

Percolation sur les cartes uniformes infinies du demi-plan

Loïc Richier

UMPA, École Normale Supérieure de Lyon

Journées ALEA - 17 Mars 2015

Introduction

On s'intéresse à la **percolation de Bernoulli** sur les **cartes uniformes infinies du demi-plan**, en particulier aux **seuils de percolation** et aux **probabilités de croisement**.

Définitions et notations

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère \mathbb{S}^2 (à homéomorphisme préservant l'orientation près).

Définitions et notations

Définition

Une carte plane est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère \mathbb{S}^2 (à homéomorphisme préservant l'orientation près).

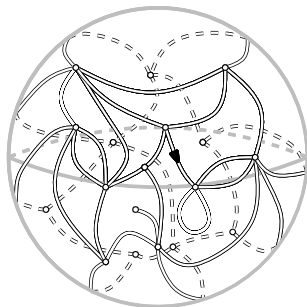


Figure: Une carte plane **enracinée**.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{\text{cartes planaires enracinées}\}.$

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{\text{cartes planaires enracinées}\}$.

Définition

La topologie locale sur \mathcal{M}^f est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := (1 + \sup \{r \geq 0 \mid B_r(\mathbf{m}) \simeq B_r(\mathbf{m}')\})^{-1}.$$

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{\text{cartes planaires enracinées}\}$.

Définition

La topologie locale sur \mathcal{M}^f est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := \left(1 + \sup \{r \geq 0 \mid B_r(\mathbf{m}) \simeq B_r(\mathbf{m}')\}\right)^{-1}.$$

- $B_r(\mathbf{m}) =$ boule de rayon r dans \mathbf{m} pour la distance de graphe.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{\text{cartes planaires enracinées}\}$.

Définition

La topologie locale sur \mathcal{M}^f est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := (1 + \sup \{r \geq 0 \mid B_r(\mathbf{m}) \simeq B_r(\mathbf{m}')\})^{-1}.$$

- $B_r(\mathbf{m})$ = boule de rayon r dans \mathbf{m} pour la distance de graphe.
- Le complété (\mathcal{M}, d_{loc}) de (\mathcal{M}^f, d_{loc}) est polonais.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{\text{cartes planaires enracinées}\}$.

Définition

La topologie locale sur \mathcal{M}^f est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := (1 + \sup \{r \geq 0 \mid B_r(\mathbf{m}) \simeq B_r(\mathbf{m}')\})^{-1}.$$

- $B_r(\mathbf{m})$ = boule de rayon r dans \mathbf{m} pour la distance de graphe.
- Le complété (\mathcal{M}, d_{loc}) de (\mathcal{M}^f, d_{loc}) est polonais.
- Les éléments de $\mathcal{M}^\infty := \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^f$ sont des cartes infinies.

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .
- $* \in \{\triangle, \square\}$
 - \triangle -angulations = triangulations de type-2.
 - \square -angulations = quadrangulations.

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .
- $* \in \{\triangle, \square\}$
 - \triangle -angulations = triangulations de type-2.
 - \square -angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .
- $* \in \{\triangle, \square\}$
 - \triangle -angulations = triangulations de type-2.
 - \square -angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.
- $\nu_n^* = \text{mesure uniforme sur } \mathcal{M}_n^*$.

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .
- $* \in \{\triangle, \square\}$
 - \triangle -angulations = triangulations de type-2.
 - \square -angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.
- $\nu_n^* =$ **mesure uniforme** sur \mathcal{M}_n^* .

Théorème (Angel, Schramm '03 (\triangle), Krikun '05 (\square))

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\nu_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_\infty^* = \text{loi de l'UIP-}^*.$$

Cartes uniformes infinies du plan

- p -angulation = carte dont toutes les faces ont degré p .
- $* \in \{\triangle, \square\}$
 - \triangle -angulations = triangulations de type-2.
 - \square -angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.
- $\nu_n^* = \text{mesure uniforme sur } \mathcal{M}_n^*$.

Théorème (Angel, Schramm '03 (\triangle), Krikun '05 (\square))

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\nu_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_\infty^* = \text{loi de l'UIP-}^*.$$

$* = \triangle$: UIPT = "Uniform Infinite Planar Triangulation".

$* = \square$: UIPQ = "Uniform Infinite Planar Quadrangulation".

Plongement

ν_∞^* est supportée par les *-angulations du **plan**.

