

Journées ALEA au CIRM (Luminy)
(Du 22 au 26 Mars 2010)

Le Processus d'exclusion

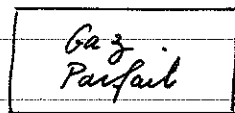
But de ce cours: présenter des méthodes qui permettent d'obtenir des résultats exacts sur un système "modèle" de la Physique Statistique hors d'équilibre, le processus d'exclusion asymétrique (ASEP).

Modèle de particules en interaction: localisée ("œur dur") c'est le potentiel le plus simple auquel on puisse penser \rightarrow corrélations. Un vrai "problème à N CORPS"

Système dynamique stochastique: évolution Markovienne. Aspect probabiliste et combinatoire.

Quel est le problème physique?

1. Système en équilibre avec un thermostat à température T:



Décut par la THERMODYNAMIQUE (macroscopique) XIX^e Siècle
FONDATEURS: Mécanique STATISTIQUE XIX-XX^e

Il faut faire la combinatoire des états microscopiques sous-jacents à un état macroscopique donné (perte d'information / coarse-graining) ^{configurations} "épissage"

Bilan: • A notre échelle, un petit nombre de paramètres suffisent à décrire un système ($\approx 10^{23}$ atomes): VARIABLES d'ÉTAT
• l'équilibre est caractérisé comme "optimum" d'une fonction d'ÉTAT (Entropie, Energie libre) à choisir en fonction des contraintes (extrema liés \rightarrow transf. de Legendre)

• CONNEXION microscopique/macroscopique:

$$S(E, V) = k_B \log \Omega(E, V) \quad k_B = 1.38 \times 10^{-23}$$

ou

$$S = \sum_{\mathcal{C}} p(\mathcal{C}) \log p(\mathcal{C})$$

Pour un système thermostaté: $p(\mathcal{C}) = \frac{e^{-E(\mathcal{C})/kT}}{Z}$ ^{énergie} ^{température}

Mesure de GIBBS.

Z

le facteur de normalisation $Z = \sum_{\epsilon} e^{-\beta E(\epsilon)}$

Cours 1 (2)

Z fonction de partition = fonction génératrice E $\underbrace{\Omega(E, V)}_{\substack{\# \text{ d'états d'énergie} \\ E \text{ donnée.}}} e^{-\beta E}$ $\beta = \frac{1}{k_B T}$

A l'équilibre: une mesure microscopique est donnée
cette mesure les observables physiques sont des moyennes !
Les grandeurs thermodynamiques sont des moyennes.
la mécanique statistique prévoit des écarts / aux moyennes.

Exercices: 1. N particules indépendantes dans une boîte
 $E = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N v_i^2$; Calculer Z , $\Omega(E)$

2. N oscillateurs harmoniques (quantiques)

pour chacun: $E_i = \hbar \nu (n_i + \frac{1}{2})$ $n_i \in \mathbb{N}$

$$E_N = \sum_{i=1}^N E_i$$

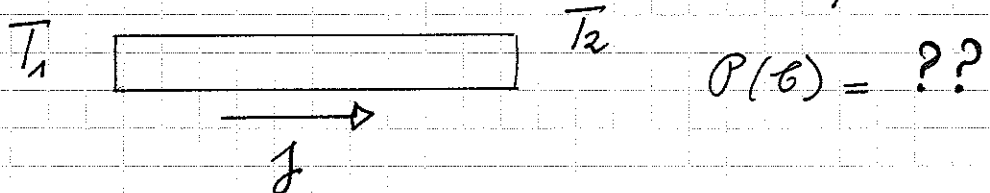
Que vaut Z_N ? Pouvez identifier la double fonction
génératrice $Z(\mu, \beta) = \sum_N \mu^N Z_N(\beta)$?

Un fait important: Dans un système à l'équilibre thermod.
il n'y a PAS de courants i.e. pas de transport de matière, de
charge, d'énergie, de quantité de mouvement, de spin, d'étrangeté...

Dès que l'on considère un système avec 1 ou plusieurs
courants, on est HORS D'ÉQUILIBRE.

la thermodynamique classique ne s'applique plus.
la Méca. Stat. à l'heure actuelle ne dispose d'aucune
théorie générale

- ~> quelles sont les variables "d'état" pertinentes?
- ~> quelles sont les fonctions d'utilité à optimiser?
- ~> quelle est la mesure microscopique?



RECOURS à des MODÈLES

Asymétrique Simple Exclusion Process (ASEP):



Asymétrique \rightarrow un biais dans les taux de sauts : FORÇAGE d'un courant global

Simple \rightarrow sauts de portée 1.

Exclusion \rightarrow au plus 1 particule par site : interaction avec dur

Process \rightarrow Processus de Markov.

ETAT LOCAL d'un site $\tau_i = \begin{cases} 0 & \text{vide} \\ 1 & \text{occupé} \end{cases}$ variable binaire

Une (micro)-configuration \mathcal{C} : spécifiée par les $\{\tau_i\}$

Il faut se donner des conditions aux bords $\begin{cases} \rightarrow \text{dents infinies} \\ \rightarrow \text{périodique} \\ \rightarrow \text{segment ouvert avec réservoirs} \end{cases}$

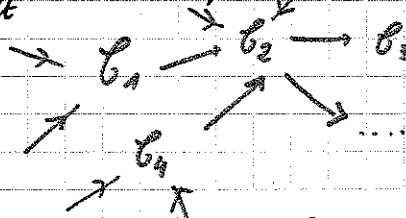
Une particule au site n°i $\begin{cases} \text{saute avec proba } p dt \text{ vers } (i+1) \text{ si } \tau_{i+1} = 0 \\ \text{saute avec proba } q dt \text{ vers } (i-1) \text{ si } \tau_{i-1} = 0 \\ \text{reste en } i \text{ avec proba } 1 - (p+q) dt \end{cases}$

Remarque : on normalise les taux souvent pour avoir $p+q=1$

Entre t et $t+dt$, $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$: ÉVOLUTION dans l'espace des configurations. CODAGE dans une matrice de MARKOV:

$\mathcal{C} \xrightarrow[t+dt]{} \mathcal{C}'$ avec proba $M(\mathcal{C}', \mathcal{C}) dt \equiv M_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} dt$

GRAPHE:



la probabilité de rester en \mathcal{C} entre t et $t+dt$:

$$1 - \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} M_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} dt$$

on pose par définition : $M(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = - \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} M(\mathcal{C}', \mathcal{C})$

on met tous ces taux dans une matrice

matrice de MARKOV
SOMME de chaque COLONNE = 0.

$$M = \begin{matrix} & \mathcal{C} & \rightarrow & \begin{pmatrix} \downarrow \mathcal{C}' \\ M(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1) \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

taux de proba pour aller de $\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$

À $t=0$, on démarre avec une configuration \mathcal{C}_0

Posons $P_t(\mathcal{C} / \mathcal{C}_0) =$ proba. d'être en \mathcal{C} à la date t sachant que l'on était en \mathcal{C}_0 à $t=0$

Equation d'EVOLUTION

↳ "BILAN" ↗

$$\frac{dP_t(c/b_0)}{dt} = \sum_{c' \neq c} M(c, c') P_t(c'/b_0) - \sum_{c' \neq c} M(c', c) P_t(c/b_0) \quad \text{Course } (4)$$

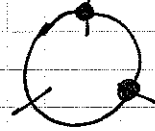
Soit MATRICIELLEMENT:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M \cdot P}$$

Exercice: (i) Montrez que $\sum_c P_t(c/b_0) = \text{CONSTANTE} = 1 \quad \forall t$

(ii) CONSTRUIRE M pour

$$c_1 = (1, 1, 0) \quad c_2 = (1, 0, 1) \quad c_3 = (0, 1, 1)$$



$L = 3$
 $N = 2$

$$M: \begin{pmatrix} -(p+q) & q & p \\ p & -(p+q) & q \\ q & p & -(p+q) \end{pmatrix}$$

Noyau de M ?

→ Faire la même chose pour $N=2$ $L=4$ 6 configurations.

→ Comment vous feriez pour L et N quelconques?

Quelques faits "élémentaires":

• Le noyau de M est un état STATIONNAIRE.

On peut montrer (Perron-Frobenius) que $\text{Ker } M$ de dimension 1

• Système périodique: $\text{Ker } M$ est engendré par le vecteur uniforme

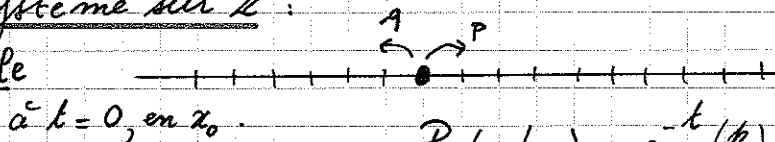
$$\boxed{P_{\text{stat}}(c) = \frac{1}{\binom{L}{N}}}$$

Preuve: EXERCICE.

(un exemple de mesure microscopique pour un système hors d'équilibre)

• système sur \mathbb{Z} :

Particule toute seule



à $t=0$, en x_0 .

$$P_t(x/x_0) = e^{-t \left(\frac{p}{q}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2t\sqrt{pq}}} \quad \text{TSVP}$$

Position moyenne: $\langle x_t \rangle = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x P_t(x/x_0) = x_0 + (p-q)t$

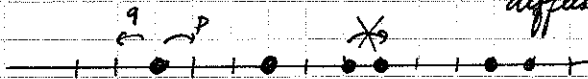
Fluctuations:

$$\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2 = (p+q)t \equiv t$$

diffusion

$$X_{t+dt} = X_t + E_t \quad \begin{matrix} \uparrow \text{1 part} \\ \uparrow \text{2-1 part} \\ \downarrow \text{0-1 part} \end{matrix}$$

système de particules



$P_t(c/b_0)$ pas de formule générale (à ma connaissance)

POSITION MOYENNE?
FLUCTUATIONS?

} dépend de la condition initiale
ou plus généralement de la
MESURE INITIALE

$$P_t(x/x_0) = pP_t(x-1) + qP_t(x+1) - P_t(x)$$

$$\langle z^x \rangle_t = F_t(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} z^x P_t(x/x_0) \text{ et } F_0(z) = z^{x_0}$$

$$\dot{F}_t = \left(pz + \frac{q}{z} - 1\right) F_t$$

$$F_t(z) = e^{-t} z^{x_0} e^{t\left(pz + \frac{q}{z}\right)}$$

$$e^{(x + \frac{1}{x})t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n I_n(t)$$

par def: $I_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2p}}{p!(n+p)!}$

Ainsi

$$P_t(x/x_0) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{x-x_0}{2}} e^{-t} I_{x-x_0}(\sqrt{pq}t)$$

Bessel imaginaire

on a directement:

$$\langle X_t \rangle = \frac{d}{dt} \langle z^x \rangle \Big|_{z=1} = x_0 + t(p-q) \checkmark$$

$$\langle X_t(X_t-1) \rangle = x_0(x_0-1) + 2x_0(p-q)t + (p-q)^2 t^2 + 2qt$$

$$\langle X_t^2 \rangle = x_0^2 + t(p+q) + 2x_0(p-q)t + (p-q)^2 t^2$$

$$= (p+q)t + \langle X_t \rangle^2 \checkmark$$

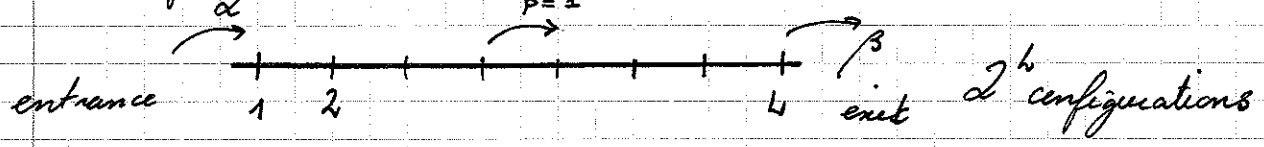
γ_i^i : mesure de Bernoulli sur un site $\left\{ \begin{array}{l} \text{OCCUPÉ avec proba } p \\ \text{VIDE avec } 1-p \end{array} \right.$ densité moyenne $\langle \tau_i(t=0) \rangle = p$ (Cours 1) (5)

Mesure initiale: $\otimes \gamma_i^i$ on peut montrer qu'elle est invariante par la dynamique

on moyenne par rapport à cette mesure: ici inutile égalité vraie
 Position moyenne d'une particule marquée: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle X_t \rangle}{t} = (p-q)(1-p)$ VOLUME EXCLUS

Fluctuations: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle X_t^2 \rangle - \langle X_t \rangle^2}{t} = (p-q)(1-p) > 0$ pour $p \neq q$
 BUT FOR $p=q=\frac{1}{2}$: $\langle X_t^2 \rangle \approx \frac{2(1-p)}{p} \left(\frac{pt}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$

En Physique: SYSTÈMES GRANDS mais finis, on s'intéresse aux ANOMALOUS DIFFUSION
 "effets de taille finie" (SCALINGS p. ex. comment $D(L)$?)



{ For simplicity sake: consider only the TASEP case (yet) }
 on cherche le noyau de la matrice de Markov $2^L \times 2^L$

La mesure microscopique N'EST PAS uniforme: solution D.E.H.P. '93

OBSERVATIONS EMPIRIQUES: $\alpha = \beta = 1$ $p=1, q=0$

Des entiers simples! la plus petite proba divise les autres (quantum).

