $\Sigma$ de genre $g$. Surface de Riemann avec $\sigma$, involution anti-holomorphe; lieu réel : $g+1$ cercles top. $C_0, C_1, \dots, C_g$, fixés par $\sigma$.



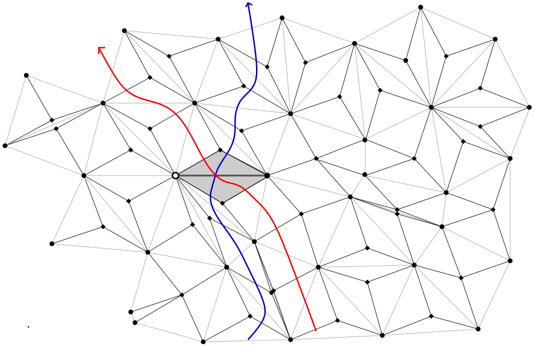

    - Variété jacobienne : $\mathrm{Jac}(\Sigma) = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$
      $\Omega$ : matrice des périodes construite à partir de $\Sigma$ (imaginaire pure).
    - Fonction theta sur $\mathbb{C}^g$

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(-i\pi\langle n, \Omega n\rangle + 2i\pi\langle z, n\rangle),$$

    - Abel map: $\Sigma \to \mathrm{Jac}(\Sigma) \rightsquigarrow$ fonction theta sur $\Sigma$.
    - Prime form $E$ sur $\Sigma \times \Sigma$
      Blocs pour construire les fonctions méromorphes sur $\Sigma$.
  - Genre 1 : $\Sigma \simeq \mathrm{Jac}(\Sigma)$ (plus facile !)

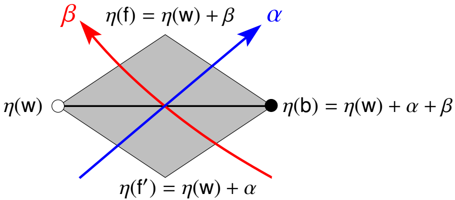
# La version dimères des poids de Fock

- Outil 2. Un autre type de donnée géométrique
  - Graphe minimal $\mathsf{G} \rightsquigarrow$ graphe des quads $\mathsf{G}^\diamond$.
  - Angle map $(\alpha) : \vec{\mathfrak{T}} \to C_0$ préservant ordre cyclique.



# La version dimères des poids de Fock

- Outil 3. Abel map discret $\eta$
  - Fonction $\eta$ sur les sommets de $\mathsf{G}^\diamond$ : $\eta(\mathsf{f}_0) = 0$ pour face donnée $\mathsf{f}_0$, puis règle locale




- Point bien choisi $t \in \mathrm{Jac}(\Sigma)$ : $t \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$.

# La version dimères des poids de Fock

- Matrice d'adjacence de Fock

$$\mathsf{K}_{\mathsf{w},\mathsf{b}} = \begin{cases} \dfrac{E(\beta-\alpha)}{\theta(t+\eta(\mathsf{f}))\theta(t+\eta(\mathsf{f}'))} & \text{si } \mathsf{w} \sim \mathsf{b} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)**
*Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- *$\Sigma$ est courbe maximale,*
- *angle map $(\alpha) : \vec{\mathfrak{T}} \to C_0$ préserve ordre cyclique*
- *paramètre $t \in \mathrm{Jac}(\Sigma)$ bien choisi,*

*alors, la matrice d'adjacence de Fock est une matrice de Kasteleyn pour un modèle de dimères sur $\mathsf{G}$ (poids positifs).*

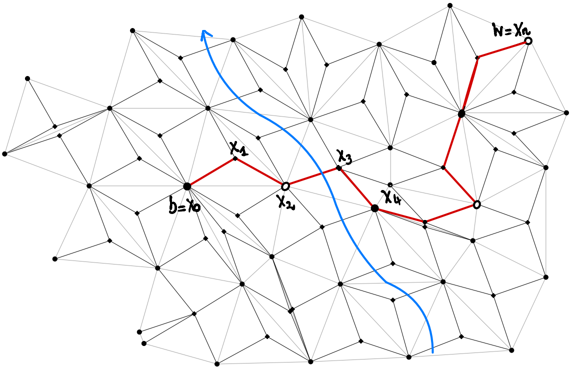
$\rightsquigarrow$ Bon cadre pour faire des probabilités.

# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

- Fonctions dans le noyau de $\mathsf{K}$ :

$$g : \mathsf{B} \times \mathsf{W} \times \Sigma \to \{\text{1-formes méromorphes sur } \Sigma\}$$
$$(\mathsf{b}, \mathsf{w}, u) \mapsto g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

Chemin $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ dans $\mathsf{G}^\diamond$ : $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$.



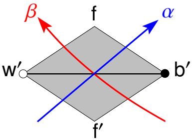
# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

- Fonctions dans le noyau de $\mathsf{K}$ :

$$g : \mathsf{B} \times \mathsf{W} \times \Sigma \to \{\text{1-formes méromorphes sur } \Sigma\}$$
$$(\mathsf{b}, \mathsf{w}, u) \mapsto g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

Chemin $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ dans $\mathsf{G}^\diamond$ : $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$.

$$g_{\mathsf{f},\mathsf{w}'}(u) = \frac{\theta(u + t + \eta(\mathsf{w}'))}{E(u,\beta)} = g_{\mathsf{w}',\mathsf{f}}(u)^{-1}$$
$$g_{\mathsf{b}',\mathsf{f}}(u) = \frac{\theta(u - t - \eta(\mathsf{b}'))}{E(u,\alpha)} = g_{\mathsf{f},\mathsf{b}'}(u)^{-1}.$$



# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

**Proposition (Fock'15)**

*Pour tout sommet* $\mathsf{w}$ *de* $W$, $(g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u))_{\mathsf{b}\in B}$ *est dans le noyau de* $\mathsf{K}$.

**Proof.**

Conséquence de l'identité trisécante de Fay.

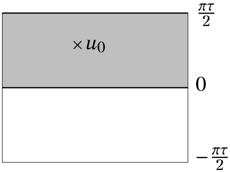
$$\frac{\theta(s+u-\alpha-\beta)}{E(\alpha,u)E(\beta,u)}\frac{E(\alpha,\beta)}{\theta(s-\alpha)\theta(s-\beta)} = $$
$$= \frac{\theta(s+u-\beta-\gamma)}{E(\beta,u)E(\gamma,u)}\frac{E(\gamma,\beta)}{\theta(s-\beta)\theta(s-\gamma)} - \frac{\theta(s+u-\alpha-\gamma)}{E(\alpha,u)E(\gamma,u)}\frac{E(\gamma,\alpha)}{\theta(s-\alpha)\theta(s-\gamma)}$$

□

# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

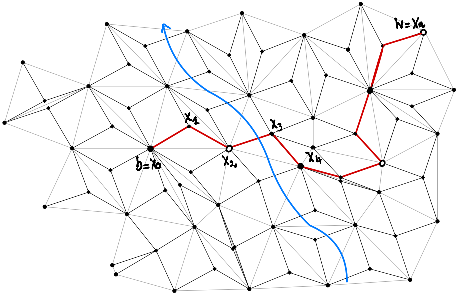
**Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)**

*Pour tout $u_0 \in$ partie sup. de $\Sigma$, l'expression locale suivante est un inverse de l'opérateur de Kasteleyn* $\mathsf{K}$




$$\forall \mathsf{b}, \mathsf{w} \quad A^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}} := \frac{1}{2i\pi} \int_{C^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}} g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

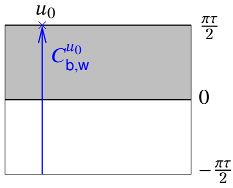
où $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$ pour $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ un chemin ds $G^\diamond$



# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

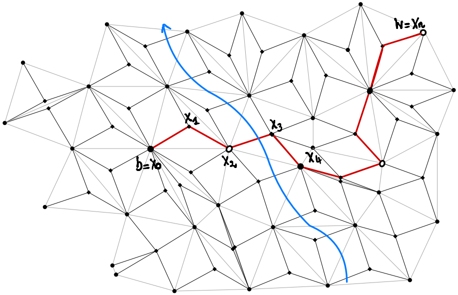
**Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)**

*Pour tout $u_0 \in$ partie sup. de $\Sigma$, l'expression locale suivante est un inverse de l'opérateur de Kasteleyn* $\mathsf{K}$




$$\forall \mathsf{b},\mathsf{w} \quad A^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}} := \frac{1}{2i\pi}\int_{C^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}} g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

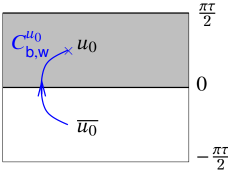
où $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$ pour $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ un chemin ds $G^\diamond$



# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

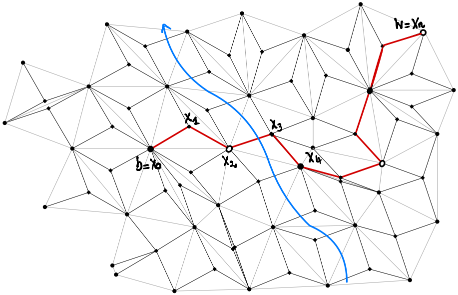
## Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)

*Pour tout $u_0 \in$ partie sup. de $\Sigma$, l'expression* *locale* *suivante est un inverse de l'opérateur de Kasteleyn* $\mathsf{K}$




$$\forall \mathsf{b},\mathsf{w} \quad A^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}} := \frac{1}{2i\pi}\int_{C^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}} g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

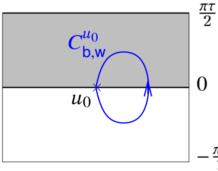
où $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$ pour $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ un chemin ds $G^\diamond$



# Inverse(s) de l'opérateur de Kasteleyn

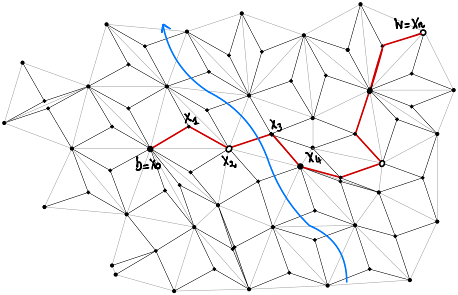
**Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)**

*Pour tout $u_0 \in$ partie sup. de $\Sigma$, l'expression locale suivante est un inverse de l'opérateur de Kasteleyn* $\mathsf{K}$




$$\forall \mathsf{b},\mathsf{w} \quad A^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}} := \frac{1}{2i\pi}\int_{C^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}} g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u)$$

où $g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u) = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\mathsf{x}_j,\mathsf{x}_{j+1}}(u)$ pour $\mathsf{b} = \mathsf{x}_0, \mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n = \mathsf{w}$ un chemin ds $G^\diamond$



# Idée de la preuve [Kenyon]

- Montrer l'identité $\mathsf{K}A^{u_0} = \mathrm{Id}$.
- Utiliser que $g$ est dans le noyau de $\mathsf{K}$.
- Montrer que les contours d'intégration sont tels que l'on a des 1 sur la diagonale.

# Mesures de Gibbs et diagramme de phase

- Supposons que le graphe minimal $\mathsf{G}$ satisfait :

  $(*)$ tout sous-graphe connexe de $\mathsf{G}_0 \subset \mathsf{G}$ est contenu dans un graphe minimal périodique.

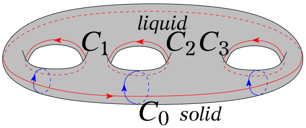
**Théorème (Boutillier-Cimasoni-dT '22)**

*Pour tout $u_0$ dans la partie sup. de $\Sigma$, il existe une mesure de Gibbs $\mathbb{P}^{u_0}$ sur $\mathcal{M}(\mathsf{G})$ t.q. pour tout ss-ens. d'arêtes $\{\mathsf{e}_1 = \mathsf{w}_1\mathsf{b}_1, \cdots, \mathsf{e}_k = \mathsf{w}_k\mathsf{b}_k\}$ de $\mathsf{G}$,*

$$\mathbb{P}^{u_0}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_k) = \left| \left( \prod_{i=1}^{k} \mathsf{K}_{\mathsf{w}_i,\mathsf{b}_i} \right) \det_{1\leq i,j\leq k} (A^{u_0}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j}) \right|.$$

*De plus, nous avons le diagramme de phase*

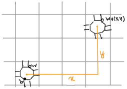
- *$u_0 \in C_j, 1 \leq j \leq g, \Leftrightarrow$ gazeux (décr. expo.)*
- *$u_0 \in C_0 \Leftrightarrow$ solide (pas de décr.)*
- *$u_0 \notin C_0 \cup \cdots \cup C_g \Leftrightarrow$ liquide (décr. polyn.)*



