Inverses de Pólya

Olivier Bodini[1], Antoine Genitrini[2] et
Nicolas Rolin[1]

[1]Université Paris 13 – LIPN

[2]UPMC Paris – LIP6

ALEA 2015

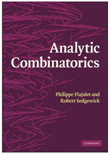
Multiset

$$\{2,2,5\} = \{2,5,2\} = \{5,2,2\}$$

$$\{2,2,5\} \Longleftrightarrow 20$$

$$\text{Multiset}\ (\{\text{nombres premiers}\}) \Longleftrightarrow \{\text{entiers} > 1\}$$

C'est l'une des constructions fondamentales de *Analytic Combinatorics*.



Introduction

Question

$\{0,1\}^n \Longleftrightarrow$ Multiset $(\{???\})$

Introduction

Question

$\{0,1\}^n \Longleftrightarrow$ Multiset $(\{???\})$

Réponse

$\{0,1\}^n \Longleftrightarrow$ Multiset $(\{\text{mots de Lyndon}\})$

Les mots de Lyndon :
0,1,01,001,011,0001,0011,0111,...
= l'ensemble des mots qui sont plus petits que tous leurs suffixes non triviaux.

Exemple : Le mot $x = 0110100110010110 = 011 . 01 . 0011 . 001011 . 0$
En effet $011 > 01 > 0011 > 001011 > 0$.

Définitions

Une *classe combinatoire* $\mathcal{C}$ est un ensemble d'objets, avec une fonction de taille, noté par $|\cdot| : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ et telle que pour chaque entier n, le sous-ensemble $\mathcal{C}_n$ des objets de taille n est fini de cardinalité C_n.
On définit la *fonction génératrice ordinaire* d'une classe combinatoire $\mathcal{C}$ étant :

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} z^{|\gamma|}.$$

Méthode symbolique

Petit dictionnaire des constructions

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \to C(z) = A(z) + B(z)$$

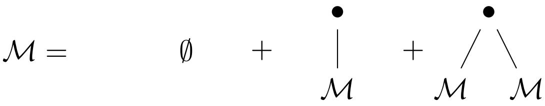
$$\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} \to C(z) = A(z)B(z)$$

$$\mathcal{C} = Seq(\mathcal{A}) \to C(z) = \frac{1}{1 - A(z)}$$

$$\vdots$$

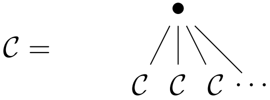
Méthode symbolique

- Arbres de Motzkin (unaires-binaires) :



$$M(z) = 1 + zM(z) + zM(z)^2$$

- Arbres de Catalan :



$$C(z) = \frac{z}{1 - C(z)}$$

Multiset

On note $\mathcal{A} = \mathrm{MSet}(\mathcal{B})$ quand $\mathcal{A}$ est obtenu en formant tous les multi-ensembles d'éléments de $\mathcal{B}$ (avec $\mathcal{B}_0 = \emptyset$).

$$\mathcal{A} = \mathrm{MSet}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \mathrm{MSet}(B(z)) = \begin{cases} \prod_{p=1}^{+\infty} (1 - z^n)^{-B_n}, \\ \exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} B(z^p) \right) \end{cases}.$$

Powerset

On note $\mathcal{A} = \textrm{PS}\textsc{et}(\mathcal{B})$ quand $\mathcal{A}$ est obtenu en formant tous les ensembles d'éléments de $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} = \textrm{PS}\textsc{et}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \textrm{PS}\textsc{et}(B(z)) = \begin{cases} \prod_{p=1}^{+\infty} (1 + z^n)^{B_n}, \\ \exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} B(z^p) \right). \end{cases}$$

Cycle

On note $\mathcal{A} = \textsc{Cyc}(\mathcal{B})$ quand $\mathcal{A}$ est obtenu en prenant les séquences de $\mathcal{B}$, mais en ne comptant qu'un seul représentant d'un shift circulaire.

$$\mathcal{A} = \textsc{Cyc}(\mathcal{B}) \Rightarrow A(z) = \textsc{Cyc}(B(z)) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p} \ln\left(\frac{1}{1 - B(z^p)}\right),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

$$\varphi(p) = p \prod_{k|p} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Multiset et transformée d'Euler