<u>L=1</u>	
0	1
1	1
Total:	2
<u>L=2</u>	
00	1
01	1
10	2
11	1
Total:	5
<u>L=3</u>	
000	1
001	1
010	2
011	1
100	3
101	2
110	3
111	1
Total:	14

<u>L=4</u>	
0000	1
0001	1
0010	2
0011	1
0100	3
0101	2
0110	3
0111	1
1000	4
1001	3
1010	5
1011	2
1100	6
1101	3
1110	4
1111	1
total:	42

- remarques:
- * ajouter un 0 à gauche \rightarrow idem
 - * ajouter un 1 à droite \rightarrow idem
 - * les dénominateurs: CATALANS!
 - * "Règle d'or":

$\dots\dots 10 \dots\dots \equiv \dots\dots 1 \dots\dots + \dots\dots 0 \dots\dots$

\rightarrow Assez d'information pour calculer tous les Poids

Fluctuations d'un traceur dans ASEP ($p > q$):

- De Masi et Ferrari: 1985 Self-Diffusion in a 1d lattice gas JSTAT PHYS
38, p603-613
- KIPNIS, 1986 Central limit Thms for infinite series of queues...
ANN. PROB. 14 p 397-408
- Saada 1987 Ann Prob 15 p375-381
1990 Annals de l'IH P 26 5-18
- Dair, Goldstein, Lebowitz 1985 Asympt of particle... Comm Pure Appl. Math 38
1986 Self-diffusion in a non uniform model
p573-597
PRL 57 p 2491-2494

Il y a des corrélations / les probabilités ne sont pas factorisées $P(010) \neq p_0 p_1 p_0 \leftarrow$ scalaires.

CODER les RÉCURRENCES par une algèbre :

0 \rightarrow E
1 \rightarrow D
Scalaires Opérateurs

$$P(\ell) = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{i=1}^L (\alpha_i D + (1-\alpha_i) E) | V \rangle$$

D, E opérateurs $|V\rangle$ vecteur, $\langle W|$ co-vecteur

$$DE = D + E$$

$$D|V\rangle = \frac{1}{\beta} |V\rangle$$

$$\langle W|E = \frac{1}{\alpha} \langle W|$$

cas général \rightarrow DÉFORMATION de l'algèbre quadratique

$$pDE - qED = D + E$$

$$(\beta D - \alpha E)|V\rangle = |V\rangle$$

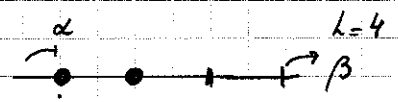
$$\langle W|(\alpha E - \gamma D) = \langle W|$$

traduit exactement les récurrences empiriques

Mesure stationnaire \rightarrow une trace sur l'algèbre quadratique s'impose.

Quelques calculs explicites - Diagramme de Phase :

1. Esquisse d'un preuve : (mécanisme)



1100 : $1. p(1100) \stackrel{?}{=} \alpha p(0100) + \beta p(1101)$

$$\alpha \langle W|E D E E|V\rangle + \beta \langle W|D D E D|V\rangle - \langle W|D D E E|V\rangle = 0$$

le cas général fonctionne pareil (exercice: \rightarrow 4 cas à distinguer)

2. l'algèbre existe (représentations explicites):

• TASEP : exercice: si Det E de dimension finie alors elles commutent

Poser $D = 1 + \delta$ $E = 1 + \epsilon$ $\delta \epsilon = 1$

\rightarrow dimension finie commutation nécessaire, mézator: TOUS LES POIDS SONT ÉGAUX

$$\langle W|DE|V\rangle = \langle W|(D+E)|V\rangle = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \langle W|V\rangle$$

et si commutation $= \langle W|ED|V\rangle = \frac{\langle W|V\rangle}{\alpha\beta}$

Cela implique $\alpha + \beta = 1$ $D = \frac{1}{\beta}$ et $E = \frac{1}{\alpha}$ POIDS: $(\alpha\beta)^L \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta}$

\rightarrow dès que $\alpha + \beta \neq 1$ il faut une représentation de dimension infinie

Typiquement δ et ϵ sont des SHIFTS sur $\mathcal{L}(\mathbb{N})$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$|V\rangle = K \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\beta}{\beta} \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\langle W| = K \left(1, \frac{1-\alpha}{\alpha}, \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2, \dots \right)$$

K tel que $\langle W|V\rangle = 1$ donc $K = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha\beta}}$

• Partially asymmetric case (PASEP)

$$D = \frac{1+\delta}{p-q} \quad E = \frac{1+\epsilon}{p-q}$$

$$\delta E - \epsilon E \delta = 1 - x \quad \text{avec } x = \frac{q}{p}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x} & & & \\ 0 & 0 & \sqrt{1-x^2} & & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-x^3} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \epsilon = \delta$$

3. Quelques calculs explicites (TASEP): DIAGRAMME de PHASE.

Normalisation: $Z_L = \langle W | C^L | V \rangle$ avec $C = D + E$

Profil de densité: $S_i = \langle \tau_i \rangle = \frac{\langle W | C^{i-1} D C^{L-i} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle}$

Courant: $J = \langle \tau_i (1 - \tau_{i+1}) \rangle = \frac{\langle W | C^{i-1} D E C^{L-i-1} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle} = \frac{\langle W | C^{L-1} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle}$

on remarque: dans l'état stationnaire le courant est uniforme

$$J = \frac{\langle W | C^{L-1} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle} = \frac{Z_{L-1}}{Z_L}$$

RA] $J =$ courant d'entrée $= \alpha \langle 1 - \tau_1 \rangle$

$J =$ courant de sortie $= \beta \langle \tau_L \rangle$

Comment calculer ces quantités? $\left\{ \begin{array}{l} \text{avec l'algèbre (ré-ordonner).} \\ \text{avec une représentation explicite.} \\ \text{avec des fonctions génératrices.} \end{array} \right.$

Soit U un produit quelconque de D et de E ; on peut toujours ré-ordonner sous la forme: $U = \sum_{n,m} a_{nm} E^n D^m$ et alors

$$\langle W | U | V \rangle = \sum_{n,m} a_{nm} \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{\beta^m} \langle W | V \rangle \quad \text{il s'agit donc de trouver les coeff } a_{nm} \text{ dans la base de PBW}$$

la quantité de base à calculer c'est la normalisation $Z_L \xleftrightarrow{i.e.} U = C^L$

empiriquement:

$$C = D + E$$

$$C^2 = D^2 + ED + E^2 + D + E$$

$$C^3 = D^3 + ED^2 + E^2D + E^3 + 2(D^2 + ED + E^2) + 2(D + E) \text{ etc...}$$

on devine la structure: $C^N = \sum_{p=0}^N B_{N,p} (D^p + ED^{p-1} + E^2D^{p-2} + \dots + E^p)$

Ce qui donne: il faut remarquer que les polynômes du type $Q_p = D^p + ED^{p-1} + E^2D^{p-2} + \dots + E^p$ sont FERMÉS par multiplication par DE

$$DE Q_p = \underbrace{(D+E) Q_p}_{= E+D} = \underbrace{(ED^p + \dots + E^{p+1})}_{= EQ_p} + \underbrace{D^{p+1}}_{= DQ_p} + \underbrace{DE(D^{p-1} + ED^{p-2} + \dots + E^p)}_{= DQ_p}$$

$$\text{ainsi: } DE Q_p = Q_{p+1} + DE Q_{p-1}$$

$$i.e. \quad \underline{C Q_p = Q_{p+1} + C Q_{p-1}}$$

$$Q_0 = 1 \\ Q_1 = C$$

$$\text{donc } C Q_p = Q_{p+1} + Q_p + Q_{p-1} + \dots + Q_1$$

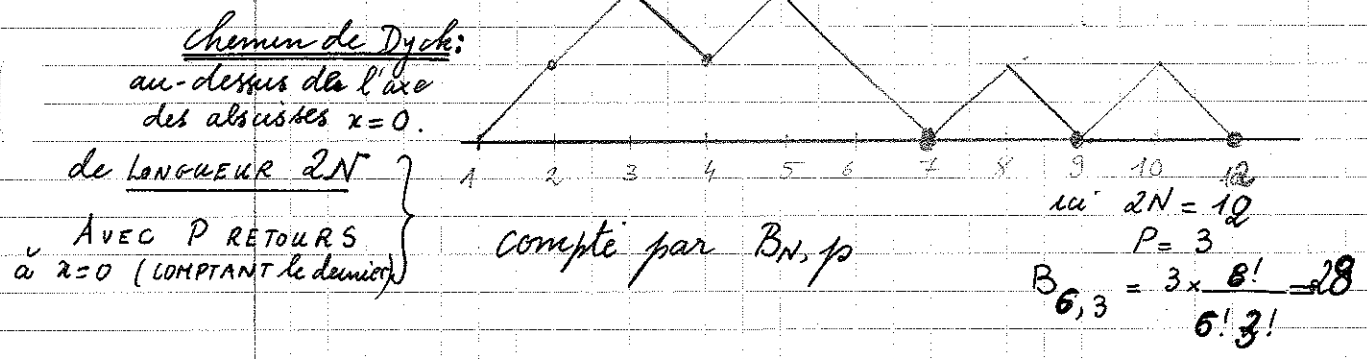
$$B_{N+1, p+1} = B_{N, p} + (B_{N, p+1} + B_{N, p+2} + \dots + B_{N, N})$$

i.e. $B_{N+1, p+1} = B_{N, p} + B_{N+1, p+2}$ $B_{N, p}$ défini pour $0 \leq p \leq N$

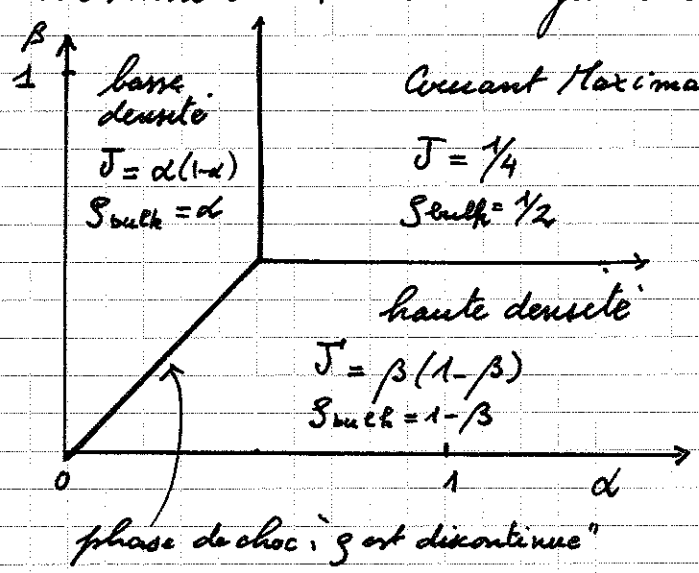
BALLOT NUMBERS:
$$B_{N, p} = \frac{p(2N-1-p)!}{N!(N-p)!}$$

$$Z_h = \sum_{p=0}^h \frac{p(2h-1-p)!}{h!(h-p)!} \left(\sum_{q=0}^p \frac{1}{\alpha^q} \frac{1}{\beta^{p-q}} \right)$$

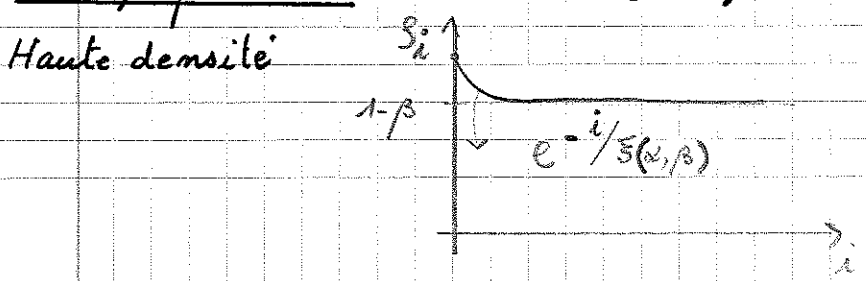
Remarque: Lien avec les chemins de Dyck



on s'intéresse à la limite $h \rightarrow \infty$: 3 régimes en fonction de α et β

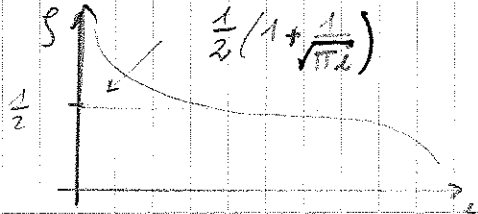


Aspect du profil de densité: $([1, h] \rightarrow [0, 1])$
 $i \mapsto S_i$



$\xi(\alpha, \beta)$ longueur de correlation.

phase de courant maximal:



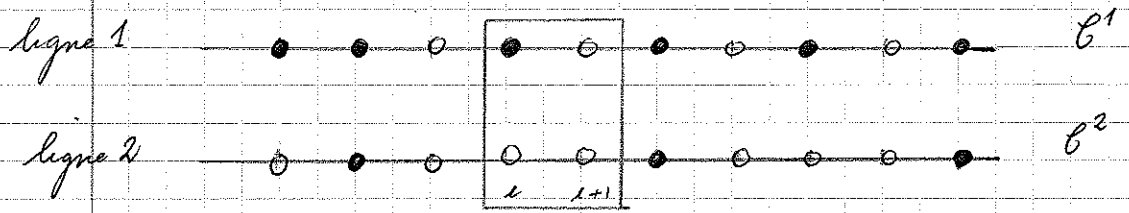
ligne de choc: un PROFIL MOYEN linéaire $\rho_i = \alpha + \frac{1}{h} (1 - \beta - \alpha)$
 en réalité: SUPERPOSITION de marches α $1-\beta$

→ Un système hors d'équilibre à une dimension qui présente des changements de phase

