Jouer avec les automates cellulaires probabilistes : combinatoire, percolation, et physique statistique

Irène Marcovici, Institut Élie Cartan de Lorraine (Nancy)

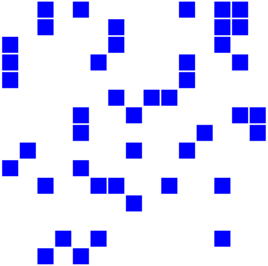
Travail commun avec James Martin et Alexander Holroyd

Rencontres ALEA, Jeudi 19 mars 2015

Plan

Définition du jeu

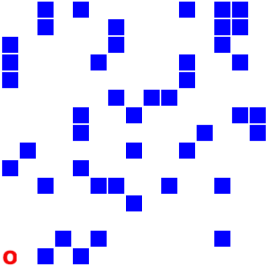
Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.



$p = 0.2$

Définition du jeu

Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.

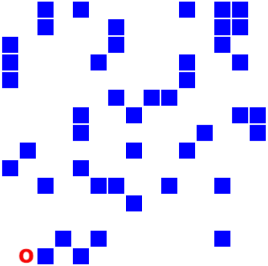


$p = 0.2$

Un pion, que **deux** joueurs déplacent alternativement, d'un pas vers le haut ou vers la droite.

Définition du jeu

Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.

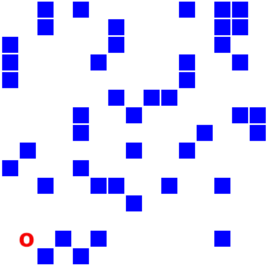


$p = 0.2$

Un pion, que **deux** joueurs déplacent alternativement, d'un pas vers le haut ou vers la droite.

Définition du jeu

Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.

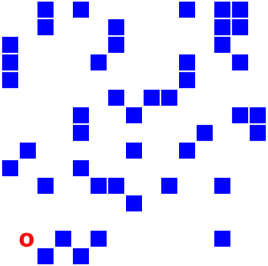


$p = 0.2$

Un pion, que **deux** joueurs déplacent alternativement, d'un pas vers le haut ou vers la droite.

Définition du jeu

Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.

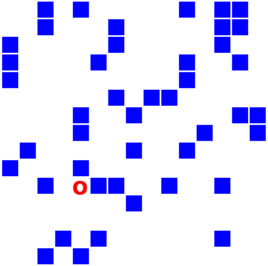


$p = 0.2$

Un pion, que **deux** joueurs déplacent alternativement, d'un pas vers le haut ou vers la droite.
Le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

Définition du jeu

Damier infini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cases coloriés en bleu indépendamment avec proba p.



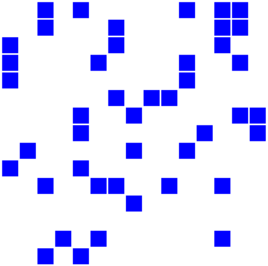
$p = 0.2$

Un pion, que **deux** joueurs déplacent alternativement, d'un pas vers le haut ou vers la droite.
Le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

Positions gagnantes, perdantes, nulles

Une position est :

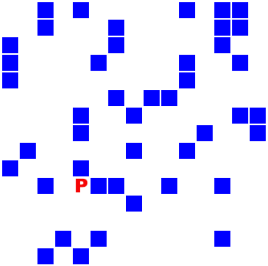
- gagnante (**G**) si un joueur en cette position (à qui c'est le tour de jouer) a une stratégie pour gagner en temps fini,
- perdante (**P**) si l'autre joueur a une stratégie gagnante,
- nulle (**N**) si aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante (partie infinie possible).



Positions gagnantes, perdantes, nulles

Une position est :

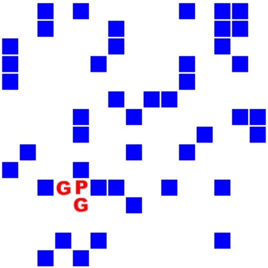
- gagnante (**G**) si un joueur en cette position (à qui c'est le tour de jouer) a une stratégie pour gagner en temps fini,
- perdante (**P**) si l'autre joueur a une stratégie gagnante,
- nulle (**N**) si aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante (partie infinie possible).