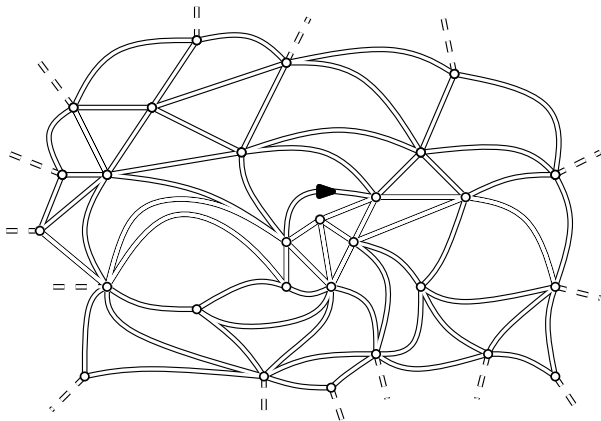


Figure: Un plongement de l'UIPT dans le plan \mathbb{R}^2 .

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p -angulation du m -gone = carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à bord simple.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p -angulation du m -gone = carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à bord simple.

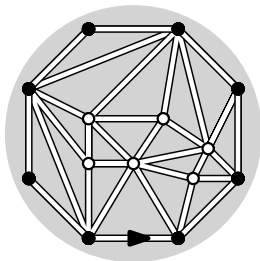


Figure: Une triangulation de l'octogone avec 6 sommets internes.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p -angulation du m -gone = carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à bord simple.
- $\mathcal{M}_{n,m}^* = \{*\text{-angulations du } m\text{-gone avec } n \text{ sommets internes, enracinées sur le bord}\}$.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p -angulation du m -gone = carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à bord simple.
- $\mathcal{M}_{n,m}^* = \{*\text{-angulations du } m\text{-gone avec } n \text{ sommets internes, enracinées sur le bord}\}$.
- $\varphi_{n,m}^* := \#\mathcal{M}_{n,m}^* < \infty$.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p -angulation du m -gone = carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à bord simple.
- $\mathcal{M}_{n,m}^* = \{*\text{-angulations du } m\text{-gone avec } n \text{ sommets internes, enracinées sur le bord}\}$.
- $\varphi_{n,m}^* := \#\mathcal{M}_{n,m}^* < \infty$.
- $\nu_{n,m}^* =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_{n,m}^*$.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel, '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\nu_{n,m}^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,m}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du } m\text{-gone.}$

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel, '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\nu_{n,m}^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,m}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du } m\text{-gone.}$

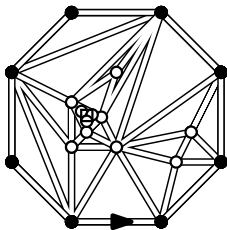


Figure: Un plongement de l'UIP* de l'octogone dans un disque épointé.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel, '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\nu_{n,m}^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,m}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du } m\text{-gone.}$
- $\nu_{\infty,m}^* \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,\infty}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du demi-plan ou UIHP-}^*.$

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel, '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\nu_{n,m}^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,m}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du } m\text{-gone.}$
- $\nu_{\infty,m}^* \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nu_{\infty,\infty}^* = \text{loi de l'UIP-}^* \text{ du demi-plan ou UIHP-}^*.$

* = \triangle : UIHPT = “Uniform Infinite Half-Planar Triangulation”.

* = \square : UIHPQ = “Uniform Infinite Half-Planar Quadrangulation”.

Plongement

$\nu_{\infty, \infty}^*$ est supportée par les *-angulations du **demi-plan** à bord infini.

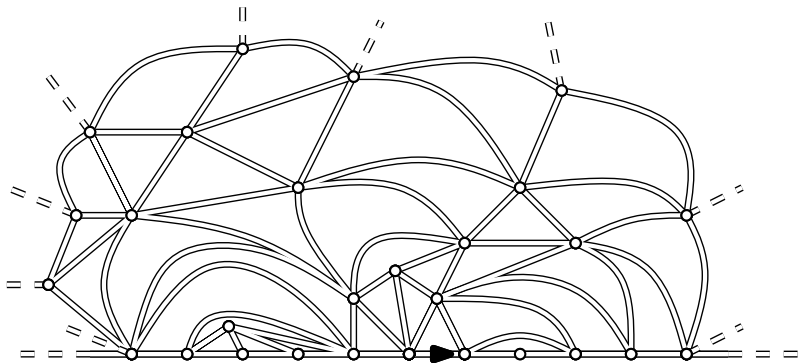


Figure: Un plongement de l'UIHPT dans le demi-plan \mathbb{H} .