Remarque: PASEP a un diagramme de phase semblable: seules les valeurs critiques diffèrent

Généralisation: MODÈLE D'EXCLUSION à N types de particules

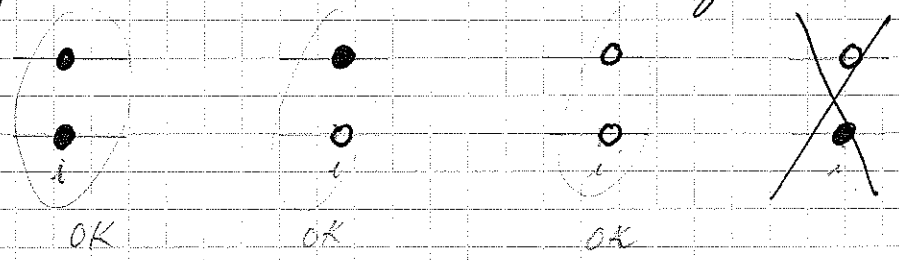
Couplage entre modèles ASEP (Liggett): on se place sur \mathbb{Z}



une configuration $\sigma: \left(\begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \{0,1\} \\ (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) i \mapsto \sigma_i \end{array} \right)$

on prend deux processus d'exclusion avec les m^{es} règles dynamiques et on impose à $t=0$: $\sigma^1 \succ \sigma^2$ i.e. $\sigma^1(i) \succ \sigma^2(i)$

en d'autres termes s'il y a une particule en i dans la 2^e ligne alors il y en a nécessairement une en i à la ligne 1



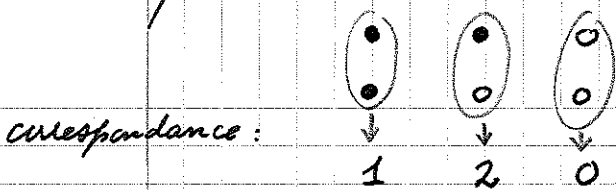
Evolution: entre t et $t+dt$, on sélectionne LE MÊME LIEN $(i, i+1)$ sur la ligne 1 et sur la ligne 2; ON ACTUALISE CE LIEN SIMULTANÉMENT sur les lignes 1 et 2.

Couplage \equiv il y a un même processus Poissonien d'actualisation sous-jacent.

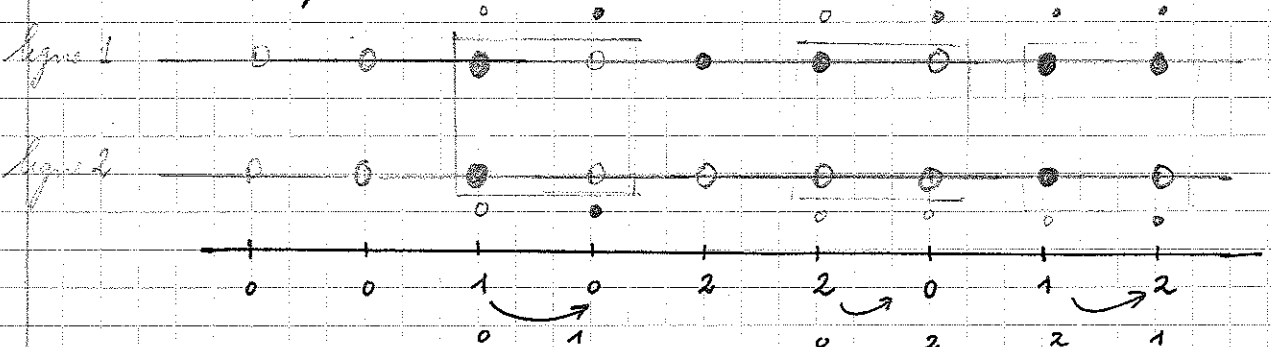
on a $\forall t: \sigma^1(t) \succ \sigma^2(t)$ i.e. l'inégalité se conserve.

Techniquement: Cela permet d'étudier des propriétés d'ergodicité, l'évolution d'un excès local de particules.

Ce modèle donne un ASEP à 2 classes de particules.



diverses actualisations possibles (cas TASEP):

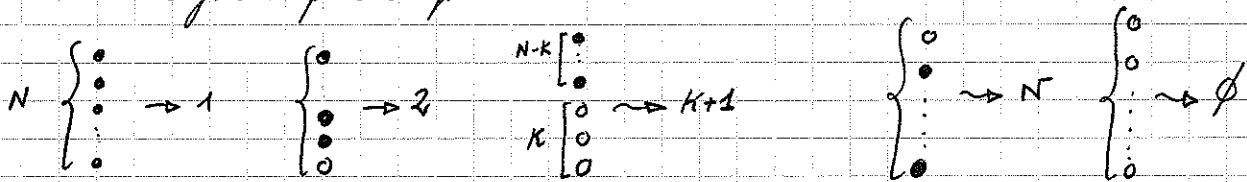


Dynamique 2-TASEP

$$\begin{aligned} 10 &\rightarrow 01 \\ 12 &\rightarrow 21 \end{aligned} \quad 20 \rightarrow 02$$

(1 prioritaire devant 2) prioritaire devant 0

Généralisation: N -lignes couplées avec $\mathcal{L}^1(0) \succ \mathcal{L}^2(0) \succ \dots \succ \mathcal{L}^N(0)$ dynamiques couplées.



$$IO \rightarrow OI \quad \forall I \in \{1, \dots, N\}$$

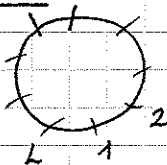
$$IJ \prec JI \quad I, J \in \{1, \dots, N\} \text{ et } I < J$$

généraliser: $IO \xrightarrow{p} OI$ $IJ \xrightarrow{q} JI \equiv N\text{-ASEP model}$

Problème: Mesure stationnaire de N -ASEP?

Pour simplifier, on se place sur un anneau périodique de taille L .

Problème générique: L sites, L particules de classe différente chacune



une permutation \leftrightarrow configuration
mesure sur \mathcal{P}_L / perm. circul.
($L-1$)! membres à calculer

Construction de la mesure stationnaire:

(i) Deuchi & Schaeffer: ASEP ouvert interprétation de la mesure par extension du modèle \rightarrow mesure conforme projective

(ii) G. ANGEL: 2-TASEP comme arêtes linéaires

(iii) J. MARTIN & PABLO FERRARI: N -TASEP comme files d'attente en tandem

(iv) P. FERRARI, M. EVANS, S. PROLHAC, K.M.: N -ASEP matriciel ANSATZ.

Ce qu'on savait :

- une espèce sur \mathbb{Z}/\mathbb{Z} : mesure uniforme (cf les amas)
- 2-TASEP (2 espèces + trous)

Algèbre

$$\begin{cases} DE = D + E \\ DA = A \\ AE = A \end{cases}$$

pour 2-TASEP (déformation)

$$\begin{cases} pDE - qED = (p-q)(D+E) \\ pDA - qAD = (p-q)A \\ pAE - qEA = (p-q)A \end{cases}$$

Interprétation de FERRARI et MARTIN :

Supposons qu'il y ait P_1 particules de 1^{ère} espèce
 P_2 particules de 2^{ème} esp.
 $(L - P_1 - P_2)$ cases vides ou trous

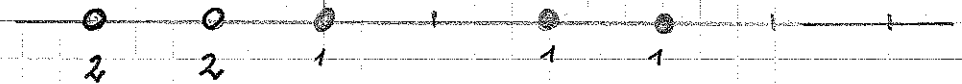
$P_1 = 3$

$P_2 = 2$

P_1



$P_1 + P_2$



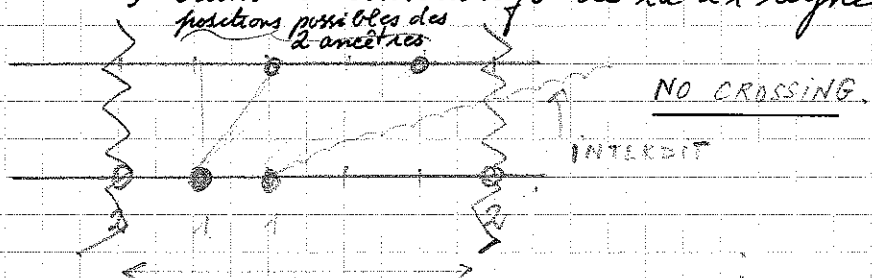
sur la 2^{ème} ligne : particules appariées \rightarrow 1
 particules non appariées \rightarrow 2

on construit ainsi une configuration de 2-TASEP sur la 2^{ème} ligne.
 Pour 1 disposition donnée sur la 2^{ème} ligne, il existe de nombreuses possibilités de dispositions sur la 1^{ère} ligne.

Mais il y a des CONTRAINTES :

(i) une particule sur la 1^{ère} ligne ne peut pas être au-dessus d'un 2

(ii) FACTORISATION : tous les 1 de la 2^{ème} ligne doivent être liés à des 1 de la 1^{ère} ligne qui sont placés entre (au sens strict) deux 2 consécutifs de la 2^{ème} ligne



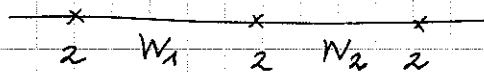
cela fragmente les possibilités d'appariement

(iii) PUSHING les ancêtres possibles de 211002

sont obtenues en remplaçant les 2 par des 0 et en poussant les 1 vers la droite de toutes les façons possibles

i.e. $0 \underline{1100} 0 \quad 0 \underline{10100} \quad 0 \underline{10010} \quad 00\underline{1100} \quad \left. \begin{matrix} \\ 00\underline{1010} \\ 000\underline{110} \end{matrix} \right\} 6 \text{ "ANCÊTRES"}$

Ces 3 propriétés caractérisent de manière unique les poids stationnaires du 2-TASEP



W_i = mot de 0 et de 1

$$P(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{P_2} w(W_i)$$

est le poids stationnaire de la configuration $(2W_1 2W_2 \dots 2W_{P_2})$

$w(W_i)$ est le nombre d'anciêtres calculés par la procédure de Pushing

avec $Z = \binom{L}{P_1} \binom{L}{P_1+P_2}$

exemple:

$$P(02110021) = \frac{1}{Z} w(1100) w(10) = \frac{2 \times 6}{\binom{8}{3} \binom{8}{5}} = \frac{6 \times 2}{56 \times 56} = \frac{3}{784}$$

$L = 8$
 $P_1 = 3 \quad P_2 = 2$

$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6}$

Quel rapport avec l'algèbre matricielle A, D, E ?

$D = 1 + d \quad E = 1 + e$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Projecteur de rang 1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ factorise le poids.
 $DE = D + E$

lemme combinatoire

$$w(W_1 \boxed{10} W_2) = w(W_1 \boxed{1} W_2) + w(W_1 \boxed{0} W_2)$$

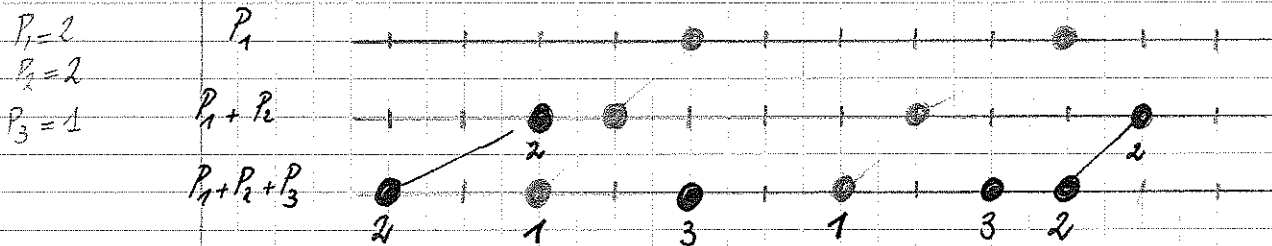
Push Push mots binaires

$DE = D + E$

Par unicité de la mesure stationnaire, les deux approches coïncident.

