ALEA 2012

Probabilités libres et matrices aléatoires

Exercices

(): facile
(*): un peu plus difficile
(**): difficile,
(***): très difficile

1. Matrices aléatoires

EXERCICE 1.1. (*) Soient v_1, v_2 deux vecteurs indépendants tirés uniformément sur la sphère de rayon 1, dans l'espace euclidien de dimension N. Calculer la loi de $\langle v_1, v_2 \rangle$ (on pourra commencer par se ramener au cas où $v_1 = e_1$ le premier vecteur de la base canonique).

(Réponse: $c_N(1-x^2)^{(N-3)/2}; \quad x \in [-1,1]$.*)*

EXERCICE 1.2. (***) $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont deux n-uplets de matrices hermitiennes (de taille N) tels que

$$Tr(X_{i_1} \ldots X_{i_k}) = Tr(Y_{i_1} \ldots Y_{i_k})$$

pour tout $k \geq 1$ et tout choix de $i_1, \ldots, i_k$,. Montrer qu'il existe une matrice unitaire U telle que $UX_iU^* = Y_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

EXERCICE 1.3. Soit V un espace euclidien de dimension n (finie). On choisit un vecteur u_1, au hasard, uniformément sur la sphère de rayon 1. Soit V_1 l'orthogonal de u_1 dans V. On choisit u_2 au hasard uniformément sur la sphère de rayon 1 de V_1. Soit V_2 l'orthogonal de u_1 et u_2, on choisit u_3 au hasard uniformément sur la sphère de rayon 1 de V_2, et ainsi de suite juqu'à u_n. Montrer que la matrice aléatoire dont les vecteurs colonnes sont $u_1, u_2, \ldots, u_n$ suit la mesure de Haar sur le groupe $U(n)$.

EXERCICE 1.4. (*) Soit G une matrice aléatoire hermitienne gaussienne de taille N: les $G_{ij}; i < j$ sont des gaussiennes complexes centrées réduites ($E[|G_{ij}|^2] = 1$), les G_{ii} des gaussiennes réelles centrées réduites, et toutes ces variables sont indépendantes. Montrer que G est presque surement inversible, puis que la matrice unitaire obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs colonnes de G est distribuée avec la mesure de Haar.

Exercice 1.5. Écrire un programme Scilab qui tire une matrice unitaire au hasard avec la mesure de Haar.

2. Partitions non-croisées

Exercice 2.1. (*) Montrer que le nombre de partitions non-croisées de $\{1, \ldots, n\}$ est le nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Exercice 2.2. (*) Montrer que les partitions non-croisées forment un treillis pour l'ordre naturel sur les partitions (dit du raffinement).

On note S_n le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$, et τ_{ij} la transposition qui échange i et j. On note $c(\sigma)$ le nombre de cycles d'une permutation σ.

Exercice 2.3. Soit $\sigma \in S_n$, montrer que $c(\sigma\tau_{ij}) = c(\sigma) \pm 1$. Discuter la valeur du signe suivant que i et j sont, ou non, dans le même cycle de σ.

Exercice 2.4. (*) En utilisant l'exercice 2.3, montrer que le plus petit k tel que σ soit le produit de k transpositions est $n - c(\sigma)$.

En déduire que $d(\sigma, \omega) := n - c(\sigma\omega^{-1})$ est une distance sur S_n.

Exercice 2.5. (**) On note Σ le cycle maximal $\Sigma(i) = i + 1(\mathrm{mod})n$.

i) Que vaut $d(e, \Sigma)$?

ii) Montrer que σ vérifie $d(e, \sigma) + d(\sigma, \Sigma) = d(e, \Sigma)$ si et seulement si:

–a) les cycles de σ forment une partition non-croisée de $\{1, \ldots, n\}$.

