

Automates cellulaires et percolation

Irène Marcovici

Journées ALEA 2025

L'objectif de ce cours est de présenter différents liens entre les automates cellulaires et la théorie de la percolation. Nous étudierons l'évolution de certains automates cellulaires à partir de conditions initiales aléatoires, et utiliserons aussi des propriétés portant sur les composantes connexes de sous-graphes aléatoires de la grille pour prédire le comportement d'automates cellulaires probabilistes.

Commençons par introduire en quelques mots le concept de percolation et la notion d'automate cellulaire.

En physique statistique et en mathématiques, la *théorie de la percolation* s'intéresse au comportement des composantes connexes de graphes aléatoires. Considérons la grille \mathbb{Z}^d , et étiquetons chaque sommet de la grille indépendamment par un 1 avec probabilité p , et par un 0 avec probabilité $1 - p$, pour un certain paramètre $p \in [0, 1]$. Nous dirons que la configuration aléatoire ainsi obtenue est une configuration de percolation de paramètre p . Plus p est grand, plus la probabilité qu'il existe une composante connexe infinie de 1 est grande. Plus précisément, on peut démontrer que si p est suffisamment grand, les configurations de percolation contiennent presque sûrement un chemin infini de sommets étiquetés par 1, tandis que pour p petit, les îlots formés par les sommets dans l'état 1 sont presque sûrement tous finis. L'un des objets de la théorie de la percolation est de s'intéresser à la valeur critique du paramètre p à partir de laquelle il existe presque sûrement une composante connexe infinie.

Un *automate cellulaire* (AC) est un système dynamique défini sur l'ensemble $S^{\mathbb{Z}^d}$, pour un certain ensemble fini S de symboles. Il est décrit par une règle locale, appliquée simultanément en chaque site de la grille. Lorsque $S = \{0, 1\}$, on parle d'AC *binaires*. Malgré leur définition très simple, les AC donnent lieu à une grande variété de comportements. Ils peuvent être utilisés pour modéliser des systèmes complexes décrivant des processus physiques ou biologiques, et en informatique théorique, ils constituent un puissant modèle de calcul, permettant de simuler une machine de Turing.

En partie 1, nous introduisons de manière plus formelle les principales notions liées à la théorie de la percolation et aux automates cellulaires.

La partie 2 est consacrée à l'étude de l'évolution de deux AC binaires définis sur la grille bidimensionnelle, lorsque la configuration initiale est une configuration de percolation de paramètre p , pour $p \in [0, 1]$. Le premier AC étudié est l'AC *bootstrap*, qui peut être vu comme un modèle simple de propagation d'infection, ou comme un modèle dynamique de percolation : une cellule qui est à l'état 1 reste à l'état 1, et une cellule qui est à l'état

0 passe à l'état 1 si elle a au moins 2 voisines dans l'état 1. Nous verrons que pour tout $p > 0$, l'état 1 finit par envahir la grille, même si pour de petites valeurs de p , les simulations numériques semblent prédire le contraire. Le second AC que nous étudierons est l'AC de la majorité de Toom, et nous montrerons que cet AC *classifie la densité*, au sens où pour $p < 1/2$, le système converge vers la configuration ne contenant que des 0, tandis que pour $p > 1/2$, il converge vers la configuration ne contenant que des 1. La preuve repose sur le fait que le seuil de percolation sur le réseau triangulaire est égal à $1/2$.

En partie 3, nous nous intéressons aux *automates cellulaires probabilistes* (ACP), qui sont une extension probabiliste des AC : à chaque pas de temps, la nouvelle valeur de chaque cellule est choisie aléatoirement, indépendamment des autres, selon une distribution donnée par l'état de la configuration dans un voisinage fini de la cellule. Lorsqu'on étudie le comportement asymptotique d'un ACP, l'une des premières questions qui se pose est celle de son ergodicité. On dit qu'un ACP est *ergodique* si au cours de son évolution, il finit par "oublier" sa configuration initiale, au sens où quelle que soit la distribution initiale, les trajectoires convergent toujours vers la même distribution stationnaire. Nous montrerons que des propriétés de percolation orientée sur \mathbb{Z}^{d+1} permettent d'établir l'ergodicité d'ACP définis sur \mathbb{Z}^d .

Pour finir, la partie 4 est consacrée à l'introduction et à l'étude d'un ACP relié aux *modèle des sphères dures*, un modèle de gaz sur réseau qui a fait l'objet de nombreux travaux en physique statistique. Nous verrons que cet ACP intervient de manière inattendue dans l'énumération des *animaux dirigés*, c'est-à-dire des différentes formes que peuvent prendre les composantes connexes de percolation orientée, et qu'ils apparaissent aussi dans l'étude d'un jeu combinatoire sur des configurations de percolation.

Dans certaines parties, nous avons choisi de détailler les stratégies de preuve, mais sans forcément écrire les démonstrations de manière complètement formelle. Les lecteurs et lectrices qui le souhaitent pourront consulter les références indiquées au cours de ces notes pour plus de précisions. De manière générale, nous renvoyons au livre de Kůrka [16] et à l'article de synthèse de Kari [15] pour des introductions plus complètes aux automates cellulaires, et à l'ouvrage de Toom et al. [23] ainsi qu'à l'article de synthèse de Mairesse et Marcovici [18] pour ce qui est des automates cellulaires probabilistes. L'ouvrage de référence sur la percolation est le livre de Grimmett [12]. La partie 2 repose principalement sur l'article [24] concernant l'AC bootstrap, et sur l'article [3] pour ce qui est de l'AC de la majorité de Toom. Les ingrédients de la partie 3 sont issus de [4], et on pourra également consulter [19] pour plus de précisions. Enfin, la partie 4 présente les résultats principaux de l'article [14].

1 Introduction aux automates cellulaires et à la percolation

Dans cette partie, nous introduisons les principales définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce cours. Pour commencer, nous introduisons la notion de *configuration*. Ce sera en effet un objet central de ce cours, car un AC est un système dynamique défini sur un ensemble de configurations, et la théorie de la percolation s'intéresse aux propriétés de configurations aléatoires de symboles, pour lesquelles chaque site est étiqueté indépendamment selon une mesure de Bernoulli de paramètre p .

1.1 Configurations

Pour un entier $d \geq 1$ et un ensemble fini S de *symboles*, un élément $z \in S^{\mathbb{Z}^d}$ est appelé une *configuration* d -dimensionnelle sur S . Nous emploierons le terme de *cellule* pour désigner les éléments de \mathbb{Z}^d . Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on dira donc que z_k est l'*état* de la cellule k dans la configuration z .

Munissons $S^{\mathbb{Z}^d}$ de la topologie produit. Pour un ensemble fini $K \subset \mathbb{Z}^d$ et un élément $y \in S^K$, l'ensemble $[y_K] = \{z \in S^{\mathbb{Z}^d} : \forall k \in K, z_k = y_k\}$ est appelé un *cylindre* de *base* K , et on note $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble de tous les cylindres de base K .

L'ensemble des distributions de probabilité sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ pour la tribu borélienne est notée $\mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$. Pour une distribution $\mu \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$, on note $\mu[y_K]$ la probabilité du cylindre $[y_K]$. Étant donnée une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$, on note δ_x la mesure de probabilité qui correspond à la distribution de Dirac centrée en x .

Lorsque $S = \{0, 1\}$, on note $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ la mesure de Bernoulli produit, qui consiste à attribuer la valeur 1 avec probabilité p (et 0 avec probabilité $1 - p$) à chaque cellule de \mathbb{Z}^d , indépendamment les unes des autres. On note respectivement $\underline{0}$ et $\underline{1}$ les deux configurations $0^{\mathbb{Z}^d}$ et $1^{\mathbb{Z}^d}$.

Nous noterons (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{Z}^d .

1.2 Automates cellulaires et automates cellulaires probabilistes

Automates cellulaires. Considérons un entier $m \geq 1$, et soient $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}^d$. L'*automate cellulaire* (AC) de *voisinage* $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$ et de règle locale $f : S^m \rightarrow S$ est la fonction :

$$\begin{aligned} F : S^{\mathbb{Z}^d} &\rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

définie par :

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, F(x)_k = f(x_{k+n_1}, \dots, x_{k+n_m}).$$

Nous allons nous intéresser aux comportements asymptotiques possibles des itérés d'un AC. Lorsque $S = \{0, 1\}$, on peut par exemple choisir la configuration initiale X^0 selon la mesure

État du voisinage	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvelle valeur de la cellule	1	0	1	1	1	0	0	0

FIG. 1 – Règle locale de l’AC trafic (Exemple 1)

de Bernoulli produit $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, et étudier la suite $(X^t)_{t \geq 0}$ de configurations définie par $X^t = F^t(X^0)$. En particulier, on peut se demander dans quelle mesure le comportement asymptotique de X^t dépend de la densité initiale p de 1 dans la configuration initiale. La difficulté est double : d’une part, les simulations numériques (nécessairement finies) ne capturent pas toujours le comportement asymptotique du système défini sur la grille infinie ; d’autre part, même lorsque les simulations ou des arguments heuristiques ne laissent guère de doutes quand au comportement de l’AC, les résultats sont généralement difficiles à prouver.

En dimension 2, l’exemple le plus célèbre d’AC est certainement le *jeu de la vie*, introduit par Conway en 1970, qui a contribué à la popularisation des automates cellulaires. Malgré des règles très simples, il se comporte de manière complexe à partir de certaines configurations initiales, montrant en particulier des propriétés d’auto-reproduction. En partie 2, nous étudierons deux autres AC binaires de dimension 2, l’AC *bootstrap* et l’AC *de la majorité de Toom*. Nous donnons ci-dessous un autre exemple bien connu d’AC, en dimension 1 cette fois-ci : l’AC *trafic*.

Exemple 1 (AC trafic). *L’AC trafic peut être défini comme un modèle très simple de trafic routier : les symboles 1 sont vus comme des voitures, qui avancent d’un cran vers la droite dès qu’il y a un espace vide (symbole 0) libre devant elles. On obtient ainsi un AC binaire de voisinage $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$, dont la règle locale complète est donnée en Figure 1. Les valeurs 10111000 qui apparaissent sur la deuxième ligne du tableau correspondent à l’écriture binaire du nombre 184 : c’est le numéro que porte cet AC dans la classification de Wolfram, qui attribue un numéro de 0 à 255 à chacun des AC binaires unidimensionnels de rayon 1.*

La figure 2 représente trois diagrammes espace-temps de cet AC, à partir de configurations initiales tirées selon des mesures de Bernoulli $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$ de paramètre $p = 0.3, p = 0.5$, et $p = 0.7$. De par sa définition, cet AC préserve la densité, au sens où si les symboles 1 apparaissent avec une densité p dans la configuration initiale, cela reste vrai à tout instant. De plus, la règle locale de l’AC est invariante par l’opération consistant à la fois à faire un retournement gauche-droite et à intervertir les 0 et les 1, ce que les diagrammes espace-temps permettent bien de visualiser. On peut démontrer qu’à partir d’une mesure de Bernoulli de paramètre $p \leq 1/2$, la probabilité de voir deux symboles 1 consécutifs tend vers 0, alors qu’au contraire, pour $p \geq 1/2$, c’est la probabilité de voir deux symboles 0 consécutifs qui tend vers 0 [1]. L’exercice suivant propose de démontrer une version plus simple de cette propriété, dans le cas fini [5, Lemme 4].

Exercice 1. *On se donne un entier $N \geq 1$, et on s’intéresse à l’évolution de l’AC trafic sur l’anneau fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, c’est-à-dire sur une fenêtre de taille N , avec des conditions aux*

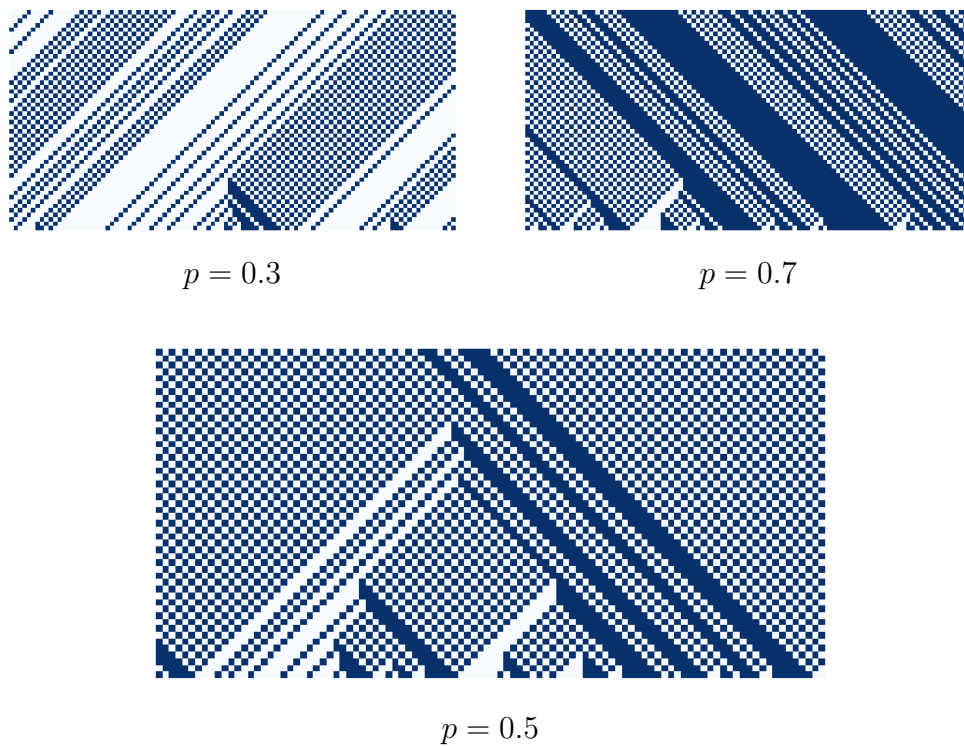


FIG. 2 – Trois diagrammes espace-temps de l'AC trafic, à partir de configurations initiales tirées selon des mesures de Bernoulli $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$, pour différentes valeurs du paramètre p (le temps va vers le haut).

bords périodiques. On note N_0 (resp. N_1) le nombre de 0 (resp. de 1) dans la configuration initiale, et on pose $T = \lceil N/2 \rceil$. Montrer que :

- si $N_0 \geq N_1$, alors à partir du temps T , les configurations de l'AC ne contiennent plus le motif 11,
- si $N_1 \geq N_0$, alors à partir du temps T , les configurations de l'AC ne contiennent plus le motif 00.