Mesure de Boltzmann

On introduit la série génératrice des *-angulations du m -gone,

$$F_m^*(x) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{n,m}^* x^n,$$

de rayon de convergence $\rho_{\Delta} = 2/27$, $\rho_{\square} = 1/12$.

Mesure de Boltzmann

On introduit la série génératrice des $*$ -angulations du m -gone,

$$F_m^*(x) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{n,m}^* x^n,$$

de rayon de convergence $\rho_\Delta = 2/27$, $\rho_\square = 1/12$.

La fonction de partition est définie par

$$Z_m^* := F_m^*(\rho_*) = \sum_{n \geq 0} \varphi_{n,m}^* \rho_*^n < \infty.$$

Mesure de Boltzmann

Définition

La ***-mesure de Boltzmann** (ou **-mesure libre*) μ_m^* sur les **-angulations* du m -gone est définie par :

$$\forall \mathbf{m} \in \mathcal{M}_{n,m}^*, \mu_m^*(\mathbf{m}) := \frac{\rho_*^n}{Z_m^*}.$$

Mesure de Boltzmann

Définition

La **-mesure de Boltzmann* (ou **-mesure libre*) μ_m^* sur les **-angulations* du m -gone est définie par :

$$\forall \mathbf{m} \in \mathcal{M}_{n,m}^*, \mu_m^*(\mathbf{m}) := \frac{\rho_m^n}{Z_m^*}.$$

Théorème (Angel, '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mu_m^* \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nu_{\infty, \infty}^*.$$

Configurations

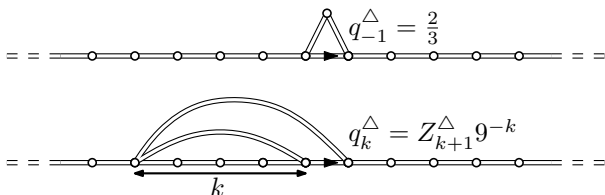


Figure: Configurations de la face incidente à la racine dans l'UIHPT.

Configurations

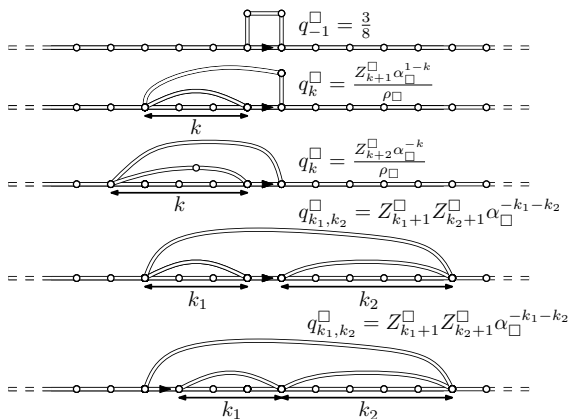


Figure: Configurations de la face incidente à la racine dans l'UIHPQ.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel, '04)

Soit M de loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, et A la face incidente à la racine. Alors $M \setminus A$ a une unique composante connexe infinie M' , et au plus une (\triangle) ou deux (\square) finies, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 .

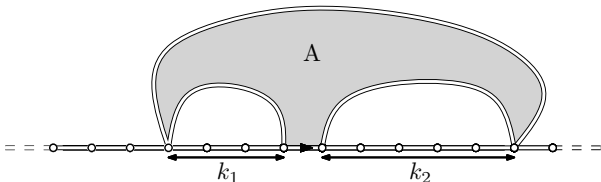


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel, '04)

Soit M de loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, et A la face incidente à la racine. Alors $M \setminus A$ a une unique composante connexe infinie M' , et au plus une (\triangle) ou deux (\square) finies, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 . De plus, M' a la loi $\nu_{\infty, \infty}^*$

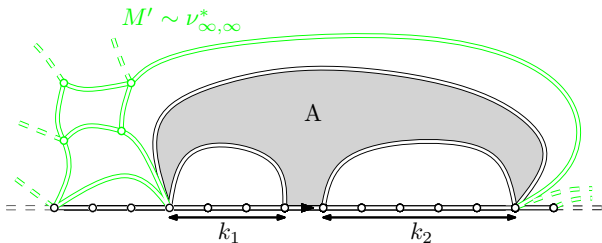


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel, '04)

Soit M de loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, et A la face incidente à la racine. Alors $M \setminus A$ a une unique composante connexe infinie M' , et au plus une (Δ) ou deux (\square) finies, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 . De plus, M' a la loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 sont des $*$ -angulations de Boltzmann