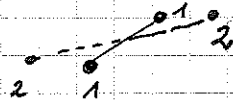
Cas du N-TASEP

on dessine $N = 3$



le poids d'une configuration à 3 types \propto # antécédents que l'on peut tracer par cette construction

\Rightarrow si n'y a plus de factorisation : des croisements sont possibles



Il s'agit d'algébriser cette construction combinatoire :

$X_1 \rightarrow 1^{ère}$ espèce, X_2, X_3, X_0 : 4 opérateurs

tels que
$$P(\mathcal{C}) = \frac{1}{\mathbb{Z}} \text{Tr} (X_{\sigma_1} \dots X_{\sigma_L})$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$
 selon l'occupation du site i

c'est possible $\forall N$: construction récursive des opérateurs

$$\begin{aligned} X_1^{(3)} &= 1 \otimes 1 \otimes D + \delta \otimes \varepsilon \otimes A + \delta \otimes 1 \otimes E \\ X_2^{(3)} &= A \otimes 1 \otimes A + A \otimes \delta \otimes E \\ X_3^{(3)} &= A \otimes A \otimes E \\ X_0^{(3)} &= 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes \varepsilon \otimes A + \varepsilon \otimes 1 \otimes D \end{aligned}$$

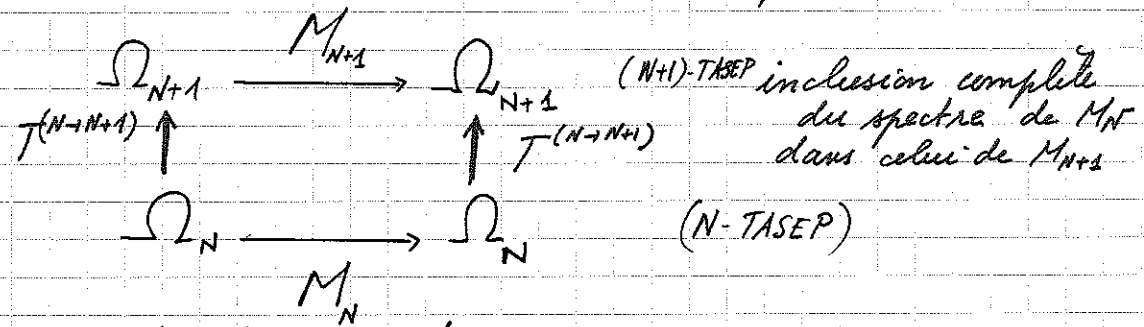
Opérateurs de base A, δ, ε

→ produits tensoriels récursifs de l'alg. quad. fondamentale

→ récurrence explicite :

$$X_K^{(N+1)} = \sum_{M \in \{0, 1, \dots, N+1\}} \underbrace{a_{KM}^{(N \rightarrow N+1)}}_{\text{objets fondamentaux} = \text{ajout d'une espèce}} \otimes X_M^{(N)} \quad X_0^{(0)} \equiv 1$$

$a_{KM}^{(N+1)}$ = produit tensoriel de N facteurs ils codent la matrice de transfert $T^{N \rightarrow N+1}$



il y a conjugaison des deux dynamiques

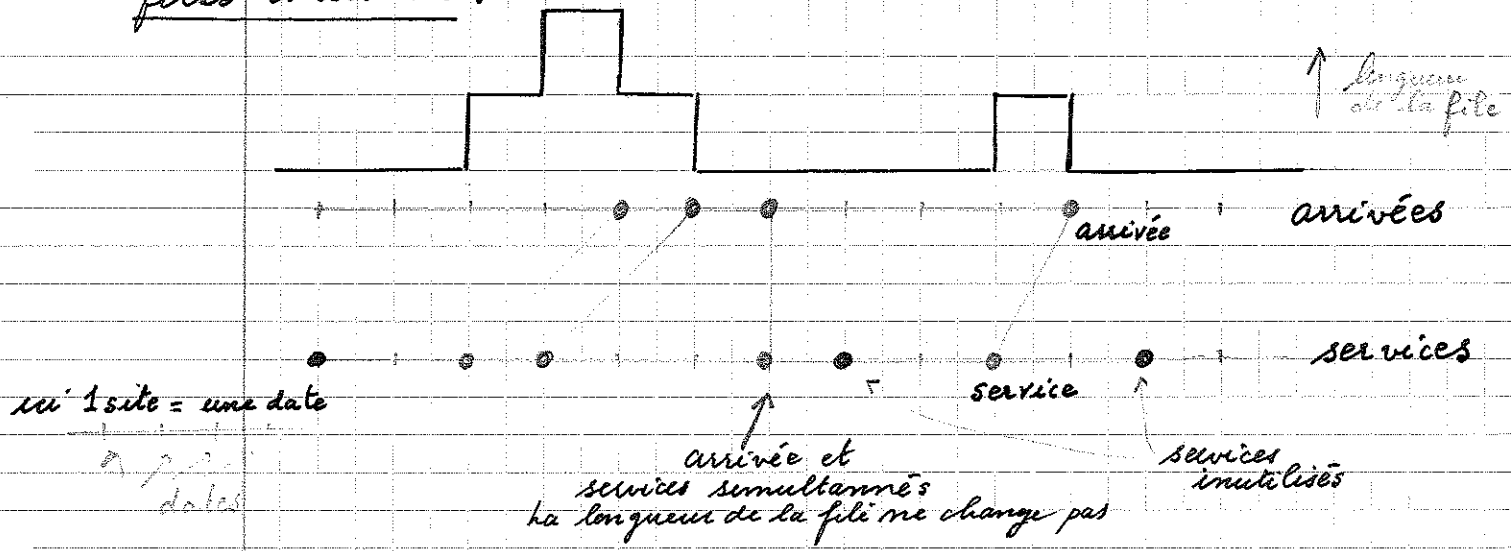
→ Preuve purement algébrique :

Connaissant l'algèbre des $X_H^{(N)}$ on vérifie mécaniquement l'Ansatz matriciel

→ Se généralise à N-ASEP :

Il suffit de déformer l'algèbre quadratique de base. Les mêmes formules avec produits tensoriels donnent le résultat correct. Plus que la construction géométrique ne s'étend pas aux cas avec sauts dans les deux directions.

→ Interprétation des matrices comme COMPTEURS de files d'attente:



La trajectoire de la file : chemin de MOTZKIN — / \
contraint à rester positif. AU DESSUS d'un 2 : la longueur est nulle + PAS DE service inutilisé entre 2 particules de type 2 consécutives.

$w(X) = \#$ chemins de MOTZKIN (qui partent de $z=0$ et arrivent à 0)

Appelons $|n\rangle$ la longueur de la file ($n \in \mathbb{N}$)
i.e. "SON ÉTAT"

$D =$ une date avec service } sur la 2^e ligne
 $E =$ pas de service

$D |n\rangle = |n-1\rangle + |n\rangle$
service effectué (pas d'arrivée en ligne 1) arrivée sur la ligne 1 service sur la ligne 2

$E |n\rangle = |n\rangle + |n+1\rangle$
pas d'arrivée une arrivée

$A |n\rangle = \delta_{n,0} |0\rangle$ projecteur sur 0.

les matrices de DEHP sont des opérateurs sur des files d'attentes.

Cas d'un processus à N -lignes :

clients de plusieurs catégories : les services inutilisés de la 2^e ligne sont compris comme des clients de deuxième (2^{de}) catégorie pour la 3^e ligne \rightarrow multi-file d'attente.

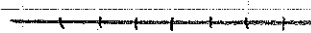
Quel est l'état de la multi-file ?

clients 1

1, 2

1, 2, 3

$N-2$ lignes



dernière ligne de service.

il faut, à une date t , se donner les valeurs

des $\frac{N(N+1)}{2}$ entiers suivants : $m_1^{(1)}$: clients 1 ligne 1
(compteurs)

$\begin{cases} m_1^{(2)} \\ m_2^{(2)} \end{cases}$: clients 1 ligne 2
clients 2 ligne 2

\dots
 $\begin{cases} m_1^{(N-1)} \\ m_{N-1}^{(N-1)} \end{cases}$: clients 1 ligne $(N-1)$
clients $(N-1)$ ligne $(N-1)$

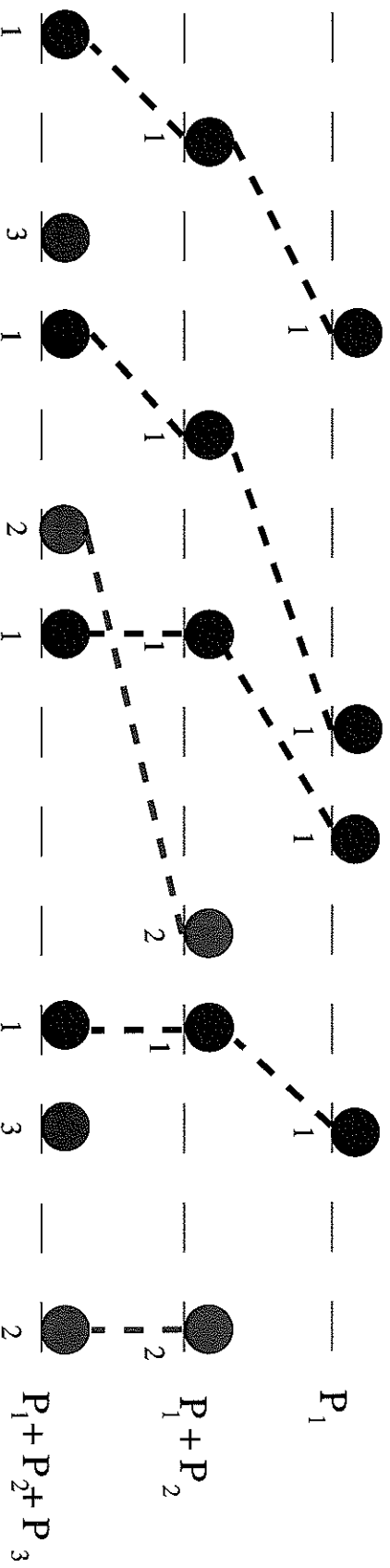
que l'on organise sous la forme suivante

$\left[m_1^{(N-1)}, m_2^{(N-1)}, \dots, m_{N-1}^{(N-1)}, m_1^{(N-2)}, \dots, m_1^{(1)} \right] \equiv$ état de la multi-file

on examine alors les services de la dernière ligne et la manière dont ils modifient l'état de la multi-file.

Un examen précis des différents cas permet de construire l'ANSATZ MATRICIEL et de retrouver les expressions sous forme de produits tensoriels donnés ci-dessus.

From 3 lines of TASEP to a 3-TASEP

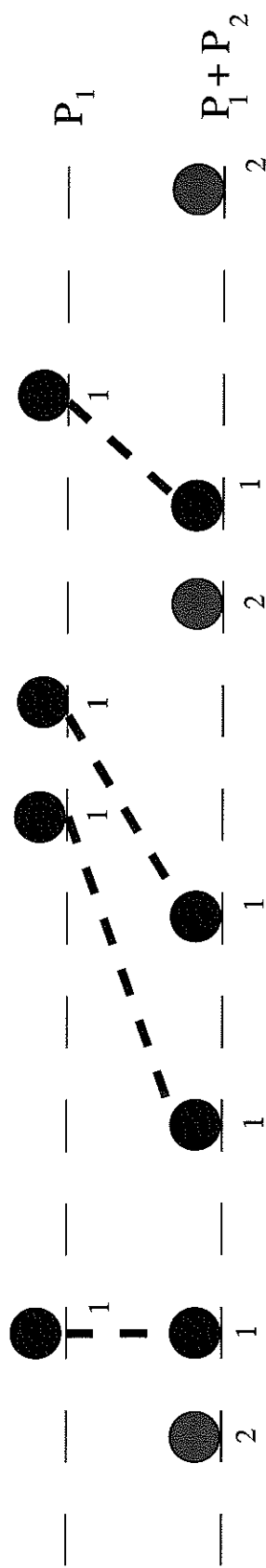


The weight of a 3-TASEP configuration is proportional to the total number of ways you can generate it by this construction.

**THE MATRIX ANSATZ PERFORMS AUTOMATICALLY
THE COMBINATORICS UNDERLYING THE
GEOMETRIC CONSTRUCTION OF THE WEIGHTS.**

- Factorisation Property : A is a PROJECTOR.
- Pushing Procedure : D and E are SHIFT OPERATORS
(right-shift and left-shift, respectively).

FROM 2 LINES OF TASEP TO 2-TASEP



This construction is **NOT** one-to-one : the weight of a 2-TASEP configuration is proportional to the total number of ways you can generate it by this construction.

Fundamental Remarks :

- A 1 (on the 1st line) can not be located above a 2 (on the 2nd line).
- **Factorisation Property** : All the 1's (on the 2nd line) situated between two 2's MUST be linked to 1's (on the 1st line) that are located between the positions of the two 2's (*No Crossing Condition*).
- **'Pushing' Procedure** : The '*ancestors*' of a string of the type 210102 are the strings obtained by pushing the 1's to the right i.e., 210102, 210012, 201102, 201012, 200112.

These properties uniquely characterize the stationary weights.

Aspects dynamiques. Bethe Ansatz

Représentations déterminantales

L'évolution du processus est codée par la matrice de Markov M :

$P_t(b/b_0)$ vérifie

$$\frac{dP_t}{dt} = M \cdot P_t$$

M : { entrees non diagonales ≥ 0
somme sur chaque colonne = 0

Pas de sous-espace invariant; plus précisément

$$\exists \ell \forall b, b' \quad M^\ell(b, b') \neq 0$$

i.e. 2 configurations sont reliées par un chemin de longueur ℓ au plus

Person-Frobenius: • Le NOYAU de M est de dimension 1 \rightarrow Etat STATIONNAIRE

• Les valeurs propres non nulles E de M vérifient $\text{Re}(E) < 0 \rightarrow$ modes de relaxation

Soient $(\Psi_E(b))$ les composantes du vecteur propre de v.p. E : $M\Psi_E = E\Psi_E$
(pour simplifier on suppose que M est diagonalisable)

$$\vec{P}_t = \sum_E \alpha_E \vec{\Psi}_E e^{+Et} = \alpha_0 \vec{\Psi}_0 + \sum_{E \neq 0} \alpha_E \vec{\Psi}_E e^{Et}$$

\uparrow composante le long de $\vec{\Psi}_E$ (projection sur la base duale)
 \downarrow tend vers 0

à la physicienne:

$$|P_t\rangle = \sum_E e^{Et} \underbrace{\langle \Psi_E | P_t \rangle}_{\alpha_E = \Psi_E^*(P_t)} | \Psi_E \rangle$$

on a $\langle \Psi_{E_i} | \Psi_{E_j} \rangle = \delta_{ij}$ par définition de la base duale,

en fait la base duale = vecteurs propres à gauche de M : $\langle \Psi_{E_i} | M = E_i \langle \Psi_{E_i} |$

Ainsi $\langle \Psi_0 | =$ vecteur du noyau à gauche de M
 $= (1, 1, \dots, 1) \equiv \sum_b \langle b |$

$$\text{ainsi } \alpha_0 = \sum_b P_t(b) = 1$$

Donc $P_t \rightarrow \psi_0$ état stationnaire unique (normalisé)
 la vitesse de relaxation (i.e de convergence) est contrôlée par la valeur propre non nulle E_1 ayant la plus grande partie réelle.

$$E_1 = -\frac{1}{T_1} + i\omega_1$$

Aux temps longs $P_t \approx \psi_0 + \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}} e^{i\omega_1 t} + \dots$

$T_1 = \frac{-1}{\text{Re}(E_1)}$	=	temps de relaxation
$\omega_1 = \text{Im}(E_1)$	=	oscillations (ondes de densité)

trois d'échelles de T_1, ω_1 ? importance des autres modes.
 Corrélations à temps différents.