Automates cellulaires probabilistes. Pour les *automates cellulaires probabilistes* (ACP), la règle locale est une fonction $\varphi : S^m \rightarrow \mathcal{M}(S)$, où $\mathcal{M}(S)$ représente l'ensemble des distributions de probabilité sur S . À partir d'une configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$, la cellule $k \in \mathbb{Z}^d$ est mise à jour par un symbole choisi selon la distribution $\varphi(x_{k+n_1}, \dots, x_{k+n_m})$, de manière indépendante pour différentes cellules. Un ACP peut être vu comme une chaîne de Markov sur $S^{\mathbb{Z}^d}$. L'évolution d'un ACP est décrite par une famille de variables aléatoires $(X^t)_{t \geq 0}$, où X^t représente la configuration obtenue au temps t après avoir itéré la dynamique à partir de la configuration initiale X^0 (qui peut être déterministe ou aléatoire).

Formellement, l'ACP de règle locale φ peut aussi être vu comme la fonction :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d}) &\rightarrow \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu &\mapsto \mu\Phi \end{aligned}$$

définie sur les cylindres par :

$$\mu\Phi[y_K] = \sum_{[x_{K+N}] \in \mathcal{C}(K+N)} \mu[x_{K+N}] \prod_{k \in K} \varphi(x_{k+n_1}, \dots, x_{k+n_m})(y_k),$$

pour une distribution de probabilité $\mu \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$. Si la configuration initiale X^0 est distribuée selon une mesure μ_0 , alors au temps t , la configuration X^t est distribuée selon $\mu_0\Phi^t$. On dit qu'un ACP a des *taux positifs* si $\forall (x_1, \dots, x_m) \in S^m, \forall s \in S, \varphi(x_1, \dots, x_m)(s) > 0$.

Distributions invariantes et ergodicité. Une distribution de probabilité $\pi \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$ est *invariante* par l'ACP Φ si $\pi\Phi = \pi$. La compacité de $\mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$ permet de montrer qu'un ACP a toujours au moins une distribution de probabilité invariante, voir par exemple [23, Prop. 2.5].

Un ACP Φ est *ergodique* s'il a une unique distribution de probabilité invariante π , qui attire toutes les distributions initiales, au sens où pour toute distribution μ de $\mathcal{M}(S^{\mathbb{Z}^d})$, $\mu\Phi^t$ converge faiblement vers π quand $t \rightarrow \infty$. En termes de cylindres, cela signifie que pour tout cylindre $[y_K]$, on a $\mu\Phi^t[y_K] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi[y_K]$. Intuitivement, l'ergodicité correspond au fait qu'au cours de l'évolution, le système finit par oublier toute information concernant la configuration initiale. Notons qu'un ACP ayant une unique distribution invariante n'est pas forcément ergodique [6].

Exemple 2 (Somme modulo 2 bruitée). Pour un certain nombre réel $\varepsilon \in [0, 1]$, considérons l'ACP binaire de dimension 1 et de voisinage $\mathcal{N} = \{-1, 1\}$, défini par la règle locale :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (1 - \varepsilon) \delta_{x+y} + \varepsilon \delta_{x+y+1} \\ &= \begin{cases} x + y \text{ avec probabilité } 1 - \varepsilon \\ x + y + 1 \text{ avec probabilité } \varepsilon, \end{cases} \end{aligned}$$

où les sommes $x + y$ et $x + y + 1$ sont calculées modulo 2. La règle locale consiste donc à effectuer la somme (modulo 2) du voisin de gauche et du voisin de droite, mais en se trompant avec probabilité ε , indépendamment pour différentes cellules. Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve un AC déterministe (c'est la règle 90 dans la classification de Wolfram), dont le diagramme-espace temps fait apparaître un triangle de Sierpiński lorsque la configuration initiale ne comporte qu'un seul 1. La Figure 3 montre deux diagramme-espace temps de cet AC, pour le paramètre $\varepsilon = 0.001$, à partir d'une configuration initiale ne contenant qu'un seul 1, et d'une configuration distribuée selon la mesure de Bernoulli produit $\mathbb{P}_{1/2}$. Dès que la probabilité d'erreur ε est strictement positive, on constate que cet AC oublie rapidement sa configuration initiale : si l'on efface les premières lignes du diagramme espace-temps, il est bien difficile de deviner quelle était la configuration initiale. On peut effectivement démontrer que cet AC est ergodique pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, son unique mesure invariante étant la distribution $\mathbb{P}_{1/2}$.

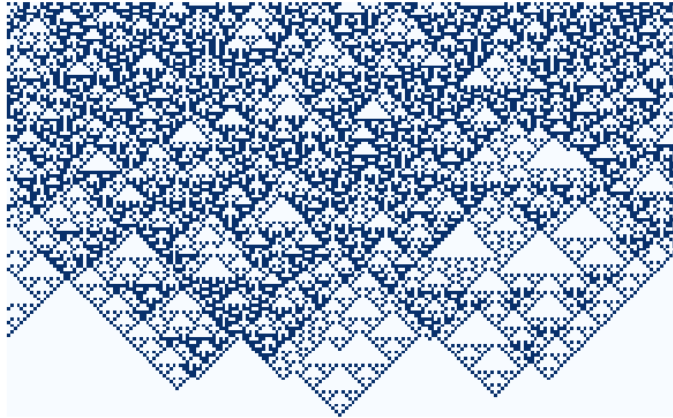
Exercice 2. Montrer que quelle que soit la valeur du paramètre $\varepsilon \in [0, 1]$, la mesure uniforme $\mathbb{P}_{1/2} = \mathcal{B}(1/2)^{\otimes \mathbb{Z}}$ est une mesure invariante de l'ACP de la somme bruitée (Exemple 2). On pourra commencer par traiter le cas $\varepsilon = 0$.

1.3 Percolation

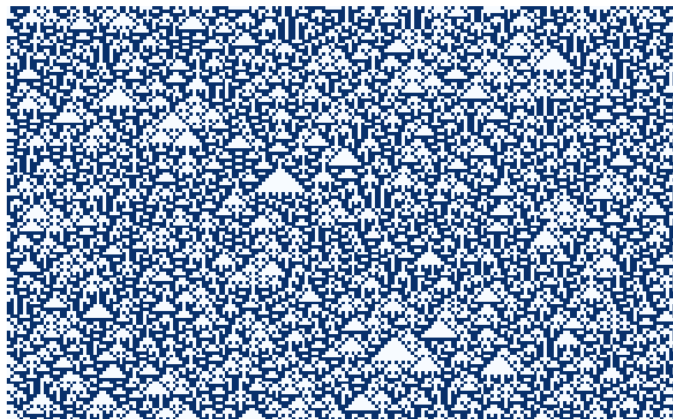
Lorsque l'ensemble des symboles est l'ensemble $S = \{0, 1\}$, les éléments de $S^{\mathbb{Z}^d}$ sont des configurations binaires. Dans ce cas, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on dira que la cellule k de la configuration $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$ est occupée si $x_k = 1$, et vide sinon. La théorie de la percolation décrit le comportement des composantes connexes de cellules occupées dans des configurations binaires aléatoires.

Pour définir la notion de composante connexe sur \mathbb{Z}^d , il faut commencer par préciser la structure de graphe en jeu. Une composante connexe de cellules occupées (resp. vides) est alors définie comme étant un sous-ensemble connexe de cellules dans l'état 1 (resp. 0), maximal pour l'inclusion.

Afin de préciser le modèle de percolation, il faut aussi spécifier la distribution de probabilité à laquelle on s'intéresse sur $S^{\mathbb{Z}^d}$. Dans le cadre des modèles de percolation de Bernoulli, on considère la mesure produit $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, pour un paramètre $p \in [0, 1]$. La première question à laquelle on peut s'intéresser est alors l'existence ou non d'une composante connexe infinie de cellules occupées, sous cette distribution de probabilité, selon la valeur du paramètre p .



Configuration initiale avec un unique 1



Configuration initiale tirée selon la mesure uniforme
(mesure de Bernoulli produit de paramètre $p = 1/2$)

FIG. 3 – Deux diagrammes espace-temps de l'ACP de la somme bruitée (Exemple 2), pour le paramètre $\varepsilon = 0.001$, à partir de configurations initiales différentes.

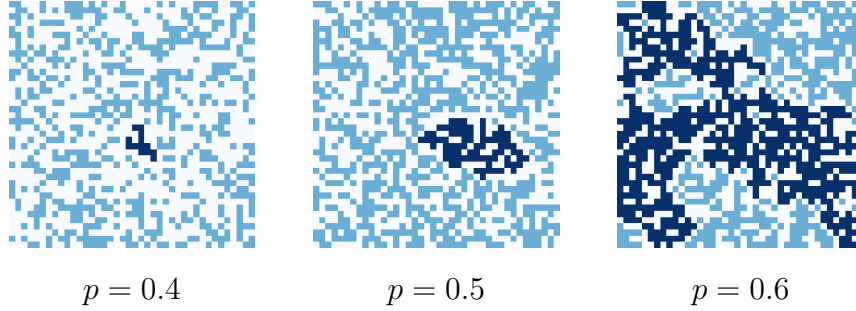


FIG. 4 – Percolation non-orientée par sites sur le graphe (\mathbb{Z}^2, E_2) : représentation de la composante connexe de l’origine pour différents paramètres.

Percolation non-orientée par sites. Considérons le graphe (\mathbb{Z}^d, E_d) , où l’ensemble E_d des arêtes est défini par

$$E_d = \{\{k, \ell\} : k, \ell \in \mathbb{Z}^d, \ell - k \in \{e_1, \dots, e_d\}\},$$

ce qui correspond à la structure de graphe naturelle sur \mathbb{Z}^d . Pour $p \in [0, 1]$, la *percolation de Bernoulli non-orientée par sites* de paramètre p sur ce graphe consiste à s’intéresser aux propriétés de connexité des configurations aléatoires obtenues en étiquetant les sites (cellules) de \mathbb{Z}^d selon la distribution \mathbb{P}_p , comme illustré en Figure 4.

Pour $d = 2$, si on considère l’ensemble d’arêtes défini par :

$$E_\Delta = \{\{k, \ell\} : k, \ell \in \mathbb{Z}^2, \ell - k \in \{e_1, e_2, e_1 - e_2\}\}, \quad (1)$$

on obtient le réseau triangulaire.

Percolation orientée par sites. Pour la percolation orientée, un modèle classique consiste, pour un certain choix de $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}^d$, à considérer le graphe orienté $(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}, \vec{E})$ défini par $\vec{E} = \{((k, t), (k - v_i, t + 1)) : k \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}, v_i \in \mathcal{N}\}$, où $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$ est le *voisinage*. Les seules liaisons autorisées vont donc de la hauteur t à la hauteur $t + 1$, et elles sont décrites par le voisinage \mathcal{N} . Pour un paramètre $p \in [0, 1]$, on peut alors s’intéresser à la *percolation de Bernoulli orientée par sites* de paramètre p sur ce graphe : on étiquette les sites (cellules) de ce graphe selon la distribution $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N})}$, et on s’intéresse à l’existence ou non d’une composante connexe infinie de cellules occupées sous cette distribution de probabilité, selon la valeur du paramètre p , voir la Figure 5 pour une illustration avec $d = 1$ et $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$.