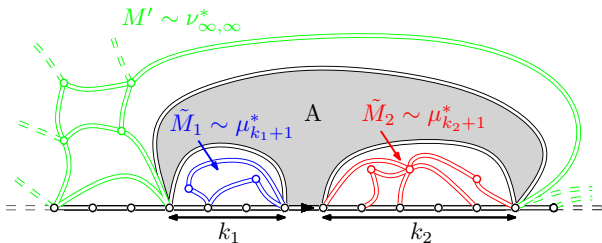


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel, '04)

Soit M de loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, et A la face incidente à la racine. Alors $M \setminus A$ a une unique composante connexe infinie M' , et au plus une (\triangle) ou deux (\square) finies, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 . De plus, M' a la loi $\nu_{\infty, \infty}^*$, \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 sont des $*$ -angulations de Boltzmann et M' , \tilde{M}_1 et \tilde{M}_2 sont indépendantes.

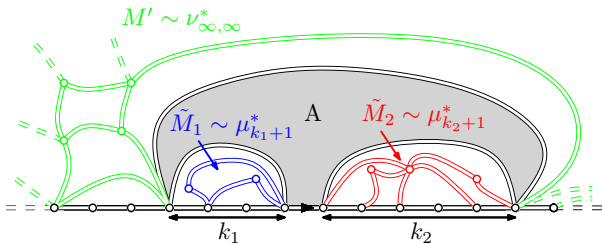


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

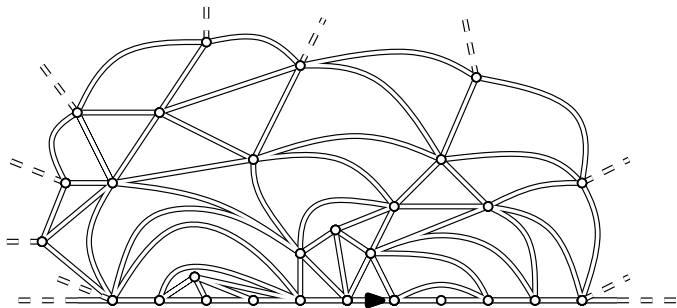


Figure: L'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque **site**, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

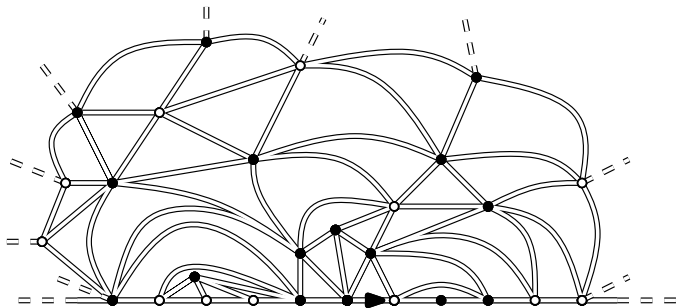


Figure: Percolation par site sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, **arête** ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

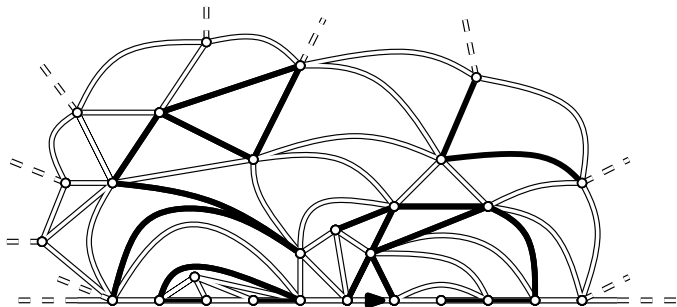


Figure: Percolation par arête sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, arête ou **face** est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

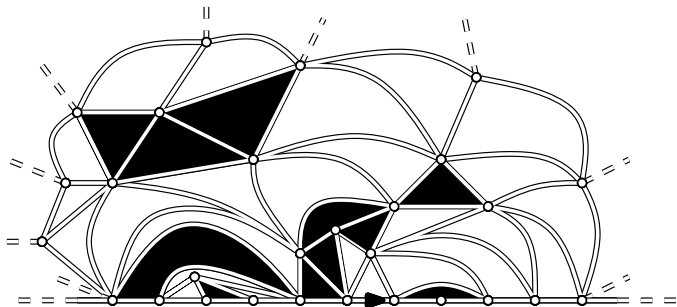


Figure: Percolation par face sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