Positions gagnantes, perdantes, nulles

Une position est :

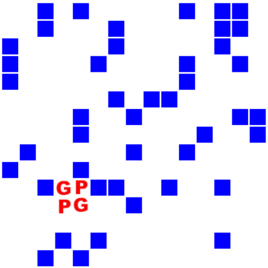
- gagnante (**G**) si un joueur en cette position (à qui c'est le tour de jouer) a une stratégie pour gagner en temps fini,
- perdante (**P**) si l'autre joueur a une stratégie gagnante,
- nulle (**N**) si aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante (partie infinie possible).



Positions gagnantes, perdantes, nulles

Une position est :

- gagnante (**G**) si un joueur en cette position (à qui c'est le tour de jouer) a une stratégie pour gagner en temps fini,
- perdante (**P**) si l'autre joueur a une stratégie gagnante,
- nulle (**N**) si aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante (partie infinie possible).



Positions gagnantes, perdantes, nulles

Une position est :

- gagnante (**G**) si un joueur en cette position (à qui c'est le tour de jouer) a une stratégie pour gagner en temps fini,
- perdante (**P**) si l'autre joueur a une stratégie gagnante,
- nulle (**N**) si aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante (partie infinie possible).

Proposition

Pour p suffisamment grand, pas de positions nulles

Proposition

Pour p suffisamment grand, pas de positions nulles

Questions

Existe t-il des valeurs de p pour lesquelles il y a des positions $\mathbf{N}$ avec probabilité positive ?

Proposition

Pour p suffisamment grand, pas de positions nulles

Questions

Existe t-il des valeurs de p pour lesquelles il y a des positions **N** avec probabilité positive ?
Que vaut la probabilité que l'origine soit **G**, **P**, ou **N** ?

L'automate cellulaire probabiliste

Si on connaît les statuts (**G**, **P**, ou **N**) des positions sur une diagonale, on les connaît sur la diagonale suivante.

L'automate cellulaire probabiliste

Si on connaît les statuts (**G**, **P**, ou **N**) des positions sur une diagonale, on les connaît sur la diagonale suivante.

On introduit un **automate cellulaire probabiliste** sur l'alphabet $\{\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{N}, \blacksquare\}$, qui agit sur les diagonales dans la direction $\swarrow$.

L'automate cellulaire probabiliste

Si on connaît les statuts (**G**, **P**, ou **N**) des positions sur une diagonale, on les connaît sur la diagonale suivante.

On introduit un **automate cellulaire probabiliste** sur l'alphabet $\{\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{N}, \blacksquare\}$, qui agit sur les diagonales dans la direction $\swarrow$.

On peut en fait identifier $\blacksquare$ et **G**.

L'automate cellulaire probabiliste

Si on connaît les statuts (**G**, **P**, ou **N**) des positions sur une diagonale, on les connaît sur la diagonale suivante.

On introduit un **automate cellulaire probabiliste** sur l'alphabet $\{\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{N}, \blacksquare\}$, qui agit sur les diagonales dans la direction $\swarrow$.

On peut en fait identifier ■ et **G**.

S'il n'y a pas de **N**, l'ACP obtenu est défini de la manière suivante.

- Si au moins un **P** parmi les deux voisines Nord et Est, on met un **G**
- Sinon, on met un **P** avec proba $1 - p$ et un **G** avec proba p.

L'automate cellulaire probabiliste

Si on connaît les statuts (**G**, **P**, ou **N**) des positions sur une diagonale, on les connaît sur la diagonale suivante.

On introduit un **automate cellulaire probabiliste** sur l'alphabet $\{\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{N}, \blacksquare\}$, qui agit sur les diagonales dans la direction $\swarrow$.

On peut en fait identifier $\blacksquare$ et **G**.

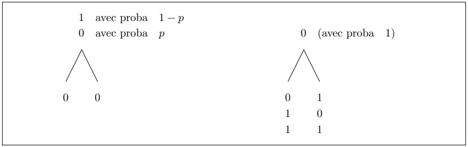
S'il n'y a pas de **N**, l'ACP obtenu est défini de la manière suivante.

- Si au moins un **P** parmi les deux voisines Nord et Est, on met un **G**
- Sinon, on met un **P** avec proba $1 - p$ et un **G** avec proba p.

Les **N** jouent le rôle de symboles "?"