Seuil de percolation. Pour les différents modèles décrits ci-dessus, on peut introduire la fonction

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[\text{l’origine appartient à une composante connexe infinie}],$$

et définir le *seuil de percolation* $p_c = \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p) > 0\}$. Par un argument classique de couplage, on peut montrer que la fonction $p \mapsto \theta(p)$ est croissante (au sens large), ce qui permet d’écrire aussi $p_c = \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p) = 0\}$.

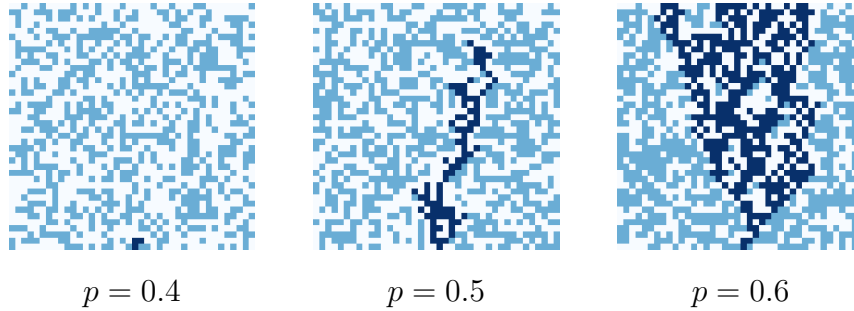


FIG. 5 – Percolation orientée par sites sur le graphe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \vec{E})$, pour le voisinage $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$: représentation de la composante connexe de l’origine pour différents paramètres.

Par invariance par translation, lorsque $p < p_c$, la probabilité pour une cellule quelconque d’appartenir à une composante connexe infinie est égale à 0. Par conséquent, comme il n’y a qu’un nombre dénombrable de cellules, on peut en déduire qu’avec probabilité 1, la configuration ne contient aucune composante connexe infinie de cellules occupées.

On connaît relativement peu de choses sur les valeurs exactes des seuils de percolation. Pour la percolation non-orientée sur la grille \mathbb{Z}^d munie de sa structure de graphe naturelle, les valeurs approchées sont $p_c \approx 0.59$ sur \mathbb{Z}^2 , et $p_c \approx 0.31$ sur \mathbb{Z}^3 . Notons cependant que pour le réseau triangulaire (\mathbb{Z}^2, E_Δ) , la valeur du seuil est exactement $p_c = 1/2$. Cette valeur remarquable peut être expliquée par des arguments de dualité [12]. Pour ce qui est de la percolation orientée, on a par exemple $p_c(\{0, 1\}) \approx 0.71$.

2 Étude de l’action de deux AC à partir de configurations aléatoires

Dans cette partie, nous nous intéressons à deux AC binaires définis sur la grille bidimensionnelle, l’*AC bootstrap* et l’*AC de la majorité de Toom*. Nous étudions l’évolution de chacun de ces AC à partir de configurations tirées selon la mesure de Bernoulli produit de paramètre p . Nous verrons que pour le premier AC, l’évolution asymptotique ne dépend pas du choix du paramètre $p \in]0, 1[$, tandis que pour le second, on observe un phénomène de *bifurcation* pour $p = 1/2$.

2.1 Automate cellulaire bootstrap

Considérons un AC binaire dont la règle locale est définie de la manière suivante : une cellule qui est à l’état 1 reste à l’état 1, et une cellule qui est à l’état 0 passe à l’état 1 si elle a au moins ℓ voisines dans l’état 1 (pour une valeur de ℓ fixée). Un tel AC peut être vu comme un modèle simple de propagation d’infection, où une cellule devient “infectée” par contact avec au moins ℓ cellules déjà infectées, sans possibilité de rémission. Lorsqu’on itère cet

AC à partir d'une configuration où les cellules sont initialement infectées indépendamment avec une probabilité p , on parle de *processus de percolation bootstrap*.

Un cas particulier qui a suscité beaucoup d'intérêt est la percolation bootstrap sur la grille bidimensionnelle, avec le voisinage $\mathcal{N} = \{0, \pm e_1, \pm e_2\}$, qu'on appelle *voisinage de von Neumann*, et le seuil d'infection $\ell = 2$. Formellement, l'AC bootstrap de dimension 2 et de seuil d'infection 2 est l'AC binaire $F_B : S^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^2}$ de voisinage $\mathcal{N} = \{0, \pm e_1, \pm e_2\}$ défini par la règle locale :

$$f_B((x_i)_{i \in \mathcal{N}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 1 \text{ ou } \text{Card} \{i \in \mathcal{N} : x_i = 1\} \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Expérimentalement, quand on itère cet AC à partir d'une configuration initiale tirée selon la distribution $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^2}$, on observe que l'état 1 envahit très rapidement la grille dès que p est suffisamment grand, tandis que pour de toutes petites valeurs de p , les trajectoires se stabilisent sur une configuration constituée d'une union disjointe de rectangles de cellules occupées. La figure 6 montre une illustration de ce phénomène pour $p = 0.05$. Cependant, nous verrons que dès que p est strictement positif, les cellules occupées envahissent la grille avec probabilité 1. Ce résultat a été démontré pour la première fois par van Enter [24].

Exercice 3. On s'intéresse à l'évolution de l'AC bootstrap ci-dessus, sur une grille finie de taille $N \times N$ (avec conditions aux bords vides). Trouver le plus petit entier n tel qu'il existe une configuration initiale contenant seulement n cellules dans l'état 1, à partir de laquelle l'état 1 remplit toute la grille.

Théorème 1. L'AC bootstrap F_B a le comportement suivant :

$$\forall p > 0, \quad X^0 \sim \mathbb{P}_p \implies X^t = F_B^t(X^0) \xrightarrow{p.s.} \underline{1}.$$

Démonstration. Reprenons la preuve très élégante donnée par van Enter [24]. Elle repose sur l'observation suivante : s'il y a quelque part dans la configuration un carré occupé (c'est-à-dire, un carré plein dont toutes les cellules sont à l'état 1) qui n'est entouré par aucun contour rectangulaire vide, alors, on peut être sûr que l'état 1 va progressivement envahir la grille. Nous allons voir que quelle que soit la valeur de $p > 0$, il existe presque sûrement un carré occupé ayant cette propriété, quelque part dans la configuration.

Considérons un certain carré C_N de $N \times N$ cellules, et soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On a :

$$\mathbb{P}_p(C_N \text{ est entouré par un contour rectangulaire vide}) < \sum_{k=4N}^{\infty} (1-p)^k \alpha_k,$$

où α_k est le nombre de rectangles de périmètre k qui entourent C_N . Ce nombre α_k a une croissance polynômiale. En effet, le nombre de formes possibles pour un rectangle de périmètre 2ℓ vaut $\ell - 1$, et le nombre de rectangles de périmètre 2ℓ et de forme fixée qui

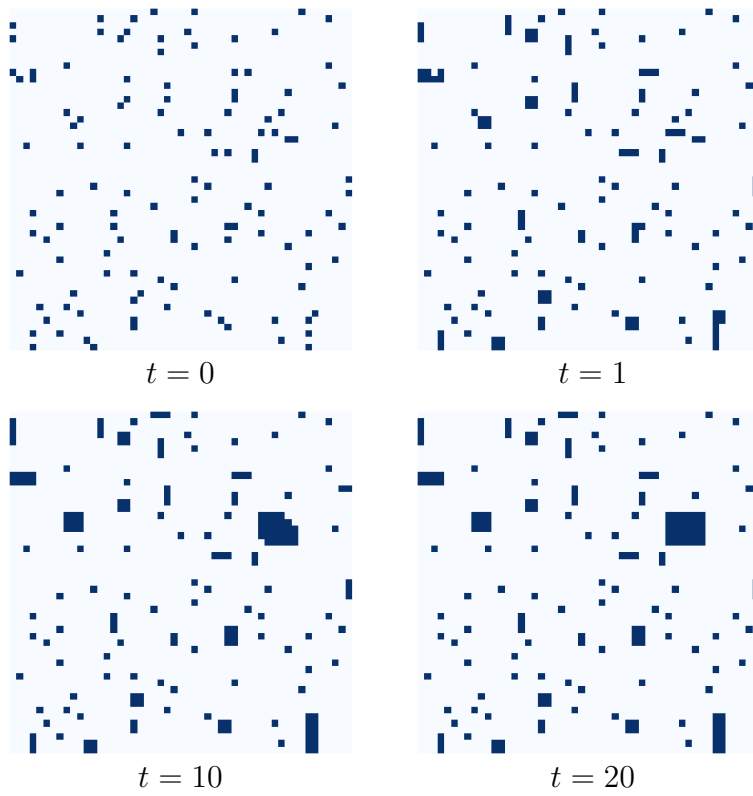


FIG. 6 – AC bootstrap itéré à partir d’une configuration de paramètre $p = 0.05$.

entourent l'origine est borné par $(\ell - 1)^2$. Par conséquent, il existe un polynôme Q tel que $\forall k \geq 1, \alpha_k < Q(k)$. Il en découle que :

$$\mathbb{P}_p(C_N \text{ est entouré par un contour rectangulaire vide}) < \sum_{k=4N}^{\infty} (1-p)^k Q(k).$$

Pour tous p et ε fixés, si N est suffisamment grand, on obtient :

$$\mathbb{P}_p(C_N \text{ est entouré par un contour rectangulaire vide}) < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\mathbb{P}_p(C_N \text{ n'est pas entouré par un contour rectangulaire vide}) > 1 - \varepsilon$, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(C_N \text{ est occupé et n'est pas entouré par un contour rectangulaire vide}) \\ > p^{N^2}(1 - \varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

La présence d'un tel carré C_N quelque part est un événement invariant par translation, et sa probabilité est strictement positive. La mesure \mathbb{P}_p étant ergodique, cet événement a donc probabilité 1, ce qui signifie que le système converge vers la configuration $\underline{1}$. \square

Plus généralement, pour le processus bootstrap de seuil d'infection ℓ sur \mathbb{Z}^d , on peut montrer que la valeur critique de la densité initiale pour laquelle le système converge vers la configuration $\underline{1}$ vaut 0 si $\ell \leq d$, et 1 si $\ell > d$. Notons que si $\ell > d$, un hypercube vide de dimension d (de côté $N \geq 2$) reste vide tout au long de l'évolution de l'AC, ce qui implique que pour toute distribution initiale \mathbb{P}_p pour laquelle $p < 1$, le système ne converge pas vers $\underline{1}$. Nous renvoyons à l'article de Schnomann [20] pour davantage d'informations sur ce modèle et sur des variantes.

La percolation bootstrap sur des grilles finies a également fait l'objet de nombreux travaux. En dimension 2, pour le modèle de seuil d'infection 2 sur la grille $N \times N$, introduisons la probabilité $\alpha(N, p)$ pour qu'en partant d'une configuration initiale tirée selon la distribution $\mathcal{B}(p)^{\otimes N \times N}$, le carré finisse par être entièrement occupé. Soient $(L_n)_{n \geq 0}, (p_n)_{n \geq 0}$ des suites telles que $L_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ et $p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Holroyd [13] a démontré le résultat suivant :

- (i) si $\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n \log L_n > \frac{\pi^2}{18}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(L_n, p_n) = 1$,
- (ii) si $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n \log L_n < \frac{\pi^2}{18}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(L_n, p_n) = 0$.

Autrement dit, sur une grande grille $N \times N$, si $p > \frac{\pi^2}{18 \log N}$, la grille aura une grande probabilité de finir par être entièrement occupée, tandis que si $p < \frac{\pi^2}{18 \log N}$, ce ne sera pas le cas.

Comme le montrent les simulations numériques, si p est trop petit par rapport à la taille de la grille, le processus se stabilise donc sur un point fixe constitué d'une union de rectangles disjoints, et le résultat ci-dessus donne donc le seuil asymptotique à partir

duquel il y a une grande probabilité pour que la grille finisse par être entièrement occupée. Cependant, les simulations restent trompeuses quant au comportement asymptotique, car en pratique la valeur exacte $\frac{\pi^2}{18}$ ne peut pas être prédite expérimentalement : en effet, la convergence vers cette constante $\frac{\pi^2}{18}$ est tellement lente que pour avoir un espoir de s'en approcher, il faudrait effectuer des simulations sur une grille de taille environ 10^{20} , comme indiqué par Gravner et Holroyd [11].

2.2 Automate cellulaire de la majorité

Les *AC de majorité* constituent une autre famille d'AC binaires intéressants. Pour ces AC, la règle locale est telle qu'une cellule passe à l'état 0 (resp. 1) si elle a une majorité de voisines à l'état 0 (resp. 1).

Comme cas particulier, nous allons introduire l'AC de la majorité de Toom, défini sur la grille bidimensionnelle. Le voisinage de cet AC est l'ensemble $\mathcal{N} = \{0, e_1, e_2\}$, qu'on appelle le *voisinage de Toom*.