Pour une carte $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ fixée, on définit la mesure sur $\{0, 1\}^{e(\mathbf{m})}$:

$$\mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})} := (p\delta_1 + (1 - p)\delta_0)^{\otimes e(\mathbf{m})}.$$

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

Pour une carte $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ fixée, on définit la mesure sur $\{0, 1\}^{e(\mathbf{m})}$:

$$\mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})} := (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes e(\mathbf{m})}.$$

La mesure \mathbb{P}_p sur $\{(\mathbf{m}, c) | \mathbf{m} \in \mathcal{M}, c \in \{0, 1\}^{e(\mathbf{m})}\}$ induite par le modèle de percolation est définie par

$$\mathbb{P}_p(d\mathbf{m}, dc) := \nu_{\infty, \infty}^*(d\mathbf{m}) \mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})}(dc).$$

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-* : chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

Pour une carte $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ fixée, on définit la mesure sur $\{0, 1\}^{e(\mathbf{m})}$:

$$\mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})} := (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes e(\mathbf{m})}.$$

La mesure \mathbb{P}_p sur $\{(\mathbf{m}, c) | \mathbf{m} \in \mathcal{M}, c \in \{0, 1\}^{e(\mathbf{m})}\}$ induite par le modèle de percolation est définie par

$$\mathbb{P}_p(d\mathbf{m}, dc) := \nu_{\infty, \infty}^*(d\mathbf{m}) \mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})}(dc).$$

Modèle **annealed**.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- \mathcal{C}^* := cluster de percolation ouvert issu de l'origine.

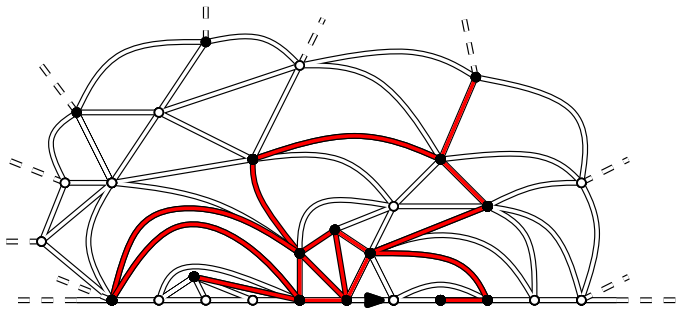


Figure: Cluster de percolation par site ouvert sur l'UIHPT.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- \mathcal{C}^* := cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}^*| = +\infty\}$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- \mathcal{C}^* := cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}^*| = +\infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta^*(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}^*| = +\infty)$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- \mathcal{C}^* := cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}^*| = +\infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta^*(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}^*| = +\infty)$.

Il existe un point critique p_c^* appelé **seuil de percolation** tel que

$$\begin{cases} \Theta^*(p) = 0 & \text{si } p < p_c^* \\ \Theta^*(p) > 0 & \text{si } p > p_c^* \end{cases} .$$

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-* sont connus.

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-* sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\text{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\text{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\text{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-* sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\text{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\text{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\text{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Quid de $p_{c,\text{site}}^{\square}$?

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-* sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\text{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\text{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\text{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_{c,\text{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Quid de $p_{c,\text{site}}^{\square}$?

Björnberg et Stefánsson '14 : $0.5511 \leq p_{c,\text{site}}^{\square} \leq 0.5581$.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHP.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

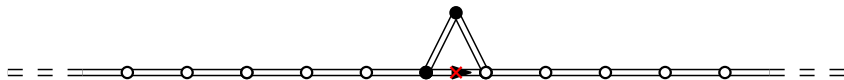


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHP.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

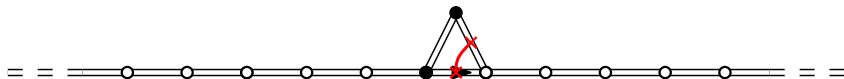


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHP.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

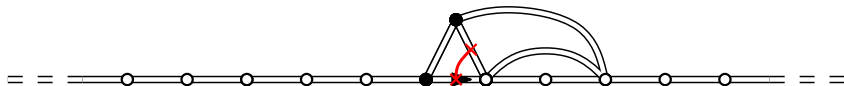


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

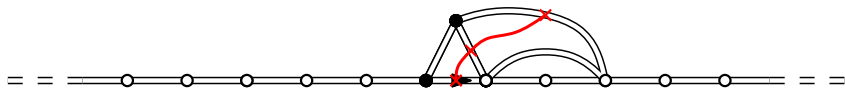


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHP.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