Soit $A(z) = \mathrm{MSet}(B(z))$.
Transformée d'Euler :

$$A_n = \frac{1}{n}\left(C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k A_{n-k}\right)$$

où

$$C_n = \sum_{d|n} d B_d,$$

Transformée d'Euler inverse

Soit $A(z) = \text{MSET}(B(z))$.
Transformée d'Euler inverse :

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) C_d$$

où

$$C_n = nA_n - \sum_{k=1}^{n-1} C_k A_{n-k},$$

Transformée d'Euler inverse dans OEIS

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

inverse euler transform | Search | Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

Search: **inverse euler transform**

Displaying 1-10 of 447 results found. page 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... 45

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A112340 Triangle read by rows of numbers b_{n,k}, n>=1, 1<=k<=n such that prod_{n,k} 1/(1-q^n t^k)^{b_{n,k}} = 1+ sum_{i,j>=1} S_{i,j} q^i t^j where S_{i,j} are entries in the table A008277 (the **inverse Euler transformation** of the table of Stirling numbers of the second kind). +60 7

1, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 5, 3, 0, 1, 13, 16, 4, 0, 1, 28, 67, 34, 5, 0, 1, 60, 249, 229, 65, 6, 0, 1, 123, 853, 1265, 609, 107, 7, 0, 1, 251, 2787, 6325, 4696, 1376, 168, 8, 0, 1, 506, 8840, 29484, 31947, 14068, 2772, 244, 9, 0, 1, 1018, 27503, 131402, 199766, 124859, 36252 (list; table; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET 1, 5

Multiset inverse

Théorème

L'inverse compositionel de l'opérateur multiset est :

$$\mathrm{MSET}^{-1}(A(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \ln(A(z^k)),$$

où μ est la fonction de Möbius.

$$\sum_{k|i} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

Preuve du multiset inverse

Rappel :

$$\mathrm{MSet}(A(z)) = \exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} B(z^p)\right)$$

$$\mathrm{MSet}^{-1}(A(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \ln(A(z^k))$$

Preuve.

$$\mathrm{MSet}^{-1} \circ \mathrm{MSet}(A(z)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A(z^i)}{i} \sum_{k|i} \mu(k)$$

$$\mathrm{MSet} \circ \mathrm{MSet}^{-1}(A(z)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln(A(z^i))}{i} \sum_{k|i} \mu(k)\right)$$

On utilise

$$\sum_{k|i} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

$\square$

Powerset inverse

Théorème

L'inverse compositionel de l'opérateur powerset est :

$$\mathrm{PSet}^{-1}(A(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(k)}{k} \ln(A(z^k)),$$

où f [A067856] est la fonction vérifiant :

$$\sum_{k|i} (-1)^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

Preuve du powerset inverse

Rappel :

$$\mathrm{PS}\textsc{et}(B(z)) = \exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} B(z^p)\right)$$

$$\mathrm{PS}\textsc{et}^{-1}(A(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(k)}{k} \ln(A(z^k))$$

Preuve.

$$\mathrm{PS}\textsc{et}^{-1} \circ \mathrm{PS}\textsc{et}(A(z)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A(z^i)}{i} \sum_{k|i} (-1)^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right)$$

$$\mathrm{PS}\textsc{et} \circ \mathrm{PS}\textsc{et}^{-1}(A(z)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln(A(z^i))}{i} \sum_{k|i} (-1)^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right)\right)$$

On utilise que

$$\sum_{k|i} (-1)^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

□

Cycle inverse

Théorème

L'inverse compositionel de l'opérateur cycle est :

$$\mathrm{C{\scriptstyle YC}}^{-1}(A(z)) = 1 - \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} A(z^k)\right)\right),$$

où g [A023900] est la fonction vérifiant :

$$\sum_{k|i} g(k)\varphi\left(\frac{i}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

Preuve du cycle inverse

Rappel :

$$\mathrm{Cyc}(A(z)) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p} \ln\left(\frac{1}{1-B(z^p)}\right)$$

$$\mathrm{Cyc}^{-1}(A(z)) = 1 - \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} A(z^k)\right)\right)$$

Preuve.

