Journées ALEA 7–11 Mars 2016
Introduction aux processus de fragmentation
B. Haas

## Exercices

**Exercice 1. Pluie Poissonnienne.** Soit $(T_i, U_i)_{i\geq 1}$ une mesure de Poisson à valeurs dans $(0,\infty)\times(0,1)$ d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}u$. Autrement dit, les v.a. $U_i, i \geq 1$ sont i.i.d. uniformes dans $(0,1)$, indépendantes des temps $T_i, i \geq 1$, qui sont les temps de saut d'un processus de Poisson standard (les $T_{i+1} - T_i, i \geq 1$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}\mathrm{xp}(1)$). Au temps $t \geq 0$, on note

$$O(t) = (0,1) \backslash \{U_i : T_i \leq t\}$$

et $F_1(t) \geq F_2(t) \geq \ldots$ les longueurs rangées par ordre décroissant des intervalles de $O(t)$, avec pour convention $F_j(t) = 0$ s'il y a strictement moins de $j$ intervalles non vides.

Montrer que $F$ est un processus de fragmentation d'indice $\alpha = 1$, de coefficient d'érosion $c = 0$ et de mesure de dislocation la loi de $(V, 1-V, 0, \ldots)$ où $V$ est uniforme dans $(1/2, 1)$.

**Exercice 2. Pluie Poissonnienne 2.** Soit $(T_i, U_i, \ell_i)_{i\geq 1}$ une mesure de Poisson à valeurs dans $(0,\infty)\times(0,1)\times(0,1)$ d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}\ell$. On décide que l'intervalle $[U_i, U_i + \ell_i]$ "arrive" au temps $T_i$, $i \geq 1$ et on construit récursivement un processus d'ouverts de $(0,1)$, emboités, $(O(t), t \geq 0)$ comme suit : $O(0) = (0,1)$ et $O$ ne saute qu'aux temps $T_i, i \geq 1$ avec comme règle

$$\begin{cases} O(T_i) = O(T_i-) \backslash [U_i, U_i + \ell_i] & \text{si} \quad [U_i, U_i + \ell_i] \subset O(T_i-) \\ O(T_i) = O(T_i-) & \text{sinon.} \end{cases}$$

A nouveau, $F_1(t) \geq F_2(t) \geq \ldots$ désignent les longueurs rangées par ordre décroissant des intervalles de $O(t)$. Montrer que le processus $F$ est un processus de fragmentation et déterminer ses paramètres.

<u>Réf.</u> : Y. Baryshnikov et A. Gnedin, *Counting intervals in the packing process*, Ann. Appl. Probab. 11 (2001)

**Exercice 3. Fragment marqué.** On rappelle que pour une fragmentation homogène ($\alpha = 0$), sans érosion ($c = 0$) et de mesure de dislocation $\nu$, le processus du fragment marqué s'écrit sous la forme $\Lambda(t) = \exp(-\xi(t)), t \geq 0$ où $\xi$ est un subordinateur d'exposant de Laplace

$$\phi(q) = \int_{\mathcal{S}^{\downarrow}} \left(1 - \sum_{i\geq 1} s_i^{q+1} \nu(\mathrm{d}\mathbf{s})\right) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-xq}\right) \Pi(\mathrm{d}x)$$

où $\Pi(\mathrm{d}x) = e^{-x} \sum_{i\geq 1} \nu(-\ln(s_i) \in \mathrm{d}x)$, $x > 0$.

1. Montrer que l'application $\nu \in \{\text{mesures de dislocation}\} \mapsto \Pi \in \{\text{mesures sur } (0,\infty) : \int_0^\infty (1 \wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty\}$ n'est ni injective, ni surjective.

2. Montrer que si on se restreint aux mesures de dislocation binaires (c'est-à-dire telles que $\nu(s_1 + s_2 < 1) = 0$), cette application est injective.

**Exercice 4. Mesure de dislocation de la fragmentation brownienne.** Soit $\mathbf{e}$ une excursion brownienne normalisée et $U$ une v.a. uniforme dans $(0,1)$, indépendante de $\mathbf{e}$. Il est bien connu que $2\mathbf{e}(U)$ suit une loi de Rayleigh :

$$\mathbb{P}(2\mathbf{e}(U) > t) = \exp(-t^2/2), \quad \forall t \geq 0.$$

En déduire la mesure de dislocation brownienne.

*Indication : montrer que l'exposant de Laplace du subordinateur associé à la fragmentation brownienne est donné par*

$$\phi(q) = 2q\sqrt{\frac{2}{\pi}}B\left(q + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

*où $B$ désigne la fonction Beta d'Euler.*

<u>RÉF.</u> : J. Bertoin, *Self-similar fragmentations*, Ann. IHP 38 (2002)

**Exercice 5. Temps de mort d'une fragmentation d'indice d'auto-similarité négatif**. Soit $F$ une fragmentation d'indice $\alpha < 0$ et

$$\zeta = \inf\{t \geq 0 : F(t) = \mathbf{0}\}.$$

On note $\Lambda$ le (un) processus du fragment marqué associé et $I = \inf\{t \geq 0 : \Lambda(t) = 0\}$.

1. Montrer que $I$ admet des moments exponentiels positifs (c'est-à-dire qu'il existe $a > 0$ : $\mathbb{E}[\exp(aI)] < \infty$).

2. On veut montrer de même que $\zeta$ admet des moments exponentiels positifs. Montrer qu'il existe un processus de fragmentation $F'$ d'indice d'auto-similarité $\alpha/2$ et de mêmes érosion et mesure de dislocation que $F$ tel que

$$\zeta \leq \int_0^\infty (F_1'(r))^{-\alpha/2}\mathrm{d}r.$$

   Conclure à l'aide de la question 1.

3. Lorsque $\phi$ varie régulièrement à l'infini avec indice $\beta \in (0,1)$, on peut être plus précis : il existe $B \geq A > 0$ tels que

$$\exp\left(-B\psi(t)\right) \leq \mathbb{P}\left(\zeta > t\right) \leq \exp\left(-A\psi(t)\right)$$

   pour tout $t$ assez grand où $\psi$ est l'inverse de la fonction $t \in [1,\infty) \to t/\phi(t)$. Montrez le !

<u>RÉF.</u> : B. Haas, *Loss of mass in deterministic and random fragmentations*, Stoch. Proc. Appl. 106 (2003)