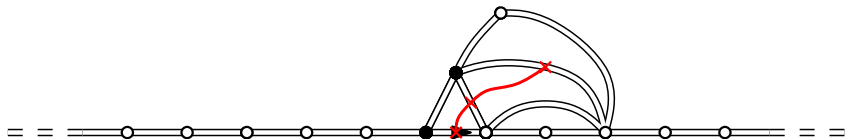


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

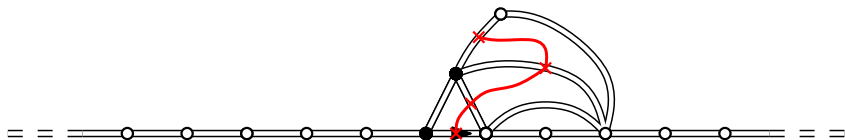


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

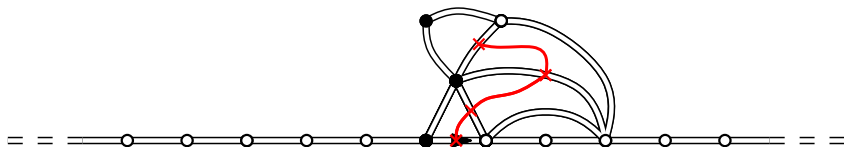


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

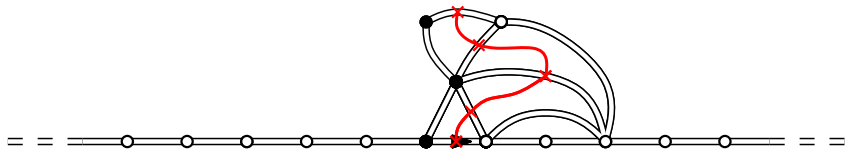


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Le processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-* face par face.

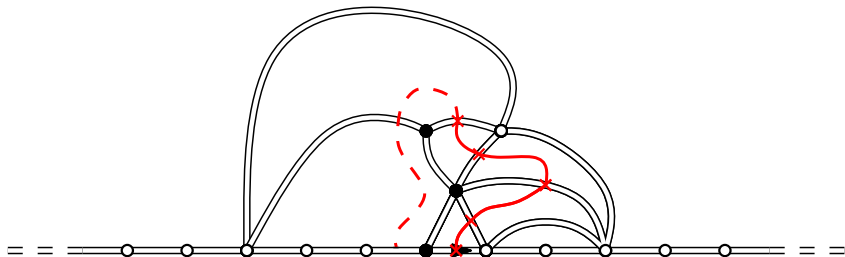


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Le processus d'exploration pour la percolation par site sur l'UIHPQ est mal défini.

Processus d'exploration

Le processus d'exploration pour la percolation par site sur l'UIHPQ est mal défini.

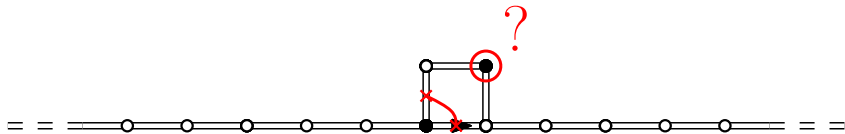


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Résultat

Théorème (R., '14)

Pour la percolation de Bernoulli par site sur l'UIHPQ,

$$p_{c,\text{site}}^{\square} = \frac{5}{9}.$$

De plus, il n'y a pas percolation au point critique p.s. :