$$\mathrm{Cyc}^{-1} \circ \mathrm{Cyc}(A(z)) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{1-A(z^i)}\right)}{i} \sum_{k|i} g(k)\varphi\left(\frac{i}{k}\right)\right)$$

$$\mathrm{Cyc} \circ \mathrm{Cyc}^{-1}(A(z)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A(z^i)}{i} \sum_{k|i} g(k)\varphi\left(\frac{i}{k}\right)$$

On utilise que

$$\sum_{k|i} g(k)\varphi\left(\frac{i}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{quand } i = 1 \\ 0 & \text{quand } i > 1 \end{cases}$$

$\square$

Récapitulatif

	opérateur	inverse
Multiset	$\exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} B(z^p)\right)$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \ln(A(z^k))$
Powerset	$\exp\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} B(z^p)\right)$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(k)}{k} \ln(A(z^k))$
Cycle	$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varphi(p)}{p} \ln\left(\frac{1}{1-B(z^p)}\right)$	$1 - \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} A(z^k)\right)\right)$

Mots de Lyndon

Soit les langage des mots à k lettres $S_k(z)$:

$$S_k(z) = \frac{1}{1 - kz}.$$

On y applique le MSET^{-1} :

$$L_k(z) = \mathrm{MSET}^{-1}(S_k(z)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i} \ln\left(\frac{1}{1 - kz^i}\right)$$

$$L_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p|n} \frac{\mu(\frac{n}{p}) k^p}{n} z^n$$

Ce sont les mots de Lyndon.

Mots de ???

On peut appliquer le $\textsc{MSet}^{-1}$ à $L_k(z) + 1$.

Dans le cas $k = 2$ on obtient une suite commençant par :

$2, 1, 2, 3, 6, 9, 18, 30, 56, 99, 186, 335, 630, \ldots$

Mots de ???

On peut appliquer le $\textsc{MSet}^{-1}$ à $L_k(z) + 1$.

Dans le cas $k = 2$ on obtient une suite commençant par :

$2, 1, 2, 3, 6, 9, 18, 30, 56, 99, 186, 335, 630, \ldots$

Interprétation ouverte...

Multiset inverse des arbres de Catalan

Série génératrice des arbres de Catalan $\mathcal{C}$:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{-4\,z + 1}}{2z}.$$

On y applique le $\textsc{MSet}^{-1}$:

Multiset inverse des arbres de Catalan

Série génératrice des arbres de Catalan $\mathcal{C}$:

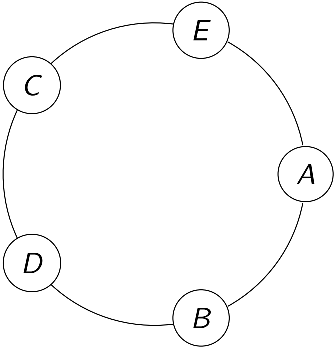
$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{-4\,z + 1}}{2z}.$$

On y applique le $\mathrm{MS{\scriptsize ET}}^{-1}$:
Suite qui semble positive croissante : $1, 1, 1, 3, 8, 25, 75, 245, 800, \ldots,$
qui coïncide avec la suite [A022553] de OEIS.

Multiset inverse des arbres de Catalan

$\mathrm{MSET}^{-1}(\mathcal{C})$: cycles primitifs d'arbres de Catalan.

[primitif = pas de symétrie circulaire]

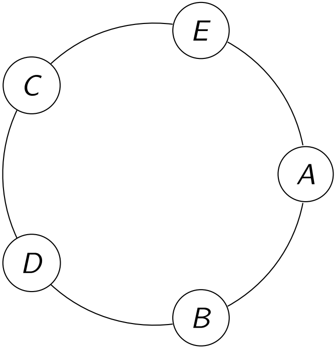


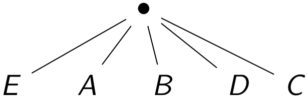
$A, B, C, D, E \in \mathcal{C}$

Multiset inverse des arbres de Catalan

On va transformer cannoniquement un cycle primaire d'arbres de Catalan en arbre de Catalan. On choisit un ordre total sur les arbres de Catalan. On choisit le représentant le plus grand dans l'ordre lexicographique et on le place fils gauche.