Recodage

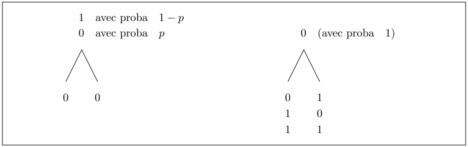
En faisant le recodage ($\mathbf{P} = 1, \mathbf{G} = 0$) et en tournant un peu la figure, on obtient l'ACP suivant.



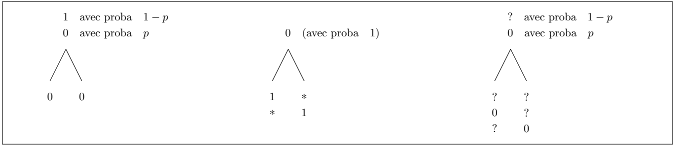
ACP A_p

Recodage

En faisant le recodage ($\mathbf{P} = 1, \mathbf{G} = 0$) et en tournant un peu la figure, on obtient l'ACP suivant.



ACP A_p



ACP F_p

Lien avec l'ergodicité

Définition

Un ACP est **ergodique** s'il a une unique distribution de probabilités invariante, vers laquelle on converge à partir de n'importe quelle distribution initiale.

Cela signifie qu'au cours de l'évolution, le système **oublie** toute information sur sa configuration initiale.

Lien avec l'ergodicité

Définition

Un ACP est **ergodique** s'il a une unique distribution de probabilités invariante, vers laquelle on converge à partir de n'importe quelle distribution initiale.

Cela signifie qu'au cours de l'évolution, le système **oublie** toute information sur sa configuration initiale.

Proposition

F_p ergodique $\Longleftrightarrow$ A_p ergodique

Lien avec l'ergodicité

Définition

Un ACP est **ergodique** s'il a une unique distribution de probabilités invariante, vers laquelle on converge à partir de n'importe quelle distribution initiale.

Cela signifie qu'au cours de l'évolution, le système **oublie** toute information sur sa configuration initiale.

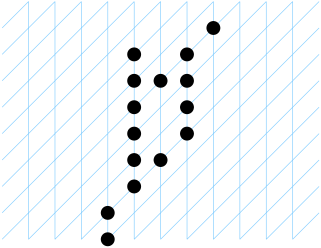
Proposition

$$\begin{aligned} F_p \text{ ergodique} &\iff A_p \text{ ergodique} \\ &\iff \text{Pas de positions nulles} \end{aligned}$$

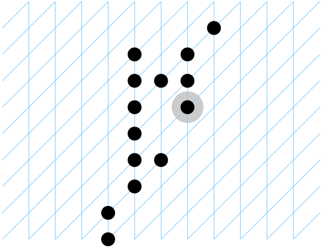
Plan

Définition des animaux dirigés

Animal dirigé de **base** C : sous-ensemble fini de sommets de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, connectés depuis $C \times \{0\}$ par des liens $\uparrow$ ou $\nearrow$



Un animal dirigé



Pas un animal dirigé

Combinatoire des animaux dirigés

Série génératrice des animaux dirigés de base C :

$$S_C(x) = \sum_{E:\text{AD de base } C} x^{|E|} \qquad\qquad S(x) = S_{\{0\}}$$

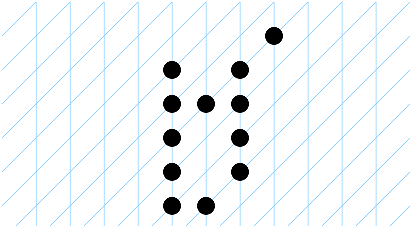
Combinatoire des animaux dirigés

Série génératrice des animaux dirigés de base C :

$$S_C(x) = \sum_{E\text{:AD de base } C} x^{|E|} \qquad\qquad S(x) = S_{\{0\}}$$

Relation de récurrence :

$$S_C(x) = x^{|C|}\Big(\sum_{D\subset C+\{0,1\}} S_D(x)\Big)$$



Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) =$$

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) = p^{|C|}\, \mathbb{P}(\forall i \in C + \{0,1\}, X_i = 0)$$

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) = p^{|C|}\, \mathbb{P}(\forall i \in C + \{0,1\}, X_i = 0)$$

$$= p^{|C|} \Big(\sum_{D \subset C + \{0,1\}} (-1)^{|D|}\, \mathbb{P}(\forall i \in D, X_i = 1) \Big)$$

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) = p^{|C|}\, \mathbb{P}(\forall i \in C + \{0,1\}, X_i = 0)$$

$$= p^{|C|} \Big(\sum_{D \subset C + \{0,1\}} (-1)^{|D|}\, \mathbb{P}(\forall i \in D, X_i = 1) \Big)$$

Donc $S_C(-p) = -\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1)$ définit une solution possible de la relation de récurrence des animaux dirigés.