L'AC de la majorité de Toom est l'AC binaire $F_T : S^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^2}$ de voisinage $\mathcal{N} = \{0, e_1, e_2\}$ défini par la règle locale :

$$f_T(x_0, x_{e_1}, x_{e_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 + x_{e_1} + x_{e_2} \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. *Montrer que l'AC de la majorité de Toom possède la propriété d'érosion suivante :*

- si la configuration initiale ne contient qu'un nombre fini de 1, alors l'AC atteint en temps fini le point fixe $\underline{\mathbf{0}}$,
- si la configuration initiale ne contient qu'un nombre fini de 0, alors l'AC atteint en temps fini le point fixe $\underline{\mathbf{1}}$.

Comme nous allons voir, lorsqu'on itère cet AC à partir d'une configuration initiale distribuée selon la mesure $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^2}$, l'état 0 envahit la grille si $p < 1/2$, tandis que si $p > 1/2$, c'est l'état 1 qui envahit la grille, voir l'illustration pour $p = 0.40$ en figure 7. On dit qu'un tel AC *classifie la densité* : les trajectoires convergent vers la configuration $\underline{\mathbf{0}}$ ou $\underline{\mathbf{1}}$, selon l'état qui est le plus présent dans la configuration initiale.

Théorème 2. *L'AC F_T de la majorité de Toom a le comportement suivant :*

$$\begin{aligned} X^0 \sim \mathbb{P}_p \quad \text{avec } p < 1/2 &\implies X^t = F_T^t(X^0) \xrightarrow{p.s.} \underline{\mathbf{0}} \\ X^0 \sim \mathbb{P}_p \quad \text{avec } p > 1/2 &\implies X^t = F_T^t(X^0) \xrightarrow{p.s.} \underline{\mathbf{1}} \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat repose sur le fait que sur le réseau triangulaire, la valeur critique pour la percolation non-orientée par sites vaut $p_c = 1/2$.

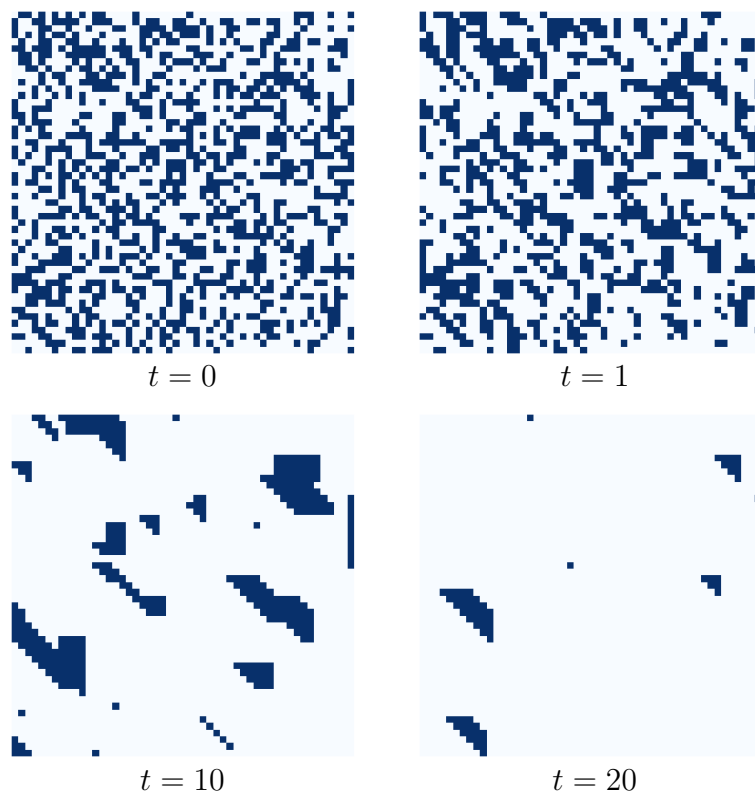


FIG. 7 – AC de la majorité de Toom itéré à partir d’une configuration de paramètre $p = 0.4$.

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que si $p < 1/2$, alors X^t converge faiblement vers $\mathbf{0}$.

Considérons le réseau triangulaire constitué des cellules de \mathbb{Z}^2 , avec les arêtes E_Δ , voir (1). Rappelons que le seuil de percolation sur ce réseau vaut $1/2$, de sorte que pour $p < 1/2$, avec probabilité 1, il n'y a pas de composante connexe infinie de cellules occupées. L'ensemble Γ des cellules occupées est donc presque sûrement une union dénombrable $\Gamma = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k$ de composantes connexes finies de cellules occupées. De plus, la taille d'une composante connexe de cellules occupées décroît exponentiellement : il existe des constantes κ et γ telles que la probabilité qu'un site appartienne à une composante connexe occupée de taille plus grande que n est inférieure à $\kappa e^{-\gamma n}$, cf. [12].

Intéressons-nous à la manière dont les composantes connexes occupées sont transformées par l'action de l'AC. Pour $K \subset \mathbb{Z}^2$, notons 1_K la configuration définie par $(1_K)_i = 1$ si $i \in K$ et $(1_K)_i = 0$ sinon. On utilisera la notation $F_T(K)$ pour l'ensemble K' de \mathbb{Z}^2 tel que $F_T(1_K) = 1_{K'}$. On peut faire les observations suivantes.

- (a) La règle locale ne peut pas scinder ou connecter différentes composantes connexes de cellules occupées. Plus précisément, si K est l'union des composantes $(\Gamma_i)_{i \in I}$, alors les composantes de $F_T(K)$ sont les ensembles non vides parmi les $(F_T(\Gamma_i))_{i \in I}$, voir [9, Fact 3.1] pour plus de détails.
- (b) Un ensemble fini de cellules occupées disparaît en temps fini : si K est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 , alors il existe un entier $t \geq 1$ tel que $T^t(K) = \emptyset$. C'est la *propriété d'érosion* évoquée dans l'exercice 4, cf. [22].
- (c) Considérons une composante connexe de cellules occupées et un rectangle qui la contient. Alors, la composante connexe reste contenue dans ce rectangle au cours de son évolution. Plus précisément, si R est un rectangle, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$, et si $K \subset R$, alors pour tout $t \geq 1$, $F_T^t(K) \subset R$ (cela découle du fait que $F_T(K) \subset F_T(R) \subset R$).

Considérons maintenant toutes les composantes connexes de cellules occupées pour lesquelles l'origine appartient au plus petit rectangle qui les contient. La propriété de décroissance exponentielle de la taille des composantes connexes implique que le nombre de telles composantes connexes est presque sûrement fini. En effet, la probabilité qu'un point (m, n) appartienne à une telle composante connexe est inférieure à la probabilité que ce point appartienne à une composante connexe de taille plus grande que $\max(|m|, |n|)$. Et comme :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \kappa e^{-\gamma \max(|m|, |n|)} < 4\kappa \sum_{m \in \mathbb{N}} (m e^{-\gamma m} + \sum_{n \geq m} e^{-\gamma n}) < \infty,$$

le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure. Soit t_{\max} le temps maximum nécessaire pour effacer ces composantes connexes de cellules occupées. La variable aléatoire t_{\max} est presque sûrement finie, et après le temps t_{\max} , l'origine reste à l'état 0. Comme l'argument peut être étendu à tout point de la grille, cela termine la preuve. \square

La classification de la densité revient à effacer un nombre infini d'“erreurs” dans la configuration initiale, les “erreurs” étant des symboles dans l'état minoritaire. Ici, la difficulté est de rassembler une information globale sur la densité, via un mécanisme local. Le

résultat ci-dessus est issu de [3], mais cet AC remonte aux travaux de Toom, qui l'a mis en avant comme exemple simple de modèle présentant une transition de phase lorsqu'on lui applique un léger bruit [21]. Expliquons un peu plus de quoi il s'agit. Pour un certain $\varepsilon > 0$, introduisons l'ACP Φ_ε dont la règle locale est définie de la manière suivante :

$$\varphi_\varepsilon(x_0, x_{e_1}, x_{e_2}) = (1 - \varepsilon) \delta_{f_T(x_0, x_{e_1}, x_{e_2})} + \varepsilon \delta_{1-f_T(x_0, x_{e_1}, x_{e_2})}.$$

Autrement dit, cet ACP consiste à appliquer, pour chaque cellule indépendamment, la règle de Toom avec probabilité $1 - \varepsilon$, et à faire le contraire avec probabilité ε . Pour ε suffisamment petit, on peut démontrer que cet ACP a plusieurs distributions invariantes. Plus précisément, il a au moins une distribution invariante proche de δ_0 , et une proche de δ_1 . L'ACP Φ_ε fournit donc un exemple simple d'ACP bidimensionnel non-ergodique à *taux positifs*. En dimension 1, il est beaucoup plus difficile d'exhiber un tel exemple d'ACP à taux positifs non-ergodique : le seul exemple connu est celui de Gács [10], et il est très compliqué. Sur \mathbb{Z} , le problème de la classification de la densité s'avère également plus difficile qu'en dimension $d \geq 2$. En fait, c'est toujours un problème ouvert de savoir s'il existe un AC ou un ACP binaire unidimensionnel qui classe la densité.

Nous renvoyons à [3] pour des discussions plus avancées sur le problème de la classification de la densité. En ce qui concerne l'ergodicité des ACP, la partie suivante reviendra sur cette question, et proposera des outils pour démontrer l'ergodicité d'ACP, grâce à un couplage probabiliste.

Exercice 5. *Sur \mathbb{Z}^2 , l'AC de la majorité de Toom a la propriété d'érosion, ce qui signifie qu'il corrige toute perturbation finie des deux configurations $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$.*

1. *Trouver un AC qui corrige les perturbations finies des deux configurations en damier.*
2. *Un k -coloriage est un coloriage des cellules de la grille \mathbb{Z}^2 avec k couleurs, ayant la propriété que deux cellules adjacentes sont toujours de couleurs différentes. Seriez-vous capable de trouver un AC qui corrige les perturbations finies des k -coloriages, pour un certain $k \geq 5$ fixé ? Et pour $k = 4$, ou $k = 3$? Plus précisément, on souhaite d'une part que les configurations valides (c'est-à-dire les configurations pour lesquelles deux cellules adjacentes ont des couleurs différentes) soient des points fixes de l'AC, et d'autre part qu'à partir d'une perturbation finie d'une configuration valide, l'AC atteigne une configuration valide après un nombre fini d'itérations.*

3 Ergodicité des ACP et percolation orientée dans le diagramme espace-temps

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question de l'ergodicité des ACP, et prouvons qu'une comparaison avec la percolation orientée de même voisinage fournit une condition suffisante d'ergodicité pour les ACP. Nous montrerons en effet que l'absence de composantes connexes infinies dans le diagramme espace-temps d'un ACP, dans un sens que nous préciserons, implique l'ergodicité de sa dynamique. Mais pour commencer, revenons

sur le modèle de percolation orientée, et montrons que ce processus peut être interprété comme un ACP.

3.1 L'ACP de percolation

Posons $S = \{0, 1\}$, et soit $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$, un sous-ensemble fixé de \mathbb{Z}^d . Considérons l'ACP Φ_p sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ défini par la règle locale suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_p(a_1, \dots, a_m) &= p \delta_{\max\{a_1, \dots, a_m\}} + (1-p) \delta_0, \\ &= \begin{cases} p \delta_1 + (1-p) \delta_0 & \text{si } \exists i \in \{1, \dots, m\}, a_i = 1, \\ \delta_0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Cet ACP, qu'on appelle aussi l'ACP de *Stavskaya* pour $d = 1$ et $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, peut être vu comme une version dynamique de la percolation orientée de Bernoulli de voisinage $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$. On peut en effet coupler l'évolution de Φ_p avec une configuration $\omega \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}}$ distribuée selon \mathbb{P}_p , en posant, pour $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$X_k^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_{k,t+1} = 1 \text{ et } \exists i \in \{1, \dots, m\}, X_{k+n_i}^t = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Si l'on suppose que dans la configuration initiale, toutes les cellules sont à l'état 1, alors pour $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, on a $X_k^t = 1$ si et seulement si dans la configuration ω , il y a un chemin orienté allant d'un certain site $(\ell, 0)$ au site (k, t) , le long duquel toutes les cellules sont occupées.

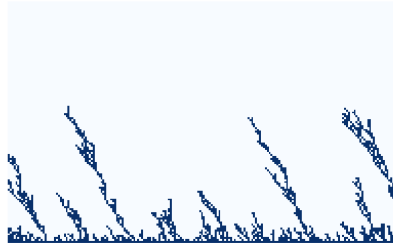
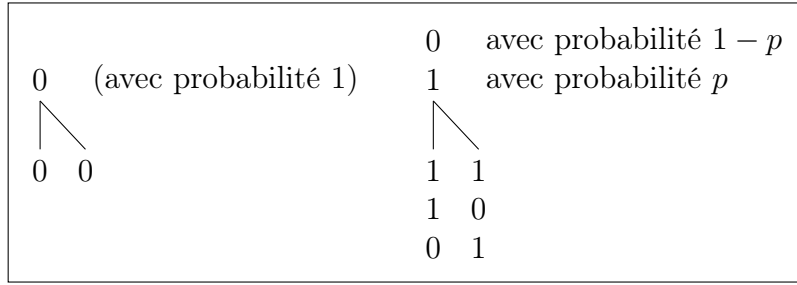
Ceci permet de montrer que l'ACP de percolation a deux comportements possibles, selon si p est inférieur ou supérieur au seuil de percolation $p_c(\mathcal{N})$ du modèle de percolation orientée de voisinage \mathcal{N} . Si $p < p_c(\mathcal{N})$, alors quelle que soit la configuration initiale, l'état 1 s'éteint au cours de l'évolution et l'ACP converge vers la configuration ne contenant que l'état 0, tandis que si $p > p_c(\mathcal{N})$, à partir d'une configuration initiale où toutes les cellules sont à l'état 1, la densité de l'état 1 ne tend pas vers 0.