Ex : $A < B < C < D < E$

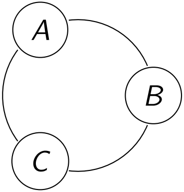


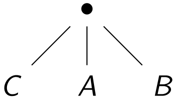


Multiset inverse des arbres de Catalan

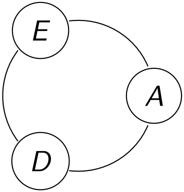
$A < B < C < D < E$

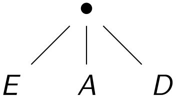
$\alpha =$





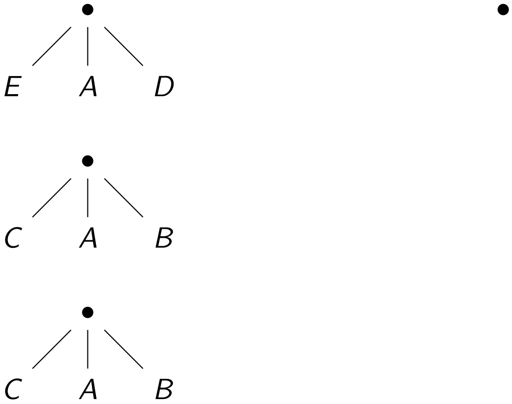
$\beta =$



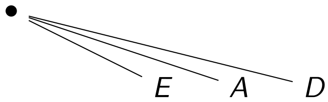


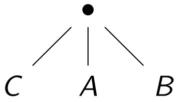
A quel arbre de Catalan correspond $\{\alpha, \alpha, \beta\}$?

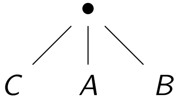
$A < B < C < D < E$



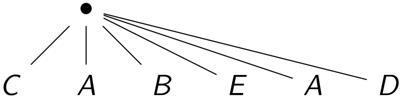
$$A < B < C < D < E$$

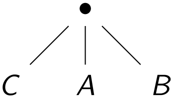




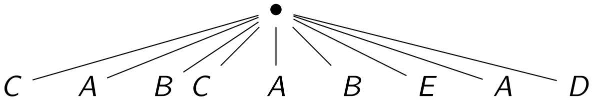


$A < B < C < D < E$





$A < B < C < D < E$



Séries de Dirichlet

On veut regarder ce que ces résultats donnent dans le cadre de classes combinatoires où la taille des objets se multiplie.
$|(a, b)| = |a| \cdot |b|$

Séries de Dirichlet

On veut regarder ce que ces résultats donnent dans le cadre de classes combinatoires où la taille des objets se multiplie.
$|(a, b)| = |a| \cdot |b|$

On définit la *fonction génératrice de Dirichlet* d'une classe combinatoire $\mathcal{C}$ étant :

$$C(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{C_n}{n^s}.$$

Multiset de séries de Dirichlet

On dispose aussi du multiset sur les séries de Dirichlet :

multiset

$$\mathrm{MSET}(C(s)) = \exp\left(\sum_{p\geq 1} \frac{C(ps)}{p}\right)$$

Extension de MSET^{-1} aux séries de Dirichlet immédiate :

multiset inverse

$$\mathrm{MSET}^{-1}(C(s)) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \ln(C(ks))$$

Nombres premiers

Notamment pour $C_n = 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Si on cherche la série génératrice correspondante à l'indicatrice des nombres premiers $P(s)$, on peut prendre le $\mathrm{MS{\scriptstyle ET}}^{-1}$ de $\zeta(s)$:

$$P(s) := \sum_{n \text{ premier}} \frac{1}{n^s} = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k) \ln(C(ks))}{k}$$

Conclusion

On a obtenu:

- une étude des inverses des opérateurs combinatoires (multiset, cycle, powerset).
- les formules exactes pour les séries génératrices associées.
- une preuve bijective sur les arbres de Catalan (explication combinatoire de MSET^{-1} des arbres de Catalan).
- une extension aux séries génératrices de Dirichlet.

Perspectives :

- étudier le phénomène du $\mathrm{MSET}^{-1}(\mathrm{MSET}^{-1})$ qui reste une suite d'entiers positifs.
- analyser les asymptotiques $\mathrm{MSET}^{-1}(A(z))$ connaissant $A(z)$.