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) = p^{|C|}\, \mathbb{P}(\forall i \in C + \{0,1\}, X_i = 0)$$

$$= p^{|C|} \Big(\sum_{D \subset C + \{0,1\}} (-1)^{|D|}\, \mathbb{P}(\forall i \in D, X_i = 1) \Big)$$

Donc $S_C(-p) = -\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1)$ définit une solution possible de la relation de récurrence des animaux dirigés.

On a alors en particulier $S(-p) = -\mathbb{P}(Y_0 = 1)$.

Lien avec l'ACP

Soit μ une mesure invariante de l'ACP pour le paramètre $1-p$, et soient $X, Y \sim \mu$.
Pour un sous-ensemble fini $C \subset \mathbb{Z}$, on a la relation suivante.

$$\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1) = p^{|C|}\, \mathbb{P}(\forall i \in C + \{0,1\}, X_i = 0)$$

$$= p^{|C|}\Big(\sum_{D \subset C+\{0,1\}} (-1)^{|D|}\, \mathbb{P}(\forall i \in D, X_i = 1) \Big)$$

Donc $S_C(-p) = -\mathbb{P}(\forall i \in C, Y_i = 1)$ définit une solution possible de la relation de récurrence des animaux dirigés.

On a alors en particulier $S(-p) = -\mathbb{P}(Y_0 = 1)$.

Réf : D. Dhar, M. Bousquet-Mélou, J.-F. Marckert, Y. Le Borgne, M. Albenque...

Plan

1. Jeu sur la percolation
2. Combinatoire des animaux dirigés
3. Étude de l'ACP

Mesure markovienne invariante

On peut démontrer que pour toute valeur de p, l'ACP a une mesure markovienne invariante μ_p, donnée par la matrice suivante.

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} & \frac{2p^2-3p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} \\ \frac{-p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} & \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} \end{pmatrix}$$

Mesure markovienne invariante

On peut démontrer que pour toute valeur de p, l'ACP a une mesure markovienne invariante μ_p, donnée par la matrice suivante.

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} & \frac{2p^2-3p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} \\ \frac{-p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} & \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} \end{pmatrix}$$

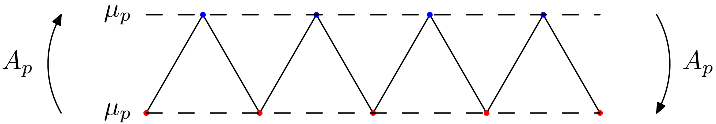
Il s'agit d'une mesure invariante **réversible**.

Mesure markovienne invariante

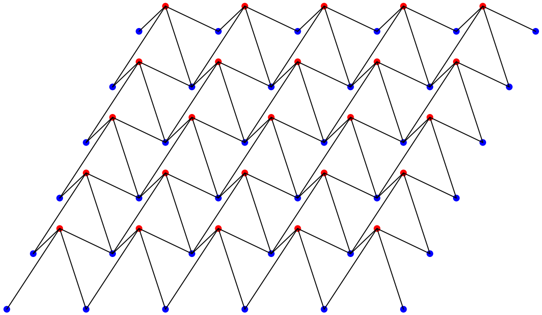
On peut démontrer que pour toute valeur de p, l'ACP a une mesure markovienne invariante μ_p, donnée par la matrice suivante.

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} & \frac{2p^2-3p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)^2} \\ \frac{-p+\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} & \frac{2-p-\sqrt{p(4-3p)}}{2(1-p)} \end{pmatrix}$$

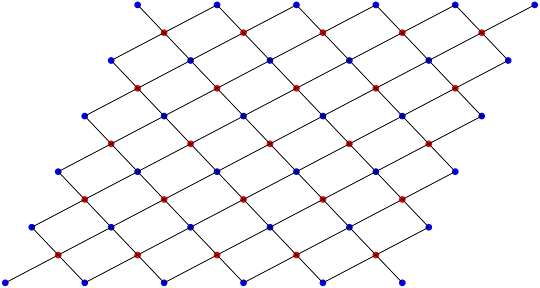
Il s'agit d'une mesure invariante **réversible**.