La figure 8 représente deux diagrammes espace-temps pour l'ACP de percolation de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, avec pour paramètres respectifs $p = 0.6$ et $p = 0.7$, pour une configuration initiale où toutes les cellules sont à l'état 1.

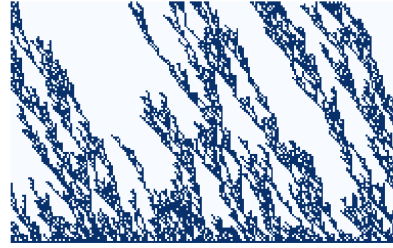
3.2 Critère d'ergodicité

Nous allons maintenant présenter un critère d'ergodicité qui repose sur un couplage des trajectoires à partir de toutes les configurations initiales possibles, et à une comparaison avec la percolation orientée.

Intuitivement, un ACP est ergodique s'il "oublie" sa condition initiale. Dans certains cas, on peut démontrer l'ergodicité de manière constructive, en faisant évoluer simultanément des trajectoires partant de différentes conditions initiales, en utilisant une même source



$p = 0.6$



$p = 0.7$

FIG. 8 – Diagrammes espace-temps de l’ACP de percolation de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, pour différentes valeurs du paramètre p , à partir de la configuration $\underline{1}$ (le temps va vers le haut).

d’aléa, et en montrant que les évolutions des différentes trajectoires finissent par être les mêmes.

La notion d’ACP *enveloppe* donne un cadre systématique à cette idée de *couplage*. Au lieu de faire tourner différentes copies de l’ACP à partir de plusieurs conditions initiales, on définit un nouvel ACP sur un alphabet plus grand, contenant un symbole $?$ représentant les cellules dont la valeur est inconnue (i.e. dont la valeur peut être différente selon les copies), et on fait tourner l’ACP à partir d’une unique configuration initiale, contenant seulement le symbole $?$. À chaque fois que l’on réussit à faire en sorte que les différentes copies coïncident en une certaine cellule, le symbole $?$ est remplacé par l’état $q \in S$ qui convient aux différentes copies. Une évolution de l’ACP enveloppe encode donc un couplage de différentes copies de l’ACP de départ, où le symbole $?$ représente les cellules pour lesquelles les différentes copies sont en désaccord. Si la densité de symboles $?$ tend vers 0 au cours de l’évolution, cela signifie que l’ACP est ergodique.

La notion d’ACP enveloppe a été introduite dans [4], comme outil pour démontrer l’ergodicité d’un ACP et pour échantillonner parfaitement son unique distribution invariante. L’idée d’ACP enveloppe rappelle cependant l’ACP minorant introduit par Toom et al. [23, Chap. 3], qui peut être utilisé de manière similaire pour prouver l’ergodicité dans le cas où la règle locale dépend faiblement du voisinage, et des idées analogues se retrouvent dans d’autres travaux [8].

Supposons que Φ est un ACP défini sur l’ensemble binaire $S = \{0, 1\}$, et soit $\tilde{S} = \{0, 1, ?\}$. On définit un ordre partiel sur \tilde{S} en posant $0 \prec ? \succ 1$. L’ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$ de Φ

est l'ACP de voisinage \mathcal{N} et de règle locale $\tilde{\varphi} : \tilde{S}^m \rightarrow \mathcal{M}(\tilde{S})$, défini pour $q \in S$ par :

$$\tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(q) = \min\{\varphi(x_1, \dots, x_m)(q) : x_1 \preceq y_1, \dots, x_m \preceq y_m\},$$

où dans l'expression ci-dessus, x_1, \dots, x_m appartiennent à S . La probabilité de transition vers le symbole $?$ est alors donnée par :

$$\tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(?) = 1 - \tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(0) - \tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(1).$$

À partir d'une configuration $y \in \tilde{S}^{\mathbb{Z}^d}$, la cellule k passe à l'état $q \in S$ avec le minimum des probabilités de transition vers le symbole q pour $\tilde{\Phi}$, pris sur toutes les valeurs possibles du voisinage de la cellule k qui sont compatibles avec les cellules inconnues de y . Avec la probabilité restante, la cellule passe à l'état $?$.

Proposition 1. *On a les deux propriétés suivantes.*

1. *Si l'ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$ est ergodique, alors Φ est ergodique.*
2. *L'ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$ est ergodique si et seulement si la densité $\tilde{\Phi}^t \delta_{\varphi^{\mathbb{Z}^d}}[?]$ de symboles $?$ au temps t , à partir de la configuration initiale $\varphi^{\mathbb{Z}^d}$, converge vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Le premier point découle du fait que pour une configuration initiale dans $S^{\mathbb{Z}}$, la dynamique de $\tilde{\Phi}$ est la même que celle de Φ .

Le second point repose sur des arguments classiques de couplage probabiliste, cf. [4, 19] pour une preuve plus formelle. L'idée est que pour tout choix de configurations initiales dans $\tilde{S}^{\mathbb{Z}}$, on peut coupler les évolutions de l'ACP enveloppe à partir de ces configurations initiales, de manière à ce que les configurations obtenues au temps t coïncident sauf éventuellement aux cellules marquées du symbole $?$ dans l'évolution de l'ACP enveloppe. Si la densité de ces cellules tend vers 0 quand t tend vers l'infini, cela signifie que $\tilde{\Phi}$ est ergodique. \square

Le fait que les symboles $?$ s'éteignent est équivalent à l'ergodicité de l'ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$, mais l'ergodicité de l'ACP Φ n'implique pas l'ergodicité de $\tilde{\Phi}$. Par conséquent, la proposition 2 ne fournit qu'une condition suffisante d'ergodicité pour $\tilde{\Phi}$.

Notons que la définition de l'ACP enveloppe peut aussi être étendue à des ensembles de symboles ayant plus de deux éléments [4].

Lors de l'évolution de l'ACP enveloppe, à chaque étape, une cellule est actualisée par le symbole $?$ seulement si elle a au moins une voisine à l'état $?$, et dans ce cas, elle prend l'état $?$ avec probabilité plus petite que :

$$\begin{aligned} p? &= \tilde{\varphi}(?, \dots, ?)(?) \\ &= 1 - \min_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(0) - \min_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(1) \\ &= \max_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(0) - \min_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(0) \\ &= \max_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(1) - \min_{x_1, \dots, x_m \in S} \varphi(x_1, \dots, x_m)(1). \end{aligned}$$

Cette quantité mesure à quel point les probabilités de transition dépendent de la valeur du voisinage.

Proposition 2. Notons $p_c(\mathcal{N})$ la valeur critique de la percolation orientée de voisinage \mathcal{N} . Si $p_\varphi < p_c(\mathcal{N})$, alors $\tilde{\Phi}^t \delta_{\varphi^{\mathbb{Z}^d}}[\varphi] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, de sorte que l'ACP $\tilde{\Phi}$ est ergodique.

Démonstration. Considérons le graphe orienté décrivant les dépendances entre les cellules dans le diagramme espace-temps de l'ACP. C'est exactement le graphe de sommets $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, et d'arêtes :

$$\vec{E} = \{((k, t), (k - v_i, t + 1)) : k \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{Z}, v_i \in \mathcal{N}\}.$$

En dominant le processus des symboles φ dans le diagramme espace-temps de l'ACP enveloppe par une percolation orientée de paramètre p_φ , on prouve que si $p_\varphi < p_c(\mathcal{N})$, alors les symboles φ s'éteignent. Le résultat s'ensuit. \square

3.3 Algorithme de couplage par le passé

Si l'ACP $\tilde{\Phi}$ est ergodique, c'est-à-dire si $\tilde{\Phi}^t \delta_{\varphi^{\mathbb{Z}^d}}[\varphi] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, alors l'unique distribution invariante π peut être échantillonnée *parfaitement* par *couplage par le passé* (méthode de Propp-Wilson). Définissons une fonction de mise à jour $h : \tilde{S}^m \times [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$ of $\tilde{\Phi}$ par :

$$h(y_1, \dots, y_m, u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq u \leq \tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(0), \\ 1 & \text{si } 1 - \tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_m)(1) \leq u \leq 1, \\ \varphi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction a la propriété que si $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, 1]$, alors pour tout $y \in \tilde{S}^{\mathbb{Z}}$, la configuration $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par $Z_k = h(y_{k+n_1}, \dots, y_{k+n_m}, U_k)$ est distribuée selon $\tilde{\Phi} \delta_y$.

Soit K un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} . Tirons une suite $(u_{k,-t})_{k \in \mathbb{Z}, t \geq 0}$ d'échantillons indépendants, uniformément distribués dans $[0, 1]$. On itère l'ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$ du temps $-T$ au temps 0, en partant de la configuration $\varphi^{\mathbb{Z}}$ au temps $-T$, et en utilisant toujours les échantillons $u_{k,-t}$ pour mettre à jour la cellule k au temps $-t$, à l'aide de la fonction d'actualisation h . Si pour un certain T , la configuration obtenue au temps 0 par ce procédé est telle qu'il n'y a aucun symbole φ parmi les cellules de K , alors les symboles que l'on observe sur K sont distribués selon la marginale de la distribution π sur K .

En effet, après avoir itéré l'ACP enveloppe depuis le temps $-T$, si l'on part maintenant du temps $-(T+1)$, cela peut seulement avoir pour effet de changer certains symboles φ du diagramme espace-temps par des symboles 0 ou 1 (une fois qu'un symbole 0 ou 1 apparaît en position $(k, -t)$ dans le diagramme espace-temps, il reste figé). Ainsi, la configuration observée au temps 0 peut être interprétée comme l'état au temps 0 d'un système qui serait parti du temps $-\infty$, et aurait donc atteint l'équilibre au temps 0.

Le fait que $\tilde{\Phi}^t \delta_{\varphi^{\mathbb{Z}^d}}[\varphi] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ garantit qu'il existe presque sûrement un temps T pour lequel au temps $t = 0$, il n'y a plus de symbole φ dans les cellules de K . Notons que lorsqu'on implémente cette procédure d'échantillonnage parfait, il suffit de considérer les cellules qui sont dans le *cône de dépendance* de K . Nous renvoyons à [4] pour plus de détails et pour une preuve formelle de l'exactitude de cet algorithme.

3.4 Le problème général de l'ergodicité

Comme évoqué plus haut, la proposition 2 fournit seulement une condition suffisante d'ergodicité. D'une part, il existe des exemples simples d'ACP dont on sait qu'ils sont ergodiques, mais pour lesquels l'ACP enveloppe n'est pas ergodique. C'est le cas par exemple de l'ACP de la somme bruitée.

Exercice 6. *Montrer que pour de petites valeurs de ε , l'ACP enveloppe de l'ACP de la somme bruitée (cf. Exemple 2) n'est pas ergodique.*

D'autre part, pour certains ACP, l'ACP enveloppe est ergodique, mais satisfait $p_c > p_c(\mathcal{N})$, de sorte que la Prop. 2 ne permet pas de montrer leur ergodicité. Dans la partie suivante, nous donnerons un exemple de ce cas de figure, avec l'ACP des sphères dures.

En fait, la proposition 2 permet seulement de démontrer l'ergodicité dans le régime *high-noise*, pour lequel la règle locale de l'ACP dépend relativement faiblement de la valeur du voisinage. En dehors de ce régime, l'ergodicité est souvent difficile à prouver, même lorsqu'elle semble claire par des arguments heuristiques ou des simulations. Plaçons-nous par exemple dans le cas des ACP unidimensionnels définis sur un alphabet binaire et ayant un voisinage de taille 2. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que la règle est invariante par symétrie droite-gauche, un tel ACP est caractérisé par trois paramètres. Les méthodes classiques permettent de démontrer l'ergodicité pour plus de 90% du volume du cube $[0, 1]^3$ représentant les valeurs possibles des paramètres [23, Chap. 7]. Cependant, lorsqu'on s'approche de certaines arêtes du cube, plus aucun des critères d'ergodicité connus n'est valide, bien qu'on s'attende à ce que l'ACP reste ergodique lorsque les paramètres appartiennent à l'intérieur du cube. L'article [19] regroupe différentes techniques permettant de prouver l'ergodicité d'ACP obtenus en perturbant un AC déterministe par un petit bruit aléatoire, mais en dehors de familles spécifiques d'AC (nilpotents, permutifs, planeurs, AC ayant un symbole envahissant, surjectifs, algébrique), le problème demeure largement ouvert.