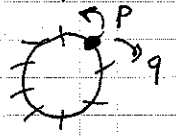
DIAGONALISER M

a priori: complexité $\sim 2^L$
 Méthode de Bethe \rightarrow eq. algébriques couplées de degré L

ANSATZ de Bethe: technique fondamentale de résolution exacte de modèles (4 stat, Méc. Q, T&C) \rightarrow intégrabilité

Version quantique (discrète) du théorème de LIOUVILLE: Eq. V.B.E.

Ici présentation élémentaire pour ASEP sur un anneau
 l'idée consiste à faire des combinaisons d'ondes planes qui correspondraient au modèle dans lequel les particules ne se voient pas.



FIRST CASE, N=1: 1 particule on a ring $1 \leq x \leq L$

$$E \psi_E(x) = p \psi_E(x-1) + q \psi_E(x+1) - (p+q) \psi_E(x)$$

2 modes z_+ et z_- with $E = \frac{p}{z_+} + q z_- - (p+q)$

$$\psi_E(x) = A z_+^x + B z_-^x \quad z_+ z_- = \frac{p}{q} \geq 1$$

$$z_+ + z_- = \frac{p+q+E}{q}$$

Periodicity condition $\psi_E(x+L) = \psi_E(x)$

$$A z_+^x + B \left(\frac{p}{q}\right)^x z_+^{-x} = A z_+^{x+L} + B \left(\frac{p}{q z_+}\right)^{x+L} \quad \forall x$$

$$\forall x \quad 0 = A(1 - z_+^L) z_+^x + B(1 - z_-^L) z_-^x$$

considérons le cas $\frac{p}{q} > 1$ et choisissons $|z_+| > 1 \quad |z_-| = \frac{p}{q|z_+|}$

et faut alors $A=0$ et $z_-^L = 1$

ce qui quantifie la pseudo-impulsion et donc ~~de~~ l'énergie

Une manière plus efficace de présenter ce calcul :

Le modèle est invariant par translation T (i.e ajouter 1 à chaque position) i.e $MT = TM$ on les co-diagonalise donc on cherche $\Psi_E(x_1, \dots, x_N)$ telle que

$$\Psi_E(x_1+1, x_2+1, \dots, x_N+1) = J \Psi_E(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

avec $J^L = 1$ (par périodicité)

Pour le cas à une particule $\Psi(x+1) = J \Psi(x) \Rightarrow$

$$\Psi(x) = A z^x \quad (\text{avec } z = J)$$

$$\text{et } \Psi(x+L) = \Psi(x) \Rightarrow \boxed{z^L = 1}$$

$$\boxed{E = p/z + qz - (p+q)}$$

Second CASE, $N=2$: 2 particules $1 \leq x_1 < x_2 \leq L$

GENERIC EQUATION $|x_2 - x_1| > 1 \pmod{L}$

$$E \Psi(x_1, x_2) = p [\Psi(x_1-1, x_2) + \Psi(x_1, x_2-1)] + q [\Psi(x_1+1, x_2) + \Psi(x_1, x_2+1)] - 2(p+q) \Psi(x_1, x_2)$$

SPECIAL CASE of adjacency : $x_2 = x_1 + 1$

$$E \Psi(x, x+1) = p \Psi(x-1, x+1) + q \Psi(x, x+2) - 1(p+q) \Psi(x, x+1)$$

comparing with the generic case we observe that there are some missing terms :

$$p \Psi(x, x) + q \Psi(x+1, x+1) - (p+q) \Psi(x, x+1) \rightarrow 0$$

If there were NO special cases (i.e the particles do not interact) then a factorized solution $\Psi(x_1, x_2) = A z_1^{x_1} z_2^{x_2}$ would solve the generic equation

$$\text{with } \boxed{E = p \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) + q(z_1 + z_2) - 2(p+q)}$$

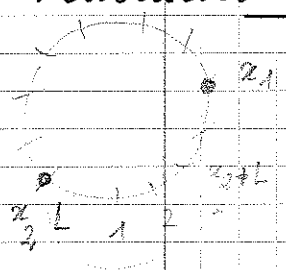
Plutôt que de résoudre à part le cas spécial d'adjacence, il est plus efficace de résoudre le cas générique et d'imposer une CONTRAINTE supplémentaire, une condition d'annulation:

$$p \Psi(x, x) + q \Psi(x+1, x+1) - (p+q) \Psi(x, x+1) = 0$$

Remarque: on peut vérifier que la solution générique $\Psi(x_1, x_2) = A z_1^{x_1} z_2^{x_2}$ ne permet pas de satisfaire la condition d'annulation avec z_1 et z_2 indépendants $\leadsto z_2 = \frac{p}{p+q(1-z_1)}$

pour $p=1, q=0$ cela donne $z_2 = 1$: aucune dépendance en x_2 !
 pour $(p, q) \neq (1, 0)$ c'est au niveau de la condition de recollement périodique (voir ci-dessous) que cela coïncide.

Périodicité \rightarrow Quantification des z :



$$\Psi(x_1, x_2 + L) = \Psi(x_2, x_1)$$

$$1 \leq x_2 < x_1 < x_2 + L$$

en fait, plus simplement $\Psi(x, L+1) = \Psi(1, x)$

Remarque fondamentale: E est invariant $z_1 \leftrightarrow z_2$
 i.e. $A z_1^{x_1} z_2^{x_2}$ et $B z_2^{x_1} z_1^{x_2}$ correspondent à la même v. pr. de l'équation générique

on cherche donc le vecteur propre sous la forme:

$$\Psi(x_1, x_2) = A_{12} z_1^{x_1} z_2^{x_2} + A_{21} z_2^{x_1} z_1^{x_2}$$

(Belhe)
ANSATZ

L'éq générique est bien satisfaite avec

$$E = p \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) + q(z_1 + z_2) - 2(p+q)$$

CONTRAINTE D'ANNULATION:

$$p(A_{12} + A_{21}) + qz_1z_2(A_{12} + A_{21}) = (p+q) \{ A_{12}z_2 + A_{21}z_1 \}$$

⇒ Une relation entre les amplitudes

$\frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{p - (p+q)z_2 + qz_1z_2}{p - (p+q)z_1 + qz_1z_2}$

l'équation aux valeurs propres est maintenant satisfaite dans tous les cas.

PÉRIODICITÉ ⇒ QUANTIFICATION des z :

$$\psi(x, L+1) = \psi(1, x) \quad \forall x \quad A_{12} z_1^x z_2^{L+1} + A_{21} z_2^x z_1^{L+1} = A_{12} z_1^x z_2^x + A_{21} z_2^x z_1^x$$

indépendance z_1^x et z_2^x :

$$\begin{cases} A_{12} z_2^L = A_{21} \\ A_{12} = A_{21} z_1^L \end{cases}$$

(Notes $(z_1, z_2)^L = 1$ invariance globale par Translation)

Cela mène aux équations de Bethe :

$z_1^L = - \frac{qz_1z_2 - (p+q)z_1 + p}{qz_1z_2 - (p+q)z_2 + p}$
$z_2^L = - \frac{qz_1z_2 - (p+q)z_2 + p}{qz_1z_2 - (p+q)z_1 + p}$

Ici l'Ansatz de Bethe conduit à 2 eq polynomiales couplées de degré $\approx L$ alors que la matrice de Markov (et donc le polynôme caractéristique) sont de taille $\sim L^2$.

Not for TASEP: $p=1, q=0$

i.e

$$\sum_{j=1}^{(5L)} \{z_j + 1\}^2 = z_0^{-L} (-z_2 + 1)^2 = -(1-z_1)(1-z_2) \quad (6)$$

$$\frac{(1-z_i)^2}{z_i^L} = -\prod_{k=1}^2 (1-z_k) \quad i=1, 2$$

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = -\frac{1-z_2}{1-z_1}$$

et $\Psi(x_1, x_2) =$

$\frac{z_1^{x_1}}{1-z_1}$	$\frac{z_1^{x_2}}{(1-z_1)^2}$
$\frac{z_2^{x_1}}{1-z_2}$	$\frac{z_2^{x_2}}{(1-z_2)^2}$

FONCTION D'ONDE
=
un
determinant

$N=3$ (Three particles on a ring) AND $N \geq 3$

The generic equation $x_1 \ll x_2 \ll x_3$ is

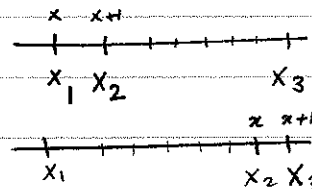
$$E \Psi(x_1, x_2, x_3) = p \{ \Psi(x_1-1, x_2, x_3) + \Psi(x_1, x_2-1, x_3) + \Psi(x_1, x_2, x_3-1) \}$$

$$+ q \{ \Psi(x_1+1, x_2, x_3) + \Psi(x_1, x_2+1, x_3) + \Psi(x_1, x_2, x_3+1) \}$$

$$- 3 \overset{(p+q)}{\Psi(x_1, x_2, x_3)}$$

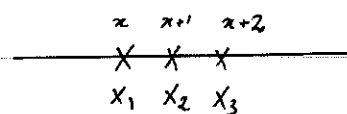
Adjacency conditions:

Two particle collisions
"2" + 1



same type
of CONSTRAINTS
as above

Triple collisions:



A new
CONSTRAINT?
Here is the sub...

Two-body collisions: elimination of the unwanted terms

$$p \Psi(x, x, x_3) + q \Psi(x+1, x+1, x_3) - (p+q) \Psi(x, x+1, x_3) = 0$$

here x_3 : spectator

and, similarly

$$p \Psi(x_1, x_1, x) + q \Psi(x_1, x+1, x+1) - (p+q) \Psi(x_1, x, x+1) = 0$$

here x_1 : spectator

Triple collision: $x_1 = x, x_2 = x+1, x_3 = x+2$

there are SIX UNWANTED terms

$$p \{ \Psi(x, x, x+2) + \Psi(x, x+1, x+1) \} + q \{ \Psi(x+1, x+1, x+2) + \Psi(x, x+2, x+2) \}$$

$$- (p+q) \Psi(x, x+1, x+2) = 0$$

$$- (p+q) \Psi(x, x+1, x+2)$$

This is not a new constraint: just a linear combination of the previous two ones

if the double-collision constraints are fulfilled then the 3-body constraint is automatically satisfied.

This "factorisation" property of multiple collisions into 2-body interactions lies at the very heart of the Bethe Ansatz.

Bethe Ansatz for the eigenfunction:

$$\underline{\underline{\Psi(x_1, x_2, x_3) = A_{123} z_1^{x_1} z_2^{x_2} z_3^{x_3} + A_{132} z_1^{x_1} z_3^{x_2} z_2^{x_3} + A_{213} z_2^{x_1} z_1^{x_2} z_3^{x_3} + A_{231} z_2^{x_1} z_3^{x_2} z_1^{x_3} + A_{312} z_3^{x_1} z_1^{x_2} z_2^{x_3} + A_{321} z_3^{x_1} z_2^{x_2} z_1^{x_3} \equiv \sum_{\sigma \in S_3} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_1} z_{\sigma(2)}^{x_2} z_{\sigma(3)}^{x_3}}$$

The generic eq. is satisfied with the eigenvalue

$$E = p \sum_{i=1}^N z_i^{p+q} + q \sum_{i=1}^N z_i^{-p-q} - 3(p+q)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} A_{\sigma} \prod_{i=1}^N z_{\sigma(i)}^{x_i}$$

Constraints: Let us write the general N case

The 2-body collision cancellation condition for the N particle case reads

$$p \underbrace{\Psi(x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_N)}_{\text{spectator}} + q \Psi(x_1, \dots, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots, x_N) = (p+q) \Psi(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

Let us substitute the B.A. in this equation ($x_i \equiv x$)

$$0 = p \sum_{\sigma \in S_N} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(i)}^{x_i} z_{\sigma(i+1)}^{x_{i+1}} \dots z_{\sigma(N)}^{x_N} + q \sum_{\sigma \in S_N} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(i)}^{x_{i+1}} z_{\sigma(i+1)}^{x_{i+1}} \dots z_{\sigma(N)}^{x_N} - (p+q) \sum_{\sigma \in S_N} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(i)}^{x_i} z_{\sigma(i+1)}^{x_{i+1}} \dots z_{\sigma(N)}^{x_N}$$

⇒ this has to vanish identically for generic values of $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i \equiv x, x_{i+1}, \dots, x_N$

these monomials of the type $z_{\sigma(i)}^{x_i} z_{\sigma(i+1)}^{x_{i+1}}$ are independent as soon as the z_i 's are \neq . But $z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)}$ appear with the same exponent. In other words, consider the constraint as a function of $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N$ and identify independent terms.

$$p (A_{\sigma} + A_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}}) + q z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)} (A_{\sigma} + A_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}}) = (p+q) \left\{ A_{\sigma} z_{\sigma(i)} + A_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}} z_{\sigma(i+1)} \right\}$$

$$\frac{A_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}}}{A_{\sigma}} = \frac{q z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)} - (p+q) z_{\sigma(i)} + p}{q z_{\sigma(i)} z_{\sigma(i+1)} - (p+q) z_{\sigma(i)} + p}$$