# Remarques

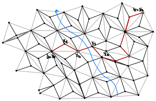
- Cas périodique : 2 expressions pour la famille à 2 param. de mesures de Gibbs
  - $\mathbb{P}^{(B_x,B_y)}(\mathsf{e}_1,\dots,\mathsf{e}_k) = \left|\left(\prod_{i=1}^k \mathsf{K}^{(B_x,B_y)}_{\mathsf{w}_i,\mathsf{b}_i}\right)\det_{1\le i,j\le k}[(\mathsf{K}^{(B_x,B_y)})^{-1}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j}]\right|$, où

$$(\mathsf{K}^{(B_x,B_y)})^{-1}_{\mathsf{b},\mathsf{w}+(x,y)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\mathrm{cof}(\mathsf{K}_1^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w}))^t_{\mathsf{b},\mathsf{w}}}{P^{(B_x,B_y)}(\mathsf{z},\mathsf{w})}\mathsf{z}^{-y}\mathsf{w}^{x}\frac{d\mathsf{z}}{\mathsf{z}}\frac{d\mathsf{w}}{\mathsf{w}}$$



  - $\mathbb{P}^{u_0}(\mathsf{e}_1,\dots,\mathsf{e}_k) = \left|\left(\prod_{i=1}^k \mathsf{K}_{\mathsf{w}_i,\mathsf{b}_i}\right)\det_{1\le i,j\le k}(A^{u_0}_{\mathsf{b}_i,\mathsf{w}_j})\right|$, où

$$A^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}} := \frac{1}{2i\pi}\int_{C^{u_0}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}} g_{\mathsf{b},\mathsf{w}}(u).$$



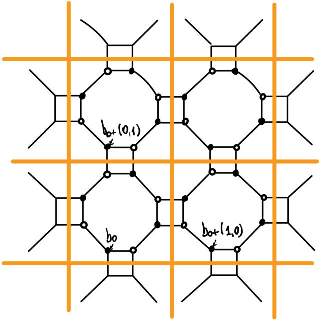
- Cas non-périodique : meilleure compréhension du diagramme de phase possible (partie supérieure de la courbe maximale $\Sigma$).

# Paramétrisation explicite de la courbe spectrale

- Supposons que $\mathsf{G}$ est $\mathbb{Z}^2$-périodique. On définit l'application $\psi$,

$$\begin{aligned}\psi : \Sigma &\to \mathbb{C}^2\\ u &\mapsto \psi(u) = (\mathsf{z}(u), \mathsf{w}(u))\end{aligned}$$

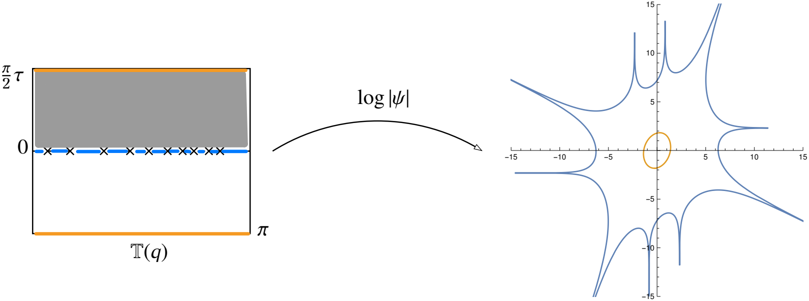
  - $\mathsf{z}(u) = g_{b_0, b_0+(1,0)}(u)$,
  - $\mathsf{w}(u) = g_{b_0, b_0+(0,1)}(u)$



# Paramétrisation explicite de la courbe spectrale

**Proposition** ([Boutillier-Cimasoni-dT '22])

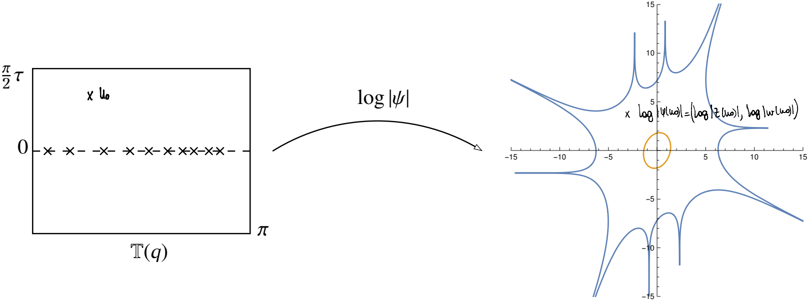
*L'application $\psi$ est une paramétrisation bi-rationnelle de la courbe $\mathcal{C}$, envoyant $C_1, \ldots, C_g$ sur les ovales de $\mathcal{C}$ et $C_0$ sur la composante réelle non bornée de $\mathcal{C}$, impliquant en particulier que $\mathcal{C}$ a genre géométrique $g$.*



# Paramétrisation explicite de la courbe spectrale

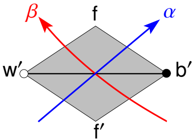
**Proposition ([Boutillier-Cimasoni-dT '22])**