$$\Theta_{\text{site}}^{\square} (p_{c,\text{site}}^{\square}) = 0.$$

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

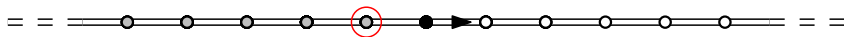


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

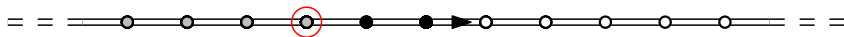


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

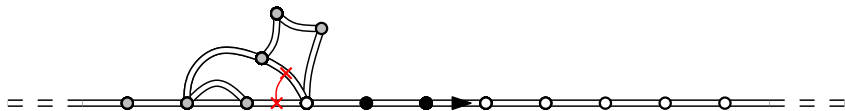


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

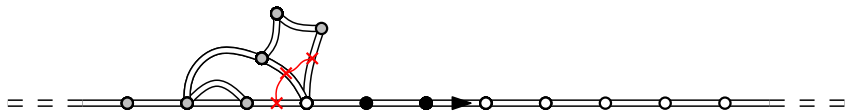


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

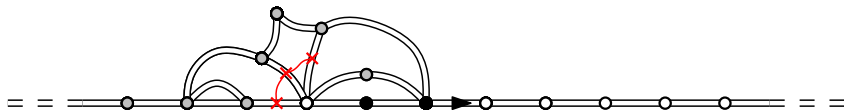


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

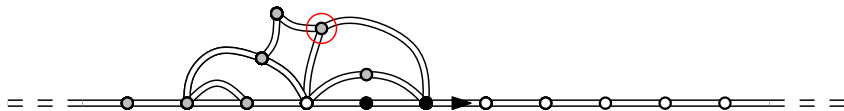


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

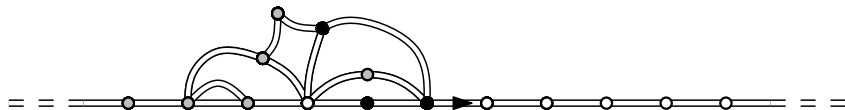


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

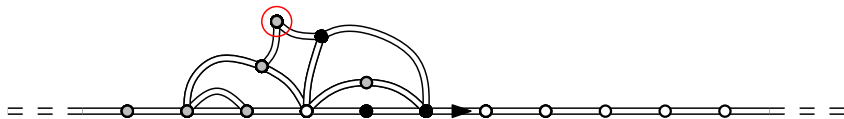


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

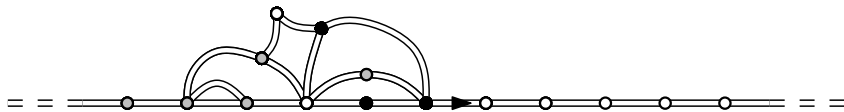


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

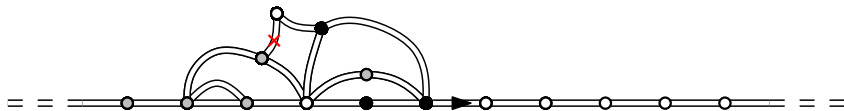


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

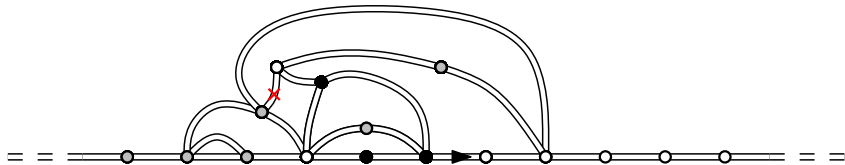


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

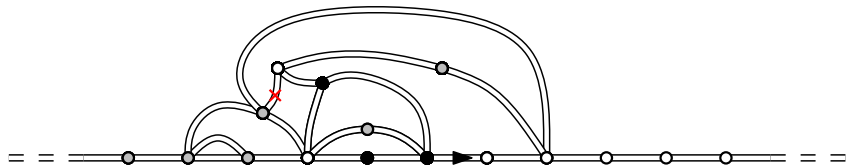


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

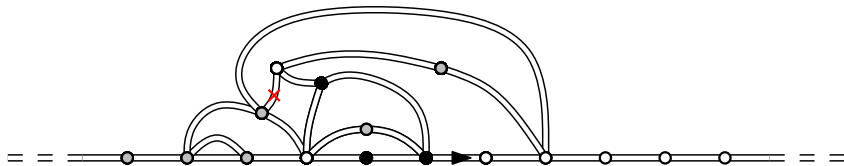


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

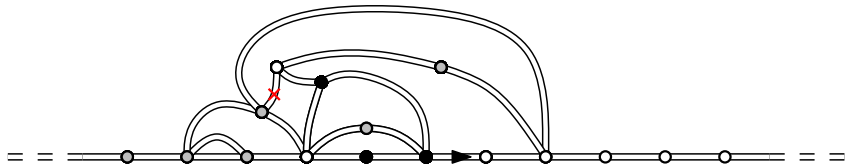


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).
- Le processus termine $\implies |\mathcal{C}^\square| < +\infty$.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

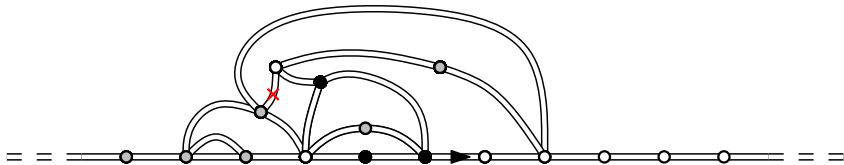


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).
- Le processus termine $\implies |\mathcal{C}^\square| < +\infty$.
- Le processus révèle une infinité de sommets noirs $\implies |\mathcal{C}^\square| = +\infty$.