4 L'ACP des sphères dures : une excursion combinatoire en percolation

Dans cette partie, nous étudions sous différents points de vue l'ACP binaire unidimensionnel de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$ qui est présenté en figure 9. Nous commençons par présenter le lien étroit entre cet ACP et le *modèle des sphères dures* en physique statistique, justifiant ainsi pourquoi nous avons choisi d'appeler cet ACP l'ACP des sphères dures. Ce modèle de mécanique statistique représente un gaz, dont les particules sont disposées sur les sommets d'un graphe, avec la contrainte deux particules ne peuvent pas se situer sur des sommets adjacents. Nous montrons ensuite que cet ACP intervient d'au moins deux manières dans des questions de percolation : sa distribution invariante est liée à la série génératrice des composantes connexes de percolation orientée, et il apparaît aussi dans l'étude d'un jeu combinatoire sur des configurations de percolation.

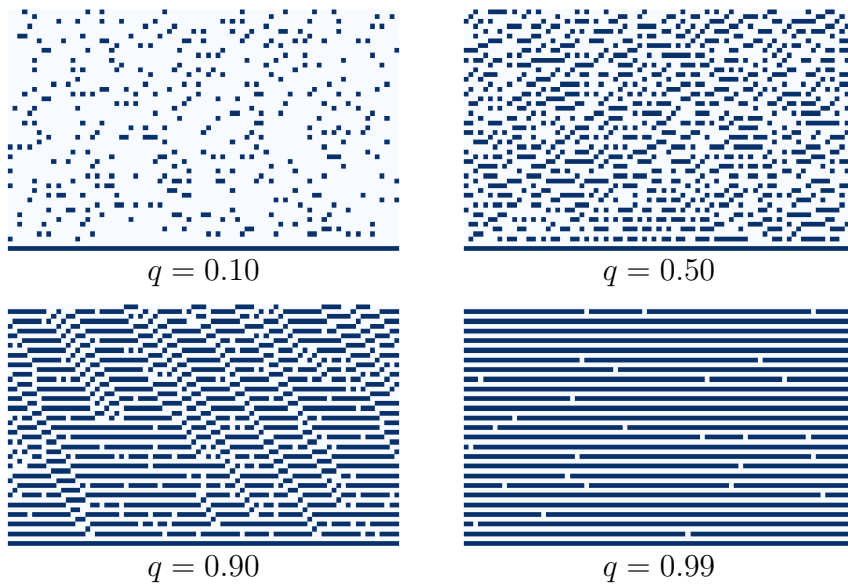
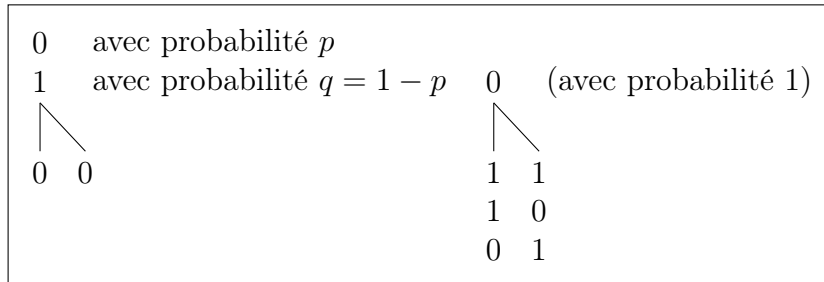


FIG. 9 – Règle locale et diagramme espace-temps de l'ACP des sphères dures (voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$), pour différentes valeurs du paramètre q , à partir de la configuration initiale $\underline{1}$ (le temps va vers le haut).

4.1 Modèle des sphères dures et mesures markoviennes invariantes

Le modèle des sphères dures. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. On dit qu'une configuration $\omega \in \{0, 1\}^V$ est une *configuration de sphères dures* (ou un *ensemble indépendant*) si pour tous $i, j \in V$ tels que $\{i, j\} \in E$, $(\omega_i, \omega_j) \neq (1, 1)$. On note \mathcal{H} l'ensemble des configurations de sphères dures. Soit $\lambda > 0$. La *mesure de sphères dures sur G d'activité λ* est la distribution de probabilités μ sur $\{0, 1\}^V$ définie par :

$$\forall \omega \in \{0, 1\}^V, \quad \mu(\omega) = \frac{\lambda^{\sum_{i \in V} \omega_i}}{Z_\lambda} \mathbf{1}_{\omega \in \mathcal{H}},$$

où Z_λ est la *constante de renormalisation* (ou *fonction de partition*), définie par :

$$Z_\lambda = \sum_{\omega \in \mathcal{H}} \lambda^{\sum_{i \in V} \omega_i}.$$

La distribution μ peut aussi être caractérisée de la manière suivante : c'est la distribution de probabilité sous laquelle les étiquettes ω_i des sommets $i \in V$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $q_\lambda = \lambda/(1 + \lambda)$, avec le conditionnement à "ne pas avoir de sommets adjacents dans l'état 1".

Pour un graphe infini G (dénombrable, et localement fini), on dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\{0, 1\}^V$ est une mesure de sphères dures sur G d'activité λ , si pour toute configuration ω de sphères dures, on a, pour tout ensemble fini $A \subset V$ et tout $\alpha \in \{0, 1\}^A$,

$$\mu(\omega_A = \alpha \mid \omega_{V \setminus A}) = \frac{\lambda^{\sum_{i \in A} \omega_i}}{Z_\lambda(\omega_{V \setminus A})} \mathbf{1}_{\forall \{i, j\} \in E, \{i, j\} \cap A \neq \emptyset \implies (\omega_i, \omega_j) \neq (1, 1)},$$

où $Z_\lambda(\omega_{V \setminus A})$ la constante de renormalisation appropriée.

Autrement dit, pour un ensemble fini A , conditionnellement à la configuration en dehors de A , la distribution sur A correspond simplement à étiqueter par un 0 les sommets de A qui sont adjacents à un sommet de $V \setminus A$ à l'état 1, et à choisir les étiquettes des autres sommets selon la mesure de sphères dures d'activité λ définie pour les graphes finis.

Des arguments classiques portant sur les mesures de Gibbs permettent de montrer qu'il existe toujours au moins une mesure vérifiant la propriété ci-dessus. Dans le cas de la grille (\mathbb{Z}^d, E_d) , on sait que pour $d = 1$, pour toute activité $\lambda > 0$, il existe une unique mesure de sphères dures, tandis qu'une *transition de phase* se produit pour $d \geq 2$: la mesure de sphères dures est unique si λ est suffisamment petit, mais pas pour de grandes valeurs de λ . En particulier, quand λ tend vers l'infini, il y a deux mesures extrémales qui se concentrent asymptotiquement sur les deux configurations correspondant à des "échiquiers" pairs ou impairs.

Mesures markoviennes invariantes. Concentrons-nous sur le cas unidimensionnel. On peut montrer que l'unique mesure de sphères dures μ d'activité λ correspond à la chaîne de Markov stationnaire de matrice de transition :

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_\lambda & x_\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\frac{p_{0,1}p_{1,0}}{p_{0,1}p_{1,0} + p_{0,0}p_{0,0}} = \frac{x_\lambda}{x_\lambda + (1 - x_\lambda)^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} = q_\lambda,$$

de sorte que :

$$x_\lambda = \frac{1 + 2\lambda - \sqrt{4\lambda + 1}}{2\lambda} = \frac{1 + q_\lambda - \sqrt{1 + 2q_\lambda - 3q_\lambda^2}}{2q_\lambda}.$$

La distribution de probabilité invariante de cette chaîne de Markov est donnée par $\rho_0 = \frac{1}{1+x_\lambda}$, $\rho_1 = \frac{x_\lambda}{1+x_\lambda}$, et si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est distribuée selon μ , alors pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$, et tout $(\omega_i)_{m \leq i \leq n} \in \{0, 1\}^{n-m+1}$, on a :

$$\mathbb{P}((X_i)_{m \leq i \leq n} = (\omega_i)_{m \leq i \leq n}) = \rho_{\omega_m} \prod_{k=m}^{n-1} p_{\omega_k, \omega_{k+1}}.$$

Considérons maintenant la sous-famille $X_{\text{pair}} = (X_{2i})_{i \in \mathbb{Z}}$ constituée par les cellules paires, et la sous-famille $X_{\text{impair}} = (X_{2i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ constituée par les cellules impaires. Alors, les familles X_{pair} et X_{impair} sont toutes les deux distribuées selon la même distribution μ_{demi} , qui correspond à la chaîne de Markov stationnaire de matrice de transition :

$$P^2 = \begin{pmatrix} (1 - x_\lambda)^2 + x_\lambda & x_\lambda(1 - x_\lambda) \\ 1 - x_\lambda & x_\lambda \end{pmatrix}.$$

De plus, comme μ est une mesure de sphères dures d'activité λ , on a la propriété suivante : si X_{pair} est distribuée selon μ_{demi} , et si on construit une suite $Y_{\text{impair}} = (Y_{2i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$, en tirant indépendamment, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, la valeur

- $Y_{2i+1} = 0$ (avec probabilité 1) si $(X_{2i}, X_{2i+2}) \neq (0, 0)$,
- $Y_{2i+1} = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } q_\lambda \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - q_\lambda \end{cases}$ si $(X_{2i}, X_{2i+2}) = (0, 0)$,

alors la famille $Z = X_{\text{pair}} \cup Y_{\text{impair}}$ (définie par $Z_i = X_i$ si i est pair, et $Z_i = Y_i$ si i est impair) est distribuée selon μ , de sorte que Y_{impair} est encore distribuée selon μ_{demi} . Cela signifie que la mesure μ_{demi} , maintenant vue comme une mesure sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, est une distribution invariante de l'ACP des sphères dures de paramètre $p = 1 - q_\lambda$, $q = q_\lambda$. En fait, cette distribution invariante est même *réversible*, au sens où si on commence par choisir X_{pair} selon μ_{demi} pour ensuite construire Y_{impair} comme indiqué ci-dessus, alors la configuration $Z = X_{\text{pair}} \cup Y_{\text{impair}}$ obtenue, qui encode les deux configurations consécutives de l'évolution de l'ACP, a la même distribution que si on avait commencé par tirer les cellules impaires selon μ_{demi} pour ensuite étiqueter les cellules paires en utilisant la règle locale de l'ACP.

4.2 Ergodicité de l'ACP des sphères dures

Dans le paragraphe ci-dessus, nous avons exhibé une distribution invariante de l'ACP des sphères dures, ayant une structure markovienne. Avec les notations de la partie 3.2, on a $p_? = 1 - p$. Par conséquent, le critère de la proposition 2 permet de montrer l'ergodicité

pour $p > 0.30$ environ, mais il ne donne aucune indication pour des valeurs plus petites de p . Dans ce cas, la comparaison avec la percolation orientée n'est effectivement pas assez fine pour prouver que les symboles $?$ s'éteignent. Et les simulations numériques peuvent laisser des doutes sur le comportement asymptotique de l'ACP pour des valeurs toutes petites de p , puisqu'à partir de la configuration $\mathbf{1}$, on observe très longtemps une alternance entre une configuration constituée d'une très grande majorité de 1, et une configuration constituée d'une très grande majorité de 0, ce qui signifie que le système n'efface pas toute information concernant la configuration initiale. Cependant, on peut démontrer la proposition suivante (nous renvoyons à [14] pour une preuve complète).

Proposition 3. *Pour tout $p \in (0, 1)$, l'ACP des sphères dures de paramètre p est ergodique, et son unique distribution invariante π est donnée par la distribution stationnaire de la chaîne de Markov de matrice de transition :*

$$M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)^2 + x & x(1-x) \\ 1-x & x \end{pmatrix},$$

avec $x = \frac{1+q-\sqrt{1+2q-3q}}{2q}$. En particulier, pour tout cylindre $[y_{\{k \leq i \leq \ell\}}] = \{z \in S^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \{k, \dots, \ell\}, z_i = y_i\}$, on a $\pi[y_{\{l \leq i \leq \ell\}}] = \rho_{y_k} \prod_{i=k}^{\ell-1} m_{y_i, y_{i+1}}$, avec $\rho_0 = \frac{1}{1+x}$, $\rho_1 = \frac{x}{1+x}$.

Nous esquissons ci-dessous deux preuves différentes de ce résultat d'ergodicité. La première repose sur le fait que π correspond à la mesure μ_{demi} , où μ est l'unique mesure de Gibbs pour le modèle des sphères dures sur \mathbb{Z} , et sur des arguments de monotonie. La seconde utilise la notion d'ACP enveloppe, introduite en partie 3, mais nécessite l'introduction d'un système de poids particulier qui joue le rôle d'une fonction de Lyapunov, pour montrer que la densité de symboles $?$ tend vers zéro.