A_{σ} known ⇒ $A_{\sigma \circ \tau_{i, i+1}}$ KNOWN
ALL A_{σ} are KNOWN (up to A_{-1})

$\tau_{i, i+1}$ = transposition $i \leftrightarrow i+1$

CYCLICITY and QUANTIZATION:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_{N+L}) = \Psi(x_N, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \quad (8)$$

$$\sum_{\sigma} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(N)}^{x_{N+L}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_{\sigma} z_{\sigma(1)}^{x_N} z_{\sigma(2)}^{x_1} \dots z_{\sigma(N)}^{x_{N-1}}$$

circular permutation π

$$\begin{cases} \pi(1) = N \\ \pi(2) = 1 \\ \vdots \\ \pi(N) = N-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_N &\rightarrow \sigma_N \\ \sigma_1 &\rightarrow \sigma_0 \pi \\ &\text{by action} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma_N} A_{\sigma_0 \pi} z_{\sigma(N)}^{x_N} z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(N-1)}^{x_{N-1}}$$

compare r.h.s with l.h.s and use independence again:

$$\frac{A_{\sigma_0 \pi}}{A_{\sigma}} = z_{\sigma(N)}^L$$

But $\pi = \sigma_{N-1, N} \sigma_{N-2, N-1} \dots \sigma_{2, 3} \sigma_{1, 2}$ i.e.

$$\begin{aligned} \frac{A_{\sigma_0 \pi}}{A_{\sigma}} &= \left(\frac{A_{\sigma_{N-1, N} \dots \sigma_{1, 2}}}{A_{\sigma_{N-1, N} \sigma_{N-2, N-1} \dots \sigma_{2, 3}}} \times \frac{A_{\sigma_{N-2, N-1}}}{A_{\sigma_{N-2, N-1} \sigma_{3, 4}}} \times \dots \times \frac{A_{\sigma_{N-1, N}}}{A_{\sigma}} \right) \\ &= \frac{A_{\sigma_{N-1, N}}}{A_{\sigma}} \times \frac{A_{\sigma_{N-1, N} \sigma_{N-2, N-1}}}{A_{\sigma_{N-1, N}}} \times \dots \times \frac{A_{\sigma_{N-1, N} \dots \sigma_{1, 2}}}{A_{\sigma_{N-1, N} \dots \sigma_{2, 3}}} \end{aligned}$$

and we apply the previous relation to obtain

$$\frac{A_{\sigma_{i+1, i}}}{A_{\sigma}} \quad \begin{matrix} \sigma(i) = i \\ \sigma(i+1) = N \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} z_{\sigma(N)}^L &= (-1)^{N-1} \frac{q z_{\sigma(N-1)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N)} + p}{q z_{\sigma(N-1)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N-1)} + p} \times \frac{q z_{\sigma(N-2)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N)} + p}{q z_{\sigma(N-2)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N-2)} + p} \\ &\quad \times \dots \times \frac{q z_{\sigma(1)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N)} + p}{q z_{\sigma(1)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(1)} + p} \end{aligned}$$

$$z_{\sigma(N)}^L = (-1)^{N-1} \prod_{k \neq N} \frac{q z_{\sigma(k)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(N)} + p}{q z_{\sigma(k)} z_{\sigma(N)} - (p+q) z_{\sigma(k)} + p}$$

change notations $\sigma(N) = i \quad \sigma(k) = j \neq i$

$$z_i^L = (-1)^{N-1} \prod_{j \neq i} \frac{q z_i z_j - (p+q) z_i + p}{q z_i z_j - (p+q) z_j + p}$$

Bethe equations.

Remarks

(i) Translation operator: $x_i \rightarrow x_i + 1$; \mathcal{T}
 add 1 to all coordinates the dynamics commutes with $\mathcal{T} \rightarrow \Psi$ must also be an eigenvector of \mathcal{T}
 indeed: $\Psi(x_1+1, \dots, x_N+1) = \underbrace{(z_1 \dots z_N)}_{\text{eigenvalue of translation operator}} \Psi(x_1, \dots, x_N)$

$\mathcal{T}^L = 1 \Rightarrow \underbrace{(z_1 \dots z_N)^L = 1}$ this is indeed the case as you can check from the Bethe Eqs.

(ii) The TASEP case: $\begin{matrix} p=1 \\ q=0 \end{matrix}$

$z_i^{-L} (1-z_i)^N = - \prod_{j \neq i} (1-z_j) = \text{CONSTANT}$

The wave-function is a determinant

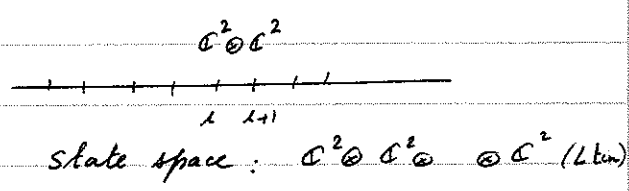
$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \det \left(\frac{z_i^{x_j}}{(1-z_i)^j} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$

(iii) The SEP case: $p=q=\frac{1}{2}$

$z_i^L = \prod_{j \neq i} \frac{z_i z_j - 2z_i + 1}{z_i z_j - 2z_j + 1}$ identical to Bethe '31

indeed one can write: $M = \sum_{l=1}^L M_{i, l+1}^{loc} \rightsquigarrow \mathbb{1} \otimes M_{i, l+1}^{loc} \otimes \mathbb{1}^{L-i-1}$

$M_{i, l+1}^{loc} = \begin{matrix} \text{basis: } & 11 & 10 & 01 & 00 \\ \begin{matrix} 4 \times 4 \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & q & 0 \\ 0 & p & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$



Rewrite it as a spin-chain operator: $S^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $S^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $S^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

spin basis $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle) \equiv (1, 0)$ acts on the local space $(\mathbb{C}^2)_i$

Pauli-matrices: $S_i^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ creates a particle at site i
 $S_i^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ destroys a particle
 $\begin{cases} S^+ = \frac{S^x + iS^y}{2} \\ S^- = \frac{S^x - iS^y}{2} \end{cases}$

$M_{i, l+1} = p \underbrace{S_i^- S_{i+1}^+}_{\text{hopping term}} + q S_i^+ S_{i+1}^- + \frac{1}{4} S_i^z S_{i+1}^z - \frac{1}{4}$

$M = \sum M_{i, l+1}$ special case $p=q=\frac{1}{2}$ $M = \sum_i \frac{S_i^- S_{i+1}^+ + S_i^+ S_{i+1}^-}{2} + \frac{1}{4} S_i^z S_{i+1}^z - \frac{1}{4}$

$H = M = -\frac{L}{4} + \frac{1}{4} \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$ $\vec{S}_i = \begin{pmatrix} S_i^x \\ S_i^y \\ S_i^z \end{pmatrix}$

this is exactly HEISENBERG'S MODEL of Quantum Magnetism - SOLVED BY H. BETHE. nearest neighbour interaction of QUANTUM SPINS
 $p=q=1/2$ Hermitian matrix $i\hbar \partial_t \Psi = H \Psi$ real eigenvalues $D \neq 0$ NON-HERMITIAN oscillations

EXACT CALCULATIONS IN THE CASE OF TASEP:

Extracting exact results from the Bethe Eqs: a daunting task! Fortunately, for the TASEP case, analytical progress can be made in a rather elementary way. We shall show how to extract the spectral gap & give some results on spectral degeneracies in the Markov Matrix.

Analysis of the TASEP Bethe Ansatz equations:

For TASEP, $p=1, q=0$ the Bethe Eqs become
$$z_i^{-L} (1+z_i)^N = - \prod_j (1+z_j)$$

change variables to
$$Z_i = \frac{z_i}{z_i - 1} \quad \text{i.e.} \quad z_i = \frac{Z_i}{Z_i + 1}$$

$$(1+Z_i)^{L-N} (1-Z_i)^N = - 2^L \prod_{j=1}^N \frac{Z_j - 1}{Z_j + 1}$$

r.h.s. does not depend on i

Effective decoupling to a 1 variable prob.

Eigenvalue
$$2E = -N + \sum_{i=1}^N Z_i$$

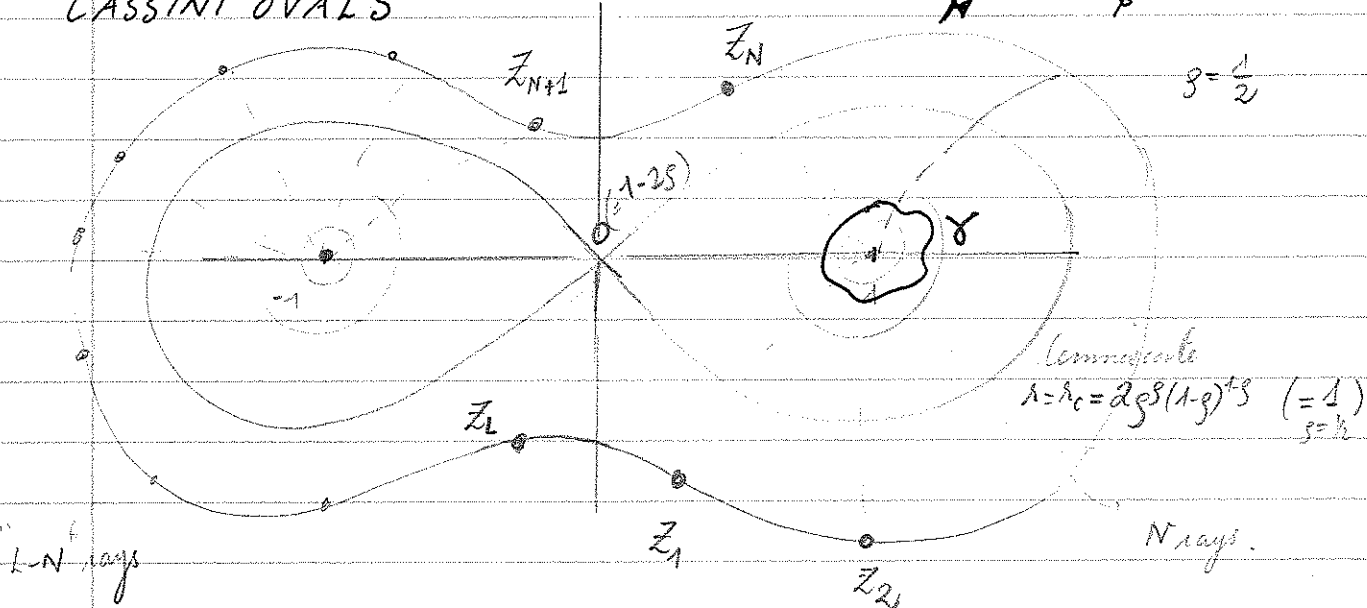
Procedure for solving these equations \Rightarrow Self-consistently

CONSIDER $Y \in \mathbb{C}$ and the polynomial eq $(1+Z)^{L-N} (1-Z)^N = Y$

$\Rightarrow |1-Z|^S |1+Z|^{1-S} = R$ where $R = |Y|^{1/2}$ $g = N/L$ (typ. $g = 1/2$)

defines a locus in the complex plane [for $g = 1/2$ $d_1, d_2 = \dots$]

CASSINI OVALS



There are L roots of this polynomial and we must

choose N roots amongst them: $Z_{c(1)}, \dots, Z_{c(N)}$

$c: \{1, \dots, N\} \mapsto \{1, \dots, L\}$ is a choice function

Now, solve the self-consistent equation $A_c(Y) = Y$ where

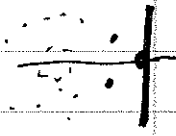
(11)

$$A_c(Y) = -2^L \prod_{j=1}^N \frac{Z_{c(j)}(Y) - 1}{Z_{c(j)}(Y) + 1}$$

From this fixed point equation, determine the value Y_c of Y and the energy corresponding to the choice set c : $2E_c(Y_c) = -N + 2 \sum_j Z_{c(j)}(Y_c)$

Claim (not proved): this procedure determines the spectrum of M_L
 (Note that there are $\binom{L}{N}$ possible choice functions which is precisely the dimension of M_L)

Calculation of the GAP: i.e. λ eigenvalue $\neq 0$ with $\text{Re}(\lambda)$ largest



it determines $(\frac{1}{\text{Re}(\lambda)})^T$ the largest relax time to stationarity

$$T \sim \ln \frac{1}{\lambda}$$

3 dynamical factors here $\beta = \frac{3}{2}$ $P \neq 9$

First, consider the choice function $c(j) = j$ which selects the roots Z_1, \dots, Z_N (that $\rightarrow +1$ when $z \rightarrow 0$). The A function and the eigenvalue associated to this choice are given by

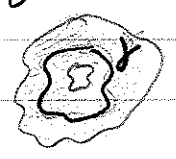
$$A_0(Y) = -2^L \prod_{j=1}^N \frac{Z_j - 1}{Z_j + 1}$$

$$2E_0 = -N + \sum_{j=1}^N Z_j$$

These functions can be calculated exactly in the limit $Y \rightarrow 0$ we consider a contour γ that encircles $+1$ such that for sufficiently small values of Y the roots (Z_1, \dots, Z_N) are inside γ whereas (Z_{N+1}, \dots, Z_L) are outside γ .