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

B_n := longueur du segment noir sur le bord à l'étape n .

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

B_n := longueur du segment noir sur le bord à l'étape n .



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \left\{ \right.$$

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

B_n := longueur du segment noir sur le bord à l'étape n .



Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p. \end{cases}$$

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

B_n := longueur du segment noir sur le bord à l'étape n .

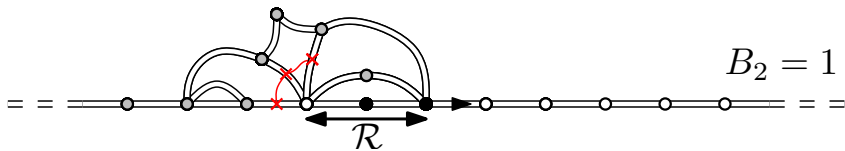


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p. \\ -R + 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{C,site}^{\square}$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,site}^{\square}$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{C,\text{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1 - p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{C,site}^{\square}$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1 - p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{C,site}^{\square}$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1 - p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \implies \mathbb{P}_p(\exists n \geq 0 | B_n = 0) = 1$

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{C,site}^{\square}$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1 - p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \implies \mathbb{P}_p(\exists n \geq 0 | B_n = 0) = 1$
- $p > 5/9 \implies \mathbb{P}_p(B_n \rightarrow +\infty) > 0$

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\text{site}}^\square$.

- $(B_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée en 0).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1 - p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \implies \mathbb{P}_p(\exists n \geq 0 | B_n = 0) = 1$
- $p > 5/9 \implies \mathbb{P}_p(B_n \rightarrow +\infty) > 0$

donc $p_{c,\text{site}}^\square = 5/9$.

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

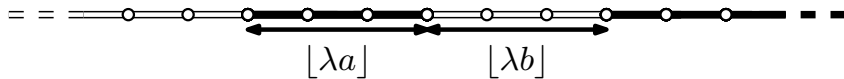


Figure: Coloriage initial du bord.

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

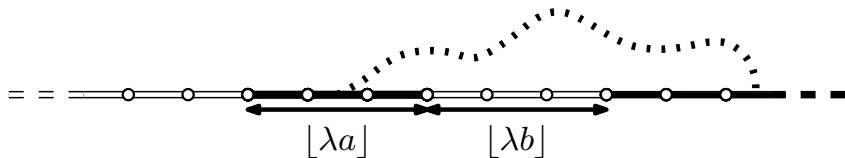


Figure: L'évènement de croisement $C^*(\lambda_a, \lambda_b)$.

- $C^*(\lambda_a, \lambda_b) =$ "les deux segments noirs sont dans le même cluster".

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

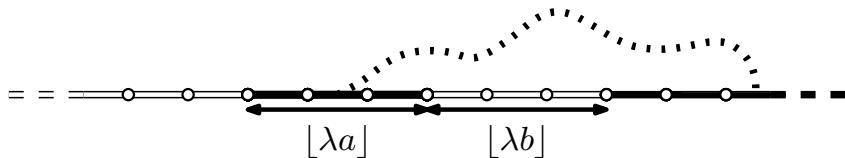


Figure: L'évènement de croisement $C^*(\lambda a, \lambda b)$.

- $C^*(\lambda a, \lambda b)$ = "les deux segments noirs sont dans le même cluster".
- Limite d'échelle : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C^*(\lambda a, \lambda b))$.

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(C_{\text{site}}^{\Delta}(\lambda a, \lambda b) \right) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{b - a}{a + b} \right).$$

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(C_{\text{site}}^{\Delta}(\lambda a, \lambda b) \right) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{b - a}{a + b} \right).$$

- Analogue de la formule de Cardy-Smirnov.

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\mathcal{C}_{\text{site}}^{\Delta}(\lambda a, \lambda b) \right) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{b - a}{a + b} \right).$$

- Analogue de la formule de Cardy-Smirnov.
- Conjecture d'universalité de Cardy : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathcal{C}^*(\lambda a, \lambda b))$ ne dépend pas du modèle de percolation, ni du degré des faces.

Résultat

Théorème (R. '14)

Pour la percolation critique par site, arête et face sur l'UIHPT et l'UIHPQ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathcal{C}^*(\lambda a, \lambda b)) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{b-a}{a+b} \right).$$

La limite d'échelle des probabilités de croisement est universelle.

Merci pour votre attention !