Démonstration. Première preuve. Pour $K \subset \mathbb{Z}$, introduisons l'ordre partiel suivant sur S^K . On dit que deux configurations $x, y \in S^K$ sont telles que $x \prec_{\text{alt}} y$ si pour tout entier pair $i \in K$, $x_i \leq y_i$, et pour tout entier impair $i \in K$, $x_i \geq y_i$. Notons σ^{max} la configuration maximale de $S^{\mathbb{Z}}$ pour cette notion d'ordre (qui prend la valeur 1 aux cellules paires, et 0 aux cellules impaires), et σ^{min} la configuration minimale (prenant la valeur 0 sur les cellules paires, et 1 sur les impaires).

Considérons la dynamique sur $S^{\mathbb{Z}}$ qui consiste, aux instants pairs, à mettre à jour les cellules paires selon la règle locale de l'ACP des sphères dures, et aux instants impairs, à faire de même pour les cellules impaires. Ce processus markovien sera appelé l'ACP (des sphères dures) alterné. On peut vérifier que cette dynamique est monotone : si initialement, $\nu_1 \prec_{\text{alt}} \nu_2$ au sens de la domination stochastique, alors à tout instant t , on a $\nu_1^t \prec_{\text{alt}} \nu_2^t$, où ν_1^t (resp. ν_2^t) représente la distribution des configurations obtenues au temps t à partir de la distribution initiale ν_1 (resp. ν_2).

Soit $\Lambda_n = \{i \in \mathbb{Z} : -n \leq i \leq n\}$, et soit $\mu_{t,n}^{\text{max}}$ la distribution obtenue après avoir fait agir l'ACP alterné jusqu'au temps t sur les cellules de Λ_n , en laissant fixes les valeurs de Λ_n^c , à partir de la configuration initiale σ^{max} . De même, soit $\mu_{t,n}^{\text{min}}$ la distribution obtenue de manière analogue à partir de σ^{min} .

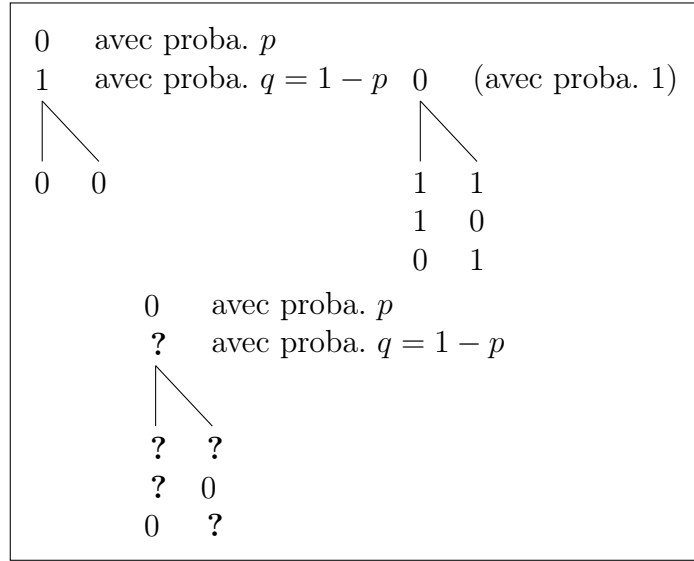


FIG. 10 – ACP enveloppe de l’ACP des sphères dures de paramètre p .

On a $\mu_{t,n}^{\max} \downarrow \mu_n^{\max}$ et $\mu_{t,n}^{\min} \uparrow \mu_n^{\min}$ quand $t \rightarrow \infty$, où μ_n^{\max} et μ_n^{\min} sont les mesures de sphères dures sur l’ensemble Λ_n , avec des conditions aux bords maximales et minimales, respectivement.

De plus, $\mu_n^{\max} \rightarrow \mu$ et $\mu_n^{\min} \rightarrow \mu$ quand $n \rightarrow \infty$, puisqu’une valeur d’adhérence de mesures de Gibbs sur les ensembles Λ_n donne une mesure de Gibbs sur \mathbb{Z} , et on sait que μ est l’unique mesure de Gibbs sur \mathbb{Z} .

Mais pour toute mesure ν sur $S^{\mathbb{Z}}$, on a $\mu_{t,n}^{\min} \prec_{\text{alt}} \nu^t \prec_{\text{alt}} \mu_{t,n}^{\max}$ pour tout t , par monotonie de l’ACP alterné. En particulier, si ν est laissée invariante par l’ACP alterné, alors $\nu^t = \nu$ pour tout t , de sorte qu’en prenant t et n suffisamment grands, on peut encadrer ν par deux mesures aussi proches de μ qu’on le souhaite. Par conséquent, $\nu = \mu$, ce qui implique que μ est l’unique distribution stationnaire de l’ACP alterné. Il en découle que μ_{demi} est l’unique distribution invariante de l’ACP des sphères dures.

Deuxième preuve. L’ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$ de l’ACP des sphères dures peut être vu comme une version bruitée de l’AC déterministe \tilde{F} sur $\tilde{S} = \{0, 1, ?\}$ obtenu en prenant $p = 0$ dans la règle représentée en figure 10, avec un bruit \tilde{R} qui remplace chaque symbole indépendamment par un 0 avec probabilité p .

Pour une configuration fixée de $\tilde{S}^{\mathbb{Z}}$, attribuons un poids aux symboles $?$, de la manière suivante :

- si un $?$ est suivi du motif 01, on lui attribue un poids 3 ;
- si un $?$ est suivi d’un 0 puis d’un autre symbole que 1, on lui attribue un poids 2 ;
- dans les autres cas, un $?$ reçoit un poids 1.

On peut démontrer que le poids ne peut que décroître sous l’action de l’AC déterministe \tilde{F} . Plus précisément, si ν est une mesure sur $\tilde{S}^{\mathbb{Z}}$, invariante par translation et par réflexion, alors $\tilde{F}\nu[?01] + \tilde{F}\nu[?0] + \tilde{F}\nu[?] \leq \nu[?01] + \nu[?0] + \nu[?]$.

Ajoutons maintenant le bruit aléatoire \tilde{R} à la dynamique, et considérons l'ACP enveloppe $\tilde{\Phi}$. Soit ν une distribution invariante de $\tilde{\Phi}$. Après quelques calculs, on peut montrer que ν doit nécessairement vérifier $\nu[?] = 0$, car sinon, on aurait $\tilde{\Phi}\nu[?01] + \tilde{\Phi}\nu[?0] + \tilde{\Phi}\nu[?] < \nu[?01] + \nu[?0] + \nu[?]$, ce qui serait en contradiction avec le fait que ν est une distribution invariante de $\tilde{\Phi}$.

Par conséquent, il n'existe pas de distribution stationnaire (et invariante par translation et par réflexion) pour laquelle le symbole $?$ apparaît avec une probabilité strictement positive. Itérons $\tilde{\Phi}$ à partir de la configuration $?^{\mathbb{Z}}$. Par un argument de couplage, la densité $\tilde{\Phi}^t \delta_{?z}[?]$ décroît avec t . Si elle ne tendait pas vers 0, on pourrait extraire une sous-suite convergente des moyennes de Cesàro de $\tilde{\Phi}^t \delta_{?z}$ pour obtenir une distribution invariante ν de $\tilde{\Phi}$ telle que $\nu[?] > 0$, ce qui n'est pas possible. Par conséquent, $\tilde{\Phi}^t \delta_{?z}[?] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, et $\tilde{\Phi}$ est ergodique. \square

Au cours de la seconde preuve, on a en fait montré l'ergodicité de l'ACP enveloppe de l'ACP des sphères dures, son unique distribution invariante étant la même que celle de l'ACP des sphères dures. En fait, l'ergodicité de l'ACP enveloppe peut aussi être vue comme une conséquence de la première preuve, grâce à la monotonie de l'ACP enveloppe par rapport à l'ordre sur les configurations induit par l'ordre sur les symboles défini par $0 \preceq ? \preceq 1$.

Chacune des preuve a des avantages et des inconvénients. La première preuve repose de manière forte sur la connexion avec le modèle des sphères dures : l'ergodicité de l'ACP est obtenue via l'unicité de la mesure de Gibbs pour le modèle des sphères dures, ce qui permet aussi d'en déduire l'expression de l'unique distribution invariante de l'ACP des sphères dures comme projection sur "une cellule sur deux" de la mesure de Gibbs. À l'inverse, la seconde preuve ne nécessite aucune connaissance sur le modèle des sphères dures, mais telle quelle, elle ne donne aucune information sur l'expression de l'unique distribution invariante de l'ACP des sphères dures. Elle a cependant un avantage important : même si le système de poids a été introduit spécifiquement pour cette règle locale, la preuve peut être étendue à une plus grande classe d'ACP, comme indiqué dans [14].

4.3 Animaux dirigés

Les animaux dirigés sont des objets combinatoires reliés aux modèles de percolation orientée. Comme l'a montré Dhar [7], sur certains graphes, l'énumération des animaux dirigés selon leur aire est équivalente à la résolution d'un modèle de sphères dures sur un autre graphe. Nous verrons que lorsque ce graphe est la grille bidimensionnelle, la série génératrice est alors étroitement liée à l'unique distribution invariante de l'ACP des sphères dures.

Animaux dirigés. Considérons le graphe orienté d'ensemble de sommets $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, et d'arêtes : $\vec{E} = \{((k, t), (k + v_i, t + 1)) : k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, v_i \in \{0, 1\}\}$. Soit B un sous-ensemble fini et non-vide de \mathbb{Z} . Un *animal dirigé de base B* est un sous-ensemble fini \mathcal{A} de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

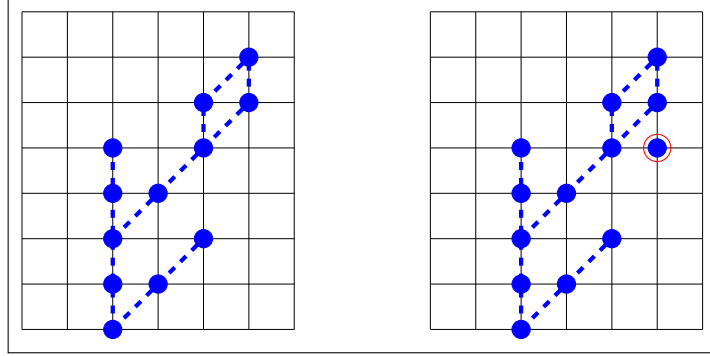


FIG. 11 – Exemple d’animal dirigé (gauche) et d’ensemble qui ne constitue pas un animal dirigé (droite).

- $\mathcal{A} \cap (\mathbb{Z} \times \{0\}) = B \times \{0\}$,
- $\forall x \in \mathcal{A}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_0 \dots, x_n \in \mathcal{A}, \begin{cases} x_0 \in B \times \{0\}, & x_n = x, \\ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, (x_i, x_{i+1}) \in \vec{E} \end{cases}$.

Un *animal dirigé* est un animal dirigé de base $\{0\}$. La figure 11 montre un exemple d’animal dirigé, et d’ensemble qui ne constitue pas un animal dirigé.

La *série génératrice* des animaux dirigés de base B (resp. des animaux dirigés) est la série formelle définie par :

$$S_B(x) = \sum_{\mathcal{A}: \text{animaux dirigés de base } B} x^{|\mathcal{A}|} \quad (\text{resp. } S(x) = S_{\{0\}}(x)).$$

Le coefficient de x^n dans $S(x)$ donne ainsi le nombre d’animaux dirigés de taille n .

En enlevant la ligne inférieure d’un animal dirigé, on obtient soit l’ensemble vide, soit un nouvel animal sur les lignes $\{1, 2, \dots\}$. Cette observation fournit une relation de récurrence sur les séries génératrices :

$$S_B(x) = x^{|B|} \left(\sum_{C \subset B + \mathcal{N}} S_C(x) \right),$$

où $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, et avec la convention $S_\emptyset(x) = 1$.

Lien avec l’ACP des sphères dures. Considérons maintenant une suite de variables aléatoires $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, et soit $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une réalisation de l’image de $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par l’ACP des sphères dures de paramètre q . Par définition de l’ACP, pour un ensemble fini $B \subset \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathbb{P}(\forall i \in B, Y_i = 1) = \mathbb{P}(\forall i \in B + \mathcal{N}, X_i = 0) q^{|B|}.$$

En utilisant le principe d’inclusion-exclusion, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(\forall i \in B + \mathcal{N}, X_i = 0) = \sum_{C \subset B + \mathcal{N}} (-1)^{|C|} \mathbb{P}(\forall i \in C, X_i = 1)$$

Supposons que X est distribuée selon une distribution invariante π de l'ACP, et pour un sous-ensemble $C \subset \mathbb{Z}$, écrivons $T_C = \pi(\{\omega \in S^{\mathbb{Z}} : \forall i \in C, \omega_i = 1\})$. Alors, Y est aussi distribuée selon π , de sorte que :

$$T_B = q^{|B|} \sum_{C \subset B+\mathbb{N}} (-1)^{|C|} T_C.$$

Par conséquent, la famille $(-1)^{|B|} T_B$, indexée par les sous-ensembles finis B de \mathbb{Z} , vérifie les mêmes relations que la famille $S_B(-q)$. On obtient ainsi une relation inattendue entre ces deux modèles. De plus, comme μ_{demi} est une distribution invariante de l'ACP des sphères dures, elle permet de suggérer une expression pour les séries génératrices des animaux dirigés. La dernière étape consiste à démontrer que les séries génératrices sont effectivement données par :

$$S_B(-q) = (-1)^{|B|} \mu_{\text{demi}}(\{\omega \in S^{\mathbb{Z}} : \forall i \in B, \omega_i = 1\}).$$

Cela nécessite un argument supplémentaire, car le système d'équations pourrait avoir plusieurs familles de solution, dont une seule correspondrait aux séries génératrices des animaux dirigés. Une idée consiste à reprendre le problème dans l'autre sens : à partir des séries génératrices, on peut définir une distribution de probabilité π , et montrer qu'il s'agit d'une distribution invariante de l'ACP, qui est donc égale à μ_{demi} .