Let $h(z)$ a function analytic in a domain containing γ et we call $P(z) = (1-z)^N (1+z)^{L-N}$

Then we have
$$\sum_{k=1}^N h(Z_k) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z) - Y} h(z) dz$$



$$= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} Y^k \oint_{\gamma} \frac{P'(z) h(z)}{P^{k+1}(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{P'}{P} h + \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y^k}{Z_k} \int \frac{P'(z)}{P^k(z)} dz$$

$$N h(1)$$

we take $h(z) = \ln \frac{1+z}{2}$ and $h(z) = z-1$

to deduce that
$$\ln \frac{A_0(Y)}{Y} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL}{kN} \frac{Y^k}{k 2^{kL}}$$

and
$$2E_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{kL-2}{kN-1} \frac{Y^k}{k 2^{kL-1}}$$

NB] The expression for $\ln \frac{A_0(Y)}{Y}$ was obtained by calculating

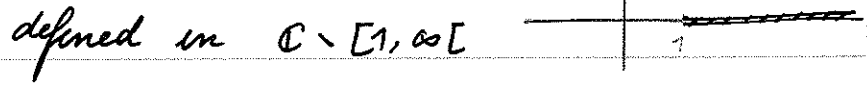
$$\frac{A_0(Y)^N}{Y^N} = (-1)^N 2^{LN} \prod_{j=1}^N \frac{(Z_j - 1)^N}{(Z_j + 1)^N} \frac{\prod_j (1 + Z_j)^{L-N} (1 - Z_j)^N}{\prod_j (1 + Z_j)^L} \times (-1)^{N^2 + N}$$

i.e. $\ln \left(\frac{A_0(Y)}{Y} \right)^N = - \sum_j \ln \left(\frac{1 + Z_j}{2} \right)^L$ no constant $2i\pi N$
because when $Y \rightarrow 0$ $Z_j \rightarrow 0$
 $A_0(Y) \rightarrow 1$

we now continue these expressions $L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, \frac{N}{L} = g$

$$\ln \frac{A_0(Y)}{Y} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi g(1-g)}} \frac{1}{\sqrt{L}} \text{Li}_{3/2} \left(\frac{Y}{r_c^L} \right) \text{ with } r_c = 2g^g(1-g)^{1-g}$$

and $\text{Li}_{3/2}(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^{3/2}} \equiv \frac{z}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}-1}}{e^t - z} dt$



similarly: $E_0(Y) \propto \text{Li}_{5/2}$

From the series expansion above, we observe that $A_0(Y) = Y$

has the solution $Y = 0$ which yields $Z_j = 1 \quad j = 1, \dots, N$

This corresponds to the ground state of the Markov Matrix.

The first excited state:

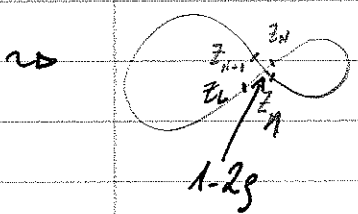
it will be obtained via the choice Z_1, \dots, Z_{N-1} and Z_{N+1}

i.e. $C_j = j$ for $j = 1, 2, \dots, N-1$ and $C_N = N+1$.

Then $A_1(Y) = A_0(Y) \frac{Z_{N+1} - 1}{Z_{N+1} + 1} \frac{Z_N + 1}{Z_N - 1}$ we want to solve $A_1(Y) = Y$ and then

calculate $\Delta E_1 = \Delta E_0 + (Z_{N+1} - Z_N)$

+ define $\frac{Y}{r_c^L} = -e^{u\pi} \Rightarrow |Y|^{1/L} \approx r_c$ the limiting curve is the lemniscate



Z_N, Z_{N+1} are close to the double point of the lemniscate and can be calculated perturbatively

$$Z_k = 1 - 2g + \sum_n \dots \rightarrow Z_1, \dots, Z_2, \dots, Z_N, Z_{N+1}, \dots$$

$$Z_N = 1 - 2g + 2i \frac{\sqrt{2\pi g(1-g)}}{\sqrt{L}} (\mu - i)^{1/2} + O(1/L)$$

$$Z_{N+1} = 1 - 2g + 2i \frac{\sqrt{2\pi g(1-g)}}{\sqrt{L}} (\mu + i)^{1/2} + O(1/L)$$

$$A_n(\gamma) = \gamma \Rightarrow \boxed{Li_{3/2}(-e^{u\pi}) = 2i\pi \left\{ (\mu + i)^{1/2} - (\mu - i)^{1/2} \right\}}$$

$$\mu = 1, 119\,068\,802\,804\,474 \dots$$

$$\boxed{E_1 = -2 \sqrt{g(1-g)} \frac{6.509\,189\,337 \dots}{L^{3/4}} \pm \frac{2i\pi(2g-1)}{L}}$$

dynamical exponent

oscillation relation
→ hexameric wave.

A DISCUSSION OF THE DEGENERACIES:

If you diagonalize the Markov Matrix of TASEP on a ring you'll notice that many eigenvalues are degenerate. E.g.

$L = 2N$, $g = 1/2$, one can draw a degeneracy table

L	N	$\binom{L}{N}$	singlets				
			$d_r = 1$	$d = 2$	6	20	70 etc. multiplets
2	1	2	2				
4	2	6	4	1			
6	3	20	8	6			
8	4	70	16	24	1		
10	5	252	32	80	10		
12	6	924	64	240	60	1	
14	7	3432	128	672	280	14	
16	8	12870	256	1792	1120	112	1
18	9	48620	512	4608	4032	672	18

values of d : $d_r = \binom{2r}{r}$

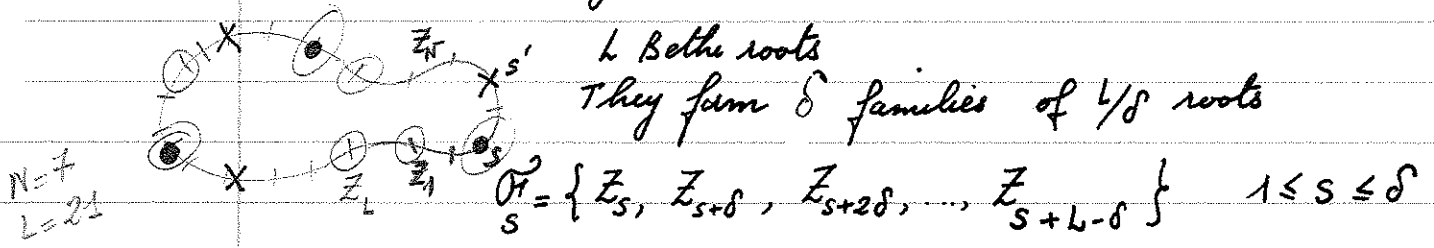
associated multiplicity in a system $L = 2N$ $m_r = \binom{N}{2r} 2^{N-2r}$

sum rule $\sum m(d_r) d_r = \binom{2N}{N}$

Why do such degeneracies appear?

There is an equivalence relation amongst choice sets

L, N ; Call $\delta = \text{gcd}(L, N)$



Consider a choice set $C: \{1, 2, \dots, N\} \hookrightarrow \{1, 2, \dots, L\}$ that selects N roots amongst L .

Suppose that the family $O_s \subset C$

But there is an s' such that $O_{s'} \cap C = \emptyset$

We can build a different choice set $\hat{C} = (C \setminus O_s) \cup O_{s'}$

CLAIM: C and \hat{C} correspond to the same eigenvalue

z_1, \dots, z_L are the roots of $(1-z)^N (1+z)^{L-N} = Y$

$O_s = \{z_s, z_{s+\delta}, \dots, z_{s+\delta+L}\}$ are roots of $(1-z)^\delta (1+z)^{\frac{L-N}{\delta}} = y_s$
where y_s is a δ -th root of Y $1 \leq s \leq \delta$
 $y_s = |Y|^{1/\delta} e^{i \text{Arg}(y_s)}$ $\text{arg}(y_1) < \text{arg}(y_2) < \dots$

we deduce $\sum_{z_i \in O_s} z_i = \frac{2N-L}{\delta}$

$\prod_{z_i \in O_s} \frac{z_i - 1}{z_i + 1} = 1$

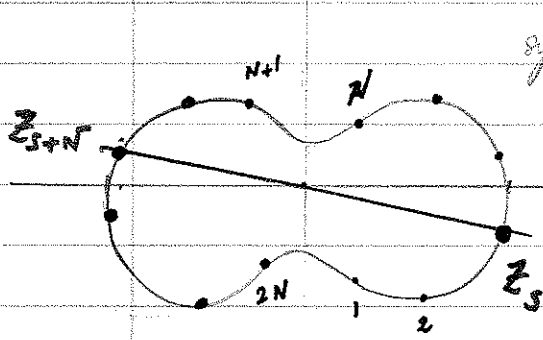
$E_C = E_{\hat{C}}$

this implies that O_s does not contribute to A_C
i.e. $A_C = A_{\hat{C}} \rightarrow$ same Bethe equation
 \rightarrow same value of Y .

If we believe that the B.A. is complete (works by LANGLANDS?) and that a choice function uniquely determines an eigenvalue, then counting the degeneracies reduces to a purely combinatorial problem.

Simple example: $L=2N \rightsquigarrow (1-z)^N(1+z)^N = Y$

(15)



symmetrical $z \leftrightarrow -z$ symmetry

$$\delta = N$$

N families $\{z_s, z_{s+N}\} \equiv \{z_s, -z_s\}$

a choice set c of N roots is equivalent to \hat{c} obtained by replacing a diameter by another one

i.e. the eigenvalue depends only on unpaired roots.

degree of degeneracy: # of \hat{c} having the same single roots as c . Suppose c has $N-2r$ single roots

$2r$ paired roots
i.e. r PAIRS

then \hat{c} has the same single roots but different paired roots.

$N-2r$ singles NO CHOICE

there are $2r$ pair possibilities we must choose r amongst them: $\binom{2r}{r} = d_r$

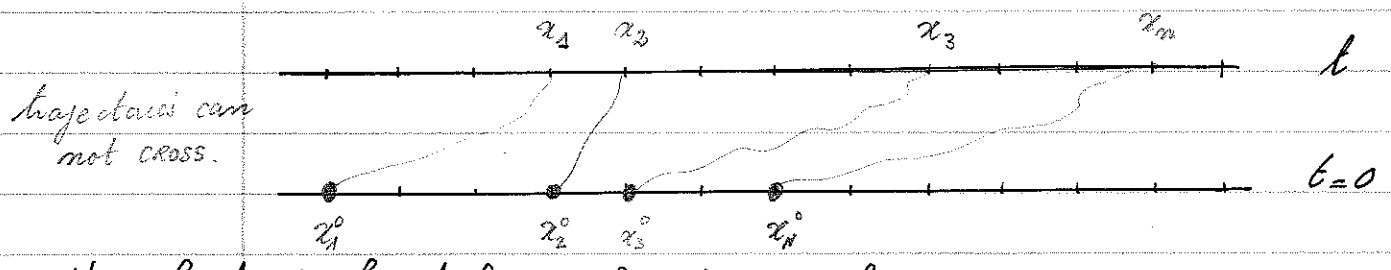
Number of multiplets of a given degree: they differ by the choice of the singles which are $N-2r$

$$m(d_r) = \frac{2N(2N-2)(2N-4) \dots (2N-2(N-2r-1))}{(N-2r)!} \\ = 2^{N-2r} \binom{N}{2r}$$

The general case $(L, N) = \delta$ is more complicated but can also be done -

Appendix to LECTURE 1:

Exact NON-STATIONARY probabilities for the TASEP on the infinite lattice.



N : a finite # of particles $x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_N^0$ at $t=0$
 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ at t

Probability $P_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0)$?

Same reasoning as above = without the cyclicity condition.

An eigenvector $\Psi_E(x_1, \dots, x_N) = \det \left(\frac{z_i^{x_j}}{(1-z_i)^j} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ with $E = \sum_{i=1}^N \beta_i - N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{z_i} - 1 \right)$

But now: NO QUANTIFICATION of the pseudo-momenta (i.e. an infinite number of eigenvalues) and the eigenfunction Ψ_E such that $M \cdot \Psi_E = E \Psi_E$ evolves with time as $\Psi_E(x_1, \dots, x_N; t) = e^{Et} \Psi_E(x_1, \dots, x_N)$

We now want to decompose $P_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, x_N^0)$ on the infinite set of the eigenvector (as in Quantum Mechanics).