–b) dans chaque cycle de σ, l'ordre cyclique est celui induit par l'ordre cyclique de Σ (en d'autres termes, $\sigma(i)$ est le premier de la liste $\sigma(i) + 1, \sigma(i) + 2, \ldots$ qui est dans le même cycle de σ que i, l'addition étant modulo n).

iii) En déduire un plongement de $NC(n)$ dans S_n.

Exercice 2.6. (***) Soient $a_1, \ldots, a_r$ des nombres entiers ≥ 2 tels que

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_r - 1) = n - 1$$

Montrer que le nombre de factorisations

$$\Sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$$

où chaque σ_i est une permutation circulaires d'ordre a_i, est égal à n^{r-1} (en particulier, le nombre de factorisations de Σ en produit de $n-1$ transpositions est n^{n-2}).

Indication: par récurrence sur r: si $F_r(a_1, \dots, a_r)$ est l'ensemble de ces factorisations, trouver une bijection entre $F_{r-1}(a_1, \dots, a_{r-1} + a_r - 1) \times \{1, \dots, n\}$ et $F_r(a_1, \dots, a_r)$.

3. Cumulants libres

Exercice 3.1. En utilisant la méthode du cours, montrer que si a_1 et a_2 sont libres, alors

$$\tau(a_1 a_2 a_1 a_2) = \tau(a_1^2)\tau(a_2)^2 + \tau(a_1)^2\tau(a_2^2) - \tau(a_1)^2\tau(a_2)^2$$

Exercice 3.2. (*) Soient $a_1, \dots, a_n \in A$, avec $n \geq 2$.
i) Montrer que s'il existe i tel que $a_i \in \mathbf{C}.1$ alors $R_n(a_1, \dots, a_n) = 0$.
Indication: procéder par récurrence sur n.
ii) En déduire que

$$R_n(a_1, \dots, a_n) = R_n(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \qquad (\bar{a}_k = a_k - \tau(a_k).1)$$

Exercice 3.3. (**) Montrer que si les A_i sont libres, si $a_1, \dots, a_n \in \cup_i A_i$ alors $R_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ dès qu'il existe k, l et $i \neq j$ tels que $a_k \in A_i$ et $a_l \in A_j$. Là encore on peut raisonner par récurrence sur n, en se ramenant au cas où $\tau(a_k) = 0$ pour tout k, par l'exercice précédent.

Exercice 3.4. (**) Soit $a \in A$, on note

$$M(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \tau(a^n), \qquad R(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n(a, \dots, a)$$

Montrer que les séries M et R satisfont

$$R(zM(z)) = M(z)$$

4. Convolution libre

Exercice 4.1. Calculer la transformée de Stieltjes et la R-transformée des lois suivantes:

– loi de Bernoulli:

$$p\delta_0 + (1-p)\delta_1$$

– (*) loi du demi-cercle:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\sqrt{4t-x^2}dx; \quad x \in [-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]$$

– (*) loi de l'arc-sinus:

$$\frac{dx}{\pi\sqrt{4-x^2}}; \quad x \in [-2, 2]$$

– loi de Cauchy:

$$\frac{dx}{2\pi(1+x^2)}$$

Exercice 4.2. Que vaut la convolution libre $\mu \boxplus \delta_x$?

Exercice 4.3. Montrer que la convolution libre commute à la dilatation ϕ_λ : $x \to \lambda x$:

$$\phi_\lambda(\mu \boxplus \nu) = \phi_\lambda(\mu) \boxplus \phi_\lambda(\nu)$$

(et, plus généralement, aux transformations affines).

Exercice 4.4. La convolution libre $\mu \boxplus \nu$ est-elle une fonction affine de ses arguments?

Exercice 4.5. (*) Calculer la convolution libre de $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ avec elle-même. Plus généralement, calculer la convolution libre de deux lois de Bernoulli (de la forme $p\delta_0 + (1-p)\delta_1$).

Exercice 4.6. (*) Calculer la convolution libre de μ et d'une loi de Cauchy. Que remarque-t-on?

Exercice 4.7. Calculer la convolution libre de deux lois du demi-cercle (de variances s et t).