En particulier, on a :

$$S(-q) = -\mu_{\text{demi}}(\{\omega \in S^{\mathbb{Z}} : \omega_0 = 1\}) = \rho_1 = \frac{x}{1+x},$$

où

$$x = \frac{1+q - \sqrt{1+2q-3q^2}}{2q}.$$

Après quelques calculs, on peut en déduire la formule suivante :

$$S(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-2q-3q^2}}{1-3q} - 1 \right).$$

Ce résultat a été démontré de différentes manières, mais pour la plupart, les preuves reposent sur ce lien avec l'ACP des sphères dures. C'est en particulier le cas de la première preuve due à Dhar [7], et pour plus de détails et des généralisations, nous renvoyons à [2, 17] et aux références que contiennent ces deux articles.

4.4 Un jeu sur la percolation

Nous allons maintenant montrer que l'ACP des sphères dures intervient dans l'étude d'un jeu combinatoire sur des configurations de percolation.

Pour chaque cellule de la grille \mathbb{Z}^2 , on décide indépendamment qu'il s'agit d'un *piège* avec probabilité p , et d'une cellule *ouverte* avec probabilité $1-p$, où $p \in [0, 1]$. On considère alors le jeu suivant : un jeton est initialement posé à l'origine de la grille, et deux joueurs

déplacent chacun à leur tour ce jeton, le seul mouvement autorisé consistant à déplacer le jeton de sa position x à la position $x + (0, 1)$ ou $x + (1, 0)$. Si un joueur déplace le jeton sur un piège, il perd immédiatement la partie. Sinon, c'est-à-dire si la nouvelle cellule sur laquelle est posée le jeton est ouverte, la partie continue et c'est à l'autre joueur de jouer. La disposition des pièges et des cellules ouvertes sur \mathbb{Z}^2 (que nous appelons la *configuration de percolation*) est connue des deux joueurs dès le début du jeu et ne change pas. Nous appellerons ce jeu le *jeu de percolation* sur \mathbb{Z}^2 .

Si $p > 1 - p_c(\mathcal{N})$, où $p_c(\mathcal{N})$ est la valeur critique pour la percolation orientée par sites de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, alors presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini de cellules qui peuvent être atteintes depuis l'origine en suivant un chemin orienté de cellules ouvertes. Par conséquent, le jeu se termine en temps fini. En particulier, l'un ou l'autre des deux joueurs a nécessairement une stratégie gagnante, où on appelle *stratégie* une fonction qui attribue à chaque cellule un mouvement autorisé (quand il en existe), et *stratégie gagnante* une stratégie qui permet au joueur en question de gagner, quelle que soit la stratégie adoptée par l'autre joueur.

Supposons maintenant que $p < 1 - p_c(\mathcal{N})$. La probabilité qu'aucun des joueurs n'ait une stratégie gagnante est-elle strictement positive? Dans ce cas, on dira que la partie est *nulle*, l'interprétation étant que si les deux joueurs jouent au mieux, elle ne se terminera jamais. Observons que pour $p = 0$, une partie est clairement toujours nulle.

Comme on le verra, l'issue du jeu (existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur ou le second joueur, ou partie nulle) à partir du moment où le jeton est posé sur une certaine cellule peut être interprétée à l'aide de l'évolution de l'ACP des sphères dures. Plus précisément, l'état de l'ACP à un instant donné correspondra à l'issue du jeu lorsque le jeton est disposé sur les cellules d'une certaine diagonale Nord-Ouest / Sud-Est de \mathbb{Z}^2 . En utilisant l'ergodicité de l'ACP des sphères dures, on peut alors démontrer que pour tout $p > 0$, la probabilité que la partie soit nulle vaut 0. De plus, la description markovienne de la distribution invariante permet d'avoir une description explicite de la distribution des issues du jeu le long d'une diagonale.

Théorème 3. *Pour tout $p \in (0, 1)$, il n'y a presque sûrement pas de partie nulle, et la probabilité que ce soit le premier joueur qui ait une stratégie gagnante (conditionnellement au fait que l'origine est une cellule ouverte), vaut :*

$$\frac{1 - 2p + \sqrt{\frac{p}{4-3p}}}{2(1-p)}. \quad (2)$$

Une représentation graphique de la valeur de cette probabilité en fonction de p est représentée en figure 12. La probabilité est plus grande que $1/2$ (avantage au premier joueur) si et seulement si $p \in (0, 1/3)$, et sa valeur maximale est $4 - 2\sqrt{3} = 0.5358\dots$, valeur atteinte pour $p = (2 - \sqrt{3})/3 = 0.0893\dots$

Démonstration. Supposons que la cellule x est une cellule ouverte de \mathbb{Z}^2 . On définit $\eta(x)$ comme prenant la valeur G, P ou N, selon si une partie démarrée avec le jeton posé sur la

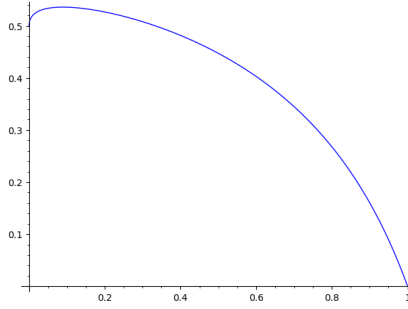


FIG. 12 – Probabilité que le premier joueur gagne le jeu de percolation, conditionnellement au fait que l’origine est ouverte, en fonction de la densité p de pièges.

cellule x est gagnante pour le premier joueur, perdante pour le premier joueur, ou une partie nulle respectivement (rappelons que les deux joueurs ont connaissance de la configuration entière et sont supposés jouer au mieux). Si la cellule x est un piège, il sera pratique pour la suite de poser $\eta(x) = G$ (on peut adopter la convention que si le jeu démarre sur un piège, alors c’est le premier joueur qui gagne).

Posons $\text{Ext}(x) = \{x + e_1, x + e_2\}$, ensemble qui représente l’ensemble des cellules vers lesquelles on peut déplacer le jeton, à partir de la cellule x . En considérant le premier mouvement, on obtient la relation suivante pour les statuts des cellules :

$$\begin{aligned}
 x \text{ est un piège} &\Rightarrow \eta(x) = G, \\
 x \text{ est ouverte} &\Rightarrow \eta(x) = \begin{cases} P & \text{si } \eta(y) = G \text{ pour tout } y \in \text{Ext}(x), \\ G & \text{si } \eta(y) = P \text{ pour au moins un } y \in \text{Ext}(x), \\ N & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons S_k l’ensemble $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 = k\}$, qui représente une diagonale Nord-Ouest / Sud-Est de \mathbb{Z}^2 . La relation (3) fournit les valeurs de $(\eta(x))_{x \in S_k}$ en fonction des valeurs de $(\eta(x))_{x \in S_{k+1}}$ et de l’information concernant les cellules de S_k qui sont des pièges.

Grâce à cette relation, on peut considérer les configurations successives des diagonales S_k , quand k décroît, comme les états successifs d’un ACP unidimensionnel. Introduisons le recodage suivant :

$$G = 0, \quad P = 1, \quad N = ?.$$

On peut alors vérifier que l’ACP est régit de la manière suivante : connaissant les valeurs des cellules de S_{k+1} , les valeurs de $\eta(x)$, pour $x \in S_k$, s’obtiennent à l’aide de $\eta(x + e_1)$ et $\eta(x + e_2)$, en appliquant une règle locale qui est exactement la même que celle de l’ACP enveloppe de l’ACP des sphères dures, représenté en figure 10.

Fixons un entier $N \geq 0$, et supposons que sur S_N , la configuration η est telle que $\forall x \in S_N, \eta(x) = ?$. Alors, si on itère l’ACP à partir de cette configuration, depuis la diagonale S_N jusqu’à S_0 , la probabilité que l’origine $O = (0, 0)$ soit dans l’état 0 (resp. 1) peut être

interprétée comme la probabilité que le premier joueur (resp. le second) ait une stratégie lui permettant de gagner en moins de N mouvements. En particulier, si la probabilité que l'origine soit dans l'état γ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, cela signifie que presque sûrement, la partie n'est pas nulle. Mais comme on l'a montré en partie 4.2, à partir de la configuration $\delta_{\gamma z}$, la densité de symboles γ tend vers 0. Cela permet de montrer qu'il n'y a pas de partie nulle, et comme on sait décrire l'unique distribution de probabilité invariante de l'ACP des sphères dures, on peut aussi en déduire l'expression de la probabilité que ce soit le premier joueur qui ait une stratégie gagnante. \square

Références

- [1] Vladimir Belitsky and Pablo A. Ferrari. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes. *J. Stat. Phys.*, 118(3-4) :589–623, 2005.
- [2] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. In *Proceedings of the 7th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Noisy-le-Grand, 1995)*, volume 180, pages 73–106, 1998.
- [3] A. Bušić, N. Fatès, J. Mairesse, and I. Marcovici. Density classification on infinite lattices and trees. *Electronic Journal of Probability*, 18 :no. 51, 22, 2013.
- [4] A. Bušić, J. Mairesse, and I. Marcovici. Probabilistic cellular automata, invariant measures, and perfect sampling. *Adv. in Appl. Probab.*, 45(4) :960–980, 2013.
- [5] Mathieu S. Capcarrere, Moshe Sipper, and Marco Tomassini. Two-state, $r = 1$ cellular automaton that classifies density. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4969–4971, Dec 1996.
- [6] P. Chassaing and J. Mairesse. A non-ergodic probabilistic cellular automaton with a unique invariant measure. *Stochastic Process. Appl.*, 121(11) :2474–2487, 2011.
- [7] D. Dhar. Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51(10) :853–856, 1983.
- [8] P. A. Ferrari. Ergodicity for a class of probabilistic cellular automata. *Rev. Mat. Apl.*, 12(2) :93–102, 1991.
- [9] P. Gács. A Toom rule that increases the thickness of sets. *Journal of Statistical Physics*, 59(1-2) :171–193, 1990.
- [10] P. Gács. Reliable Cellular Automata with Self-Organization. *Journal of Statistical Physics*, 103(1) :45–267, April 2001.
- [11] J. Gravner and A. E. Holroyd. Slow convergence in bootstrap percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 18(3) :909–928, 2008.
- [12] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [13] A. E. Holroyd. Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 125(2) :195–224, 2003.

- [14] Alexander E. Holroyd, Irène Marcovici, and James B. Martin. Percolation games, probabilistic cellular automata, and the hard-core model. *Probab. Theory Related Fields*, 174(3-4) :1187–1217, 2019.
- [15] J. Kari. Theory of cellular automata : A survey. *Theoretical Computer Science*, 334 :3–33, 2005.
- [16] P. Kůrka. *Topological and Symbolic Dynamics*, volume 11 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, 2003.
- [17] Y. Le Borgne and J. F. Marckert. Directed animals and gas models revisited. *Electron. J. Combin.*, 14(1) :Research Paper 71, 36, 2007.
- [18] J. Mairesse and I. Marcovici. Around probabilistic cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 559 :42–72, 2014.
- [19] Irène Marcovici, Mathieu Sablik, and Siamak Taati. Ergodicity of some classes of cellular automata subject to noise. *Electron. J. Probab.*, 24 :Paper No. 41, 44, 2019.
- [20] R. H. Schonmann. On the behavior of some cellular automata related to bootstrap percolation. *The Annals of Probability*, 20(1) :174–193, 1992.
- [21] A. L. Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. In *Multi-component Random Systems*, volume 6 of *Adv. Probab. Related Topics*, pages 549–575. Dekker, New York, 1980.
- [22] A. L. Toom. *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares*. Publicações Matemáticas Do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.
- [23] A. L. Toom, N. B. Vasilyev, O. N. Stavskaya, L. G. Mityushin, G. L. Kuryumov, and S. A. Pirogov. Discrete local Markov systems. In R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, and A. L. Toom, editors, *Stochastic cellular systems : ergodicity, memory, morphogenesis*. Manchester University Press, 1990.
- [24] A.C.D. van Enter. Proof of Straley’s argument for bootstrap percolation. *Journal of Statistical Physics*, 48(3-4) :943–945, 1987.