*L'application $\psi$ est une paramétrisation bi-rationnelle de la courbe $\mathcal{C}$, envoyant $C_1, \ldots, C_g$ sur les ovales de $\mathcal{C}$ et $C_0$ sur la composante réelle non bornée de $\mathcal{C}$, impliquant en particulier que $\mathcal{C}$ a genre géométrique $g$.*



# Formule explicite pour les probabilités d'arêtes

Probabilité d'apparition d'une arête wb




$$\mathbb{P}^{u_0}(\mathsf{e}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathsf{C}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}^{u_0}} \omega_{\beta-\alpha} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{g}\Big(\frac{\partial \log\theta}{\partial z_j}(t+\eta(\mathsf{f})) - \frac{\partial \log\theta}{\partial z_j}(t+\eta(\mathsf{f}'))\Big)\int_{\mathsf{C}_{\mathsf{b},\mathsf{w}}^{u_0}} \omega_j,$$

- phase gazeuse

$$\mathbb{P}^{u_0}(\mathsf{e}) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega_k + \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{g}\Omega_{j,k}\Big(\frac{\partial \log\theta}{\partial z_j}(t+\eta(\mathsf{f})) - \frac{\partial \log\theta}{\partial z_j}(t+\eta(\mathsf{f}'))\Big),$$

- phase solide

$$\mathbb{P}^{u_0}(\mathsf{wb}) = \mathbb{I}_{\{\text{relation cyclique } [\alpha, u_0, \beta] \text{ est vraie sur } C_0\}}.$$

# Energie libre

**Proposition (Boutillier,Cimasoni,dT '22)**

*Pour tout $u_0$ dans la partie supérieure de $\Sigma$,*

$$\lim_{n\to} \frac{1}{n^2} \log Z_n^{(\log|z(u_0)|,\log|w(u_0)|)} =$$

$$= \sum_{\mathrm{wb}\in \mathrm{M}_1} \log|\mathsf{K}_{\mathrm{w,b}}| + \frac{1}{\pi} \sum_{\mathrm{e}\in \mathrm{E}_1} \int_{u_1}^{u_0} \ell_\beta(u) dk_\alpha(u) - \ell_\alpha(u) dk_\beta(u),$$

*où* $k_\alpha(u) = \log|E(\alpha,u)|$, $\ell_\alpha(u) = \arg E(\alpha,u)$.

# Modèle de dimères et courbes de Harnack

**Théorème ([Boutillier-Cimasoni-dT '22])**

*Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Harnack avec un diviseur standard. Alors il existe une courbe maximale $\Sigma$, un graphe minimal périodique $\mathsf{G}$, un angle map $(\alpha)$, un point $t \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$ tels que l'opérateur de Kasteleyn $\mathsf{K}$ avec poids de Fock correspondant est périodique, et $\mathcal{C}$ est la courbe spectrale associée.*

**Idée de preuve.**

- Théorèmes généraux de paramétrisation
- Reconstruction d'un graphe minimal [Goncharov-Kenyon '13].

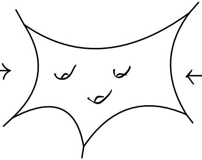
$\square$

# Relations à d'autres travaux

- Genre 0. [Kenyon'02], [Kenyon, Okounkov'03]
- Genre 1. Deux cas particuliers on été traité :
  - le graphe biparti provenant du modèle d'Ising [Boutillier-dT-Raschel'20]
  - l'opérateur $Z$-Dirac [dT'18] $\rightsquigarrow$ fonctions holomorphes massives.

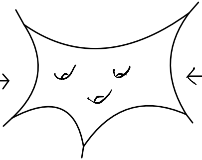
# Conclusions

Dimer model on periodic bipartite graph



Dimer model on periodic minimal graph with Fock's weights

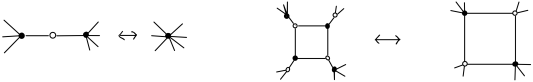
Dimer model on periodic minimal graph



Dimer model on periodic minimal graph with Fock's weights

# Conclusions

- [Goncharov-Kenyon '13] Deux graphes minimaux plongés sur le tore avec le même polygone de Newton sont reliés par les opérations suivantes :



- [Fock '15] Le modèle de dimères avec poids de Fock est invariant par ces deux opérations.

  Question : peut-on trouver des "plongements" de graphes planaires, bipartis généraux
  - de sorte à avoir des expressions locales ???
  - Coulomb gauge/t-embeddings [Kenyon-Lam-Ramassamy-Russkikh '22], [Chelkak-Laslier-Russkikh '21].