We have $\Psi_E(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma \in S_N} A_\sigma z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(N)}^{x_N}$ with

$$A_\sigma = E(\sigma) \frac{1}{1-z_{\sigma(1)}} \frac{1}{(1-z_{\sigma(2)})^2} \dots \frac{1}{(1-z_{\sigma(N)})^{N-1}}$$

An equivalent expression is:

$$\Psi_E(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} E(\sigma) \frac{z_{\sigma(1)}^{x_1} \dots z_{\sigma(N)}^{x_N}}{(1-z_{\sigma(1)})^{\sigma(1)} \dots (1-z_{\sigma(N)})^{\sigma(N)}} = \sum_{\sigma} E(\sigma) \frac{e^{i p_{\sigma(1)} x_1 + \dots + i p_{\sigma(N)} x_N}}{(1-e^{i p_{\sigma(1)}})^{\sigma(1)} \dots (1-e^{i p_{\sigma(N)}})^{\sigma(N)}}$$

valeur propre associée $E = \sum_{k=1}^N (e^{-i p_k} - 1)$

$z_k = e^{i p_k}$

Here $x_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi_E$ has to be a bounded function

$$\sim |z_i|=1 \text{ i.e. } p_i \in [0, 2\pi[$$

(\neq from the ring case)

From Q.M. (ie spectral analysis) we expect the linear superposition

$$P_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_1}{2\pi} \dots \frac{dp_N}{2\pi} e^{-Nt + t \sum_{l=1}^N e^{ip_l} \epsilon_l} f(p_1, \dots, p_N) \psi_{p_1, \dots, p_N}(x_1, \dots, x_N)$$

$$\text{with } \psi_{p_1, \dots, p_N}(x_1, \dots, x_N) = \det \left| \frac{e^{ip_k x_l}}{(1 - e^{ip_k})^{\sigma(l)}} \right| = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) e^{i p_1 x_{\sigma(1)} + \dots + i p_N x_{\sigma(N)}}$$

and the AMPLITUDE $f(p_1, \dots, p_N)$ is chosen so that

$$P_{t=0}(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0) = \delta_{x_1 x_1^0} \dots \delta_{x_N x_N^0}$$

The "simplest" choice: $f(p_1, \dots, p_N) = e^{-ip_1 x_1^0 - \dots - ip_N x_N^0} (1 - e^{ip_1})^{-1} \dots (1 - e^{ip_N})^{-1}$
provides the correct answer:

$$P_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod \left(\frac{dp_k}{2\pi} \right) e^{-Nt + t \sum_{k=1}^N e^{ip_k} \epsilon_k} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \frac{e^{i p_1 (x_{\sigma(1)} - x_1^0) + \dots + i p_N (x_{\sigma(N)} - x_N^0)}}{(1 - e^{ip_1})^{\sigma(1)-1} \dots (1 - e^{ip_N})^{\sigma(N)-1}}$$

$$= \det_{k,l} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_k}{2\pi} \frac{e^{i p_k (x_l - x_k^0)}}{(1 - e^{ip_k})^{l-k}} e^{-t(1 - e^{ip_k})} \right|$$

By definition we call: $F_m(x; t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipx} e^{-t(1 - e^{ip})}}{(1 - e^{ip})^m}$
 $m, x \in \mathbb{Z}$

Then

$$P_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0) = \det_{k,l} \left| F_{l-k}(x_l - x_k^0; t) \right|$$

(Schütz, 1997) + Slovic Pruzhkov \rightarrow 2007

\hookrightarrow the integral that defines F_m is singular at $p=0$.
One must define a regularization



The explicit calculation can be

done:
$$F_m(x, t) = e^{-t} \sum_{\substack{r=0 \\ r \geq -x}}^{\infty} \frac{m(m+1)\dots(m+r-1)}{r!} \frac{t^{x+r}}{(x+r)!} = e^{-t} \tilde{F}_m(x, t)$$

si $m < 0$ la somme stops at: $r = |m|$

$$F_0(x, t) = e^{-t} \frac{t^x}{x!} \quad \tilde{F}_0(x, t) = \frac{t^x}{x!}$$

(i) we have
$$\frac{d}{dt} F_m(x, t) = F_{m-1}(x-1, t) = F_m(x-1, t) - F_m(x, t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_m(x, t) dt = F_{m+1}(x+1, t_2) - F_{m+1}(x+1, t_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{F}_m(x, t) &= \tilde{F}_{m-1}(x, t) \\ \tilde{F}_m(x) + \tilde{F}_{m-1}(x-1) &= \tilde{F}_m(x-1) \end{aligned} \right\}$$

(ii) for $t=0$: $F_m(x, 0) = 0$ si $x > 0 \rightsquigarrow \tilde{F}_m(x, 0) = 0$

$F_m(x=0, 0) = 1$ si $x=0 = \tilde{F}_m(0, 0)$

$$F_m(x, 0) = \frac{m(m+1)\dots(m+|x|-1)}{|x|!} = \frac{(m+|x|-1)!}{(m-1)! |x|!} = \tilde{F}_m(x, 0)$$

The first property allows us to show that the initial condition is well satisfied. $e^{-Nt} \det | \tilde{F}_{l-k}(x_l - x_k^0, 0) |$ initial condition

at $t=0$ $\det | \tilde{F}_{l-k}(x_l - x_k^0, 0) |$ $x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_N^0$

at time t $x_1 < x_2 < \dots < x_N$

we can not have $x_1 > x_1^0$, otherwise $x_N > x_{N-1} > \dots > x_2 > x_1 > x_1^0$

i.e $\forall l \ x_l - x_1^0 > 0 \Rightarrow$ the first line of the matrix vanishes

Therefore $x_1 = x_1^0$ and the matrix is of the type $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{} \end{vmatrix}$ do a recursion.

Property (i) allows to prove directly that the determinant "ANSATZ" solves the time-dependent master equation (i.e one can remove the "scaffolding" that has led us to this eq.

Each function F_m contains a factor e^{-t} : rewrite it as

$$F_m(x, t) = e^{-t} \tilde{F}_m(x, t)$$

Then
$$P_t = e^{-Nt} \det_{l,k} | \tilde{F}_{l-k}(x_l - x_k^0; t) |$$

and $\frac{d}{dt} P_t = e^{-Nt} \frac{d}{dt} \det |\tilde{F}| - N P_t$

But $\frac{d}{dt} \det |\tilde{F}| = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \tilde{F}_0(x_1 - x_1^0) & \tilde{F}_1(x_2 - x_1^0) & \dots & \tilde{F}_{N-1}(x_N - x_1^0) \\ \tilde{F}_{-1}(x_1 - x_2^0) & \tilde{F}_0(x_2 - x_2^0) & \dots & \tilde{F}_{N-2}(x_N - x_2^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_{1-N}(x_1 - x_N^0) & \dots & \dots & \tilde{F}_0(x_N - x_N^0) \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} \tilde{F}_0 & \tilde{F}_1 & \dots & \tilde{F}_{N-1} \\ \tilde{F}_1 & \tilde{F}_0 & \dots & \tilde{F}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_{1-N} & \tilde{F}_{2-N} & \dots & \tilde{F}_0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \tilde{F}_0 & \tilde{F}_1 & \dots & \tilde{F}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_{1-N} & \tilde{F}_{2-N} & \dots & \tilde{F}_0 \end{vmatrix}$

now we remark that

$\frac{d}{dt} \tilde{F}_m(x) = \frac{d}{dt} (e^{+t} F_m) = \tilde{F}_m(x) + e^t \frac{d}{dt} F_m = \tilde{F}_m(x-1)$

$e^{-Nt} \begin{vmatrix} \tilde{F}_0(x_1-1-x_1^0) & \dots \\ \tilde{F}_{1-N}(x_1-1-x_N^0) & \dots \end{vmatrix} \rightsquigarrow P_t(x_1-1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0)$

$$\frac{d}{dt} P_t(x_1, \dots, x_N) = \sum_i P_t(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_N) - N P_t(x_1, \dots, x_N)$$

this proves the generic equation.

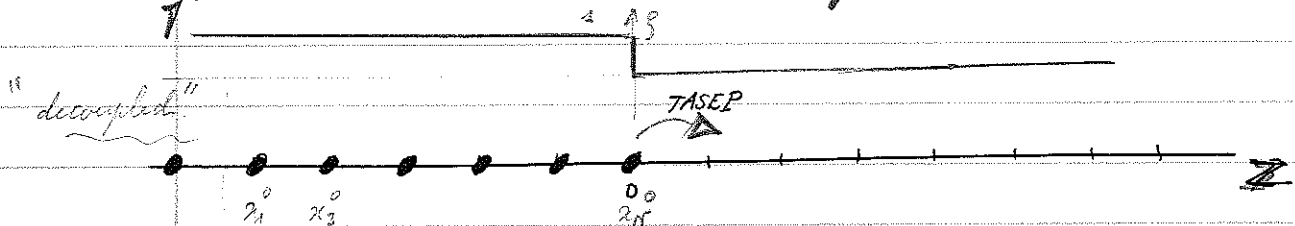
we now have to prove the annihilation (cancellation) of unwanted two-body collision terms i.e.

$P_t(x_1, \dots, x, x, x+1, \dots, x_N) = P_t(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x+1, x_{i+1}, \dots, x_N)$

$\begin{vmatrix} \tilde{F}_{i-1}(x-x_1^0) & \tilde{F}_i(x-x_1^0) \\ \tilde{F}_{i-2}(x-x_2^0) & \tilde{F}_{i-1}(x-x_2^0) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{i-N}(x-x_N^0) & \tilde{F}_{i+1-N}(x-x_N^0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{F}_{i-1}(x-x_1^0) & \tilde{F}_i(x+1-x_1^0) \\ \tilde{F}_{i-2}(x-x_2^0) & \tilde{F}_{i-1}(x+1-x_2^0) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{F}_{i-N}(x-x_N^0) & \tilde{F}_{i+1-N}(x+1-x_N^0) \end{vmatrix}$

+ use $\tilde{F}_m(x) + \tilde{F}_{m-1}(x+1) = \tilde{F}_m(x+1)$ which shows that the two determinants are equal.

Application: Density and current fluctuations for the TASEP with step initial conditions: (1-5)



Hydrodynamic scale \rightarrow Burgers: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho(1-\rho) = 0$ $\rho_{t=0} = \Theta(-x)$

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t} \right) \quad \text{for } |x| \leq t$$

we want a finer description

$P(M, N; t)$ = probability that the N th particle (PARTICLE LABELLED 1) (which was initially at site $1-N$) has jumped at least M times up to time t (i.e. its position at time t is at least $M+1-N$)

$$P(M, N, t) = \sum_{M-N < x_1 < x_2 < \dots < x_N} P_t(x_1, \dots, x_N \mid x_1^0 = -N+1, x_2^0 = -N+2, \dots, x_N^0 = 0)$$

Starting from the determinantal expression for $P_t(\{x\} | \{x^0\})$ and using ^{the} explicit expressions for the $F_m +$ row/column manipulations one can show the following result:

$$P(M, N, t) = \frac{1}{Z_{M, N}} \int_{[0, t]^{N}} d^N x \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{j=1}^N x_j^{M-N} e^{-x_j}$$

($Z_{M, N} = P(M, N, t = \infty)$)
 This result was first obtained by Johansson, CMP (2000) using combinatorial arguments.
 (this derived: Schütz + RAKOS, cond-mat/2004)


The ^{expression} ~~numerator~~ on the r.h.s. has direct meaning in random matrix theory = it is the PROBABILITY that the largest eigenvalue of the ^{RANDOM} matrix AA^* is $\leq t$

GIVEN THAT A is a $N \times M$ matrix of complex Gaussian random variables with mean zero and variance $\frac{1}{2}$.

\rightarrow relates TASEP to the field of random matrices and TRACY-WIDOM distributions of Piatnick FERRARI's lectures.

Another interpretation: we call $J_x(t)$ the total number of particles that have crossed the bond $x-(x+1)$ between time 0 and t (i.e. this is the time integrated current through the bond $x-x+1$) Then

$$\text{Proba} \{ J_x(t) > m \} = \text{Prob} (m+x+1, m+1, t)$$
 probability that the $(m+1)$ th particle has jumped at least $m+x+1$ sites.



Using the results of Tracy & Widom (\rightarrow asymptotic analysis of the preceding integral formula) one can prove that

$$0 \leq v < 1 \quad J_{[vt]}(t) = \frac{t}{4} (1-v)^2 + \frac{t^{1/3} (1-v^2)^{2/3}}{2^{1/3}} \chi$$

where the distribution of χ is given by:

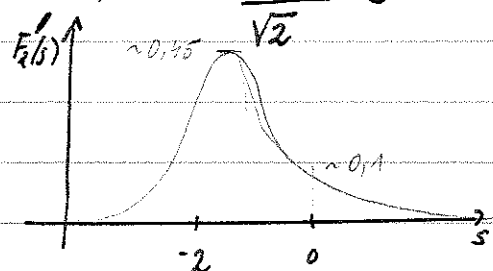
$$\text{Proba} (\chi \leq s) = 1 - F_2(-s)$$

where $F_2(s) = F_{GUE}(s)$ is the cumulative distribution of λ_{max} in the Gaussian Unitary ensemble i.e. (self-adjoint Hermitian matrices)

$$\lambda_{max} = \sqrt{2N} + \frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}} \xi \quad \text{Proba} (\xi \leq s) = F_2(s)$$

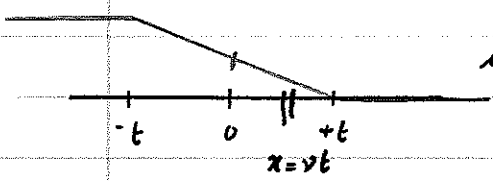
and we have

$$\langle s \rangle = \int s F_2'(s) ds \approx -1.77109$$



$$1 - F_2(-s) \sim \begin{cases} 1 - e^{-|s|^{3/2}} & s \rightarrow +\infty \\ \frac{4}{3} e^{-\frac{2}{3}|s|^{3/2}} & s \rightarrow -\infty \end{cases}$$

- Remarks:
- $t^{1/3} \rightarrow$ the KPZ exponent
 - linear contribution is elementary:



initial profile: step \rightarrow fan state $g(x,t) = \frac{1-x/t}{2}$ (exists)

local current at time t : $g(x,t)(1-g(x,t))$ (through x)

$$= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right\}$$

Total integrated current through x from $t=0$ to $t=T$

$$\frac{1}{4} \int_0^T dt \left(1 - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right)$$

the lower bond $x_{min} = x \rightarrow$ TSPV

$$\text{thus } \frac{1}{4} \int_x^T dt \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right) = \frac{1}{4} \left\{ T - x + x^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{T}\right) \right\}$$

$$= \frac{T}{4} \left(1 - \left(\frac{x}{T}\right)^2\right) = \frac{T}{4} (1 - v)^2$$

For as questions, consider:

• D. Aldous & P. Diaconis: Longest increasing Subsequences
 from patience sorting to the Baik - Deift - Johansson
 Theorem