Dimension 2

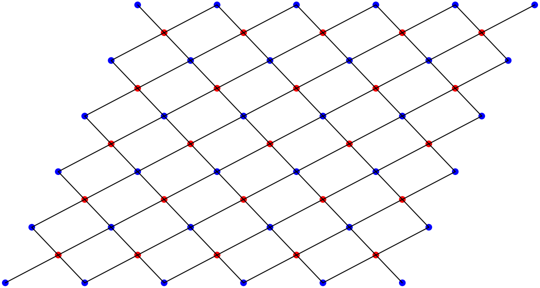


Dimension 2



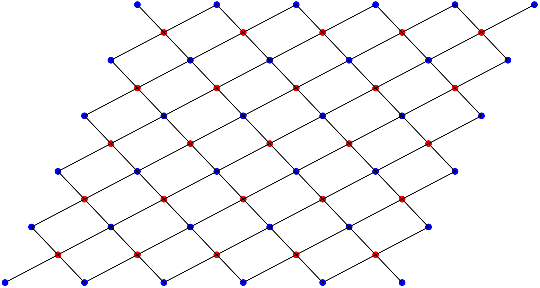
Dimension 2

En dimension 2, l'ACP a aussi des mesures invariantes réversibles, données par les mesures de Gibbs du modèle de sphères dures.



Dimension 2

En dimension 2, l'ACP a aussi des mesures invariantes réversibles, données par les mesures de Gibbs du modèle de sphères dures.



Proposition

Pour p petit, il y a des positions nulles pour ce jeu en dim 2 (multiplicité des mesures de Gibbs).

Retour à la dimension 1

La situation

En dimension 1, unicité de la mesure de Gibbs, quel que soit p.

Retour à la dimension 1

La situation

En dimension 1, unicité de la mesure de Gibbs, quel que soit p.
Donc unique mesure invariante réversible, de forme markovienne.

Retour à la dimension 1

La situation

En dimension 1, unicité de la mesure de Gibbs, quel que soit p.
Donc unique mesure invariante réversible, de forme markovienne.

Existe t-il d'autres mesures invariantes (non réversibles) ?

Retour à la dimension 1

La situation

En dimension 1, unicité de la mesure de Gibbs, quel que soit p.
Donc unique mesure invariante réversible, de forme markovienne.

Existe t-il d'autres mesures invariantes (non réversibles) ?

Théorème

Quelle que soit la valeur de p, il n'y a pas de positions nulles.

Nous allons montrer que pour tout p, l'ACP A_p est ergodique.

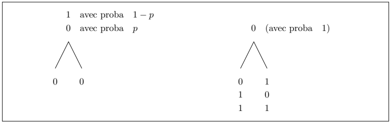
1 avec proba $1-p$ 0 avec proba p	0 (avec proba 1)
$0 \quad 0$	$0 \quad 1$ $1 \quad 0$ $1 \quad 1$

ACP A_p

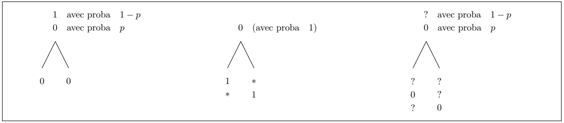
1 avec proba $1-p$ 0 avec proba p	0 (avec proba 1)	$?$ avec proba $1-p$ 0 avec proba p
$0 \quad 0$	$1 \quad *$ $* \quad 1$	$? \quad ?$ $0 \quad ?$ $? \quad 0$

ACP F_p

Nous allons montrer que pour tout p, l'ACP A_p est ergodique.



ACP A_p



ACP F_p

Étape 1

Il suffit de montrer qu'à partir de la configuration avec uniquement des "?", en itérant F_p, la densité de "?" tend vers 0 (couplage de toutes les trajectoires pour A_p).

Étape 2

Pour cela, il suffit de montrer que F_p n'a pas de mesure invariante pour laquelle il y a une densité positive de "?".

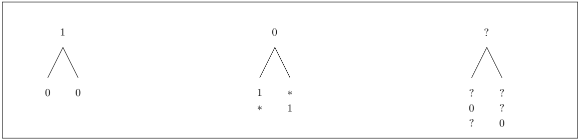
Étape 2

Pour cela, il suffit de montrer que F_p n'a pas de mesure invariante pour laquelle il y a une densité positive de "?".

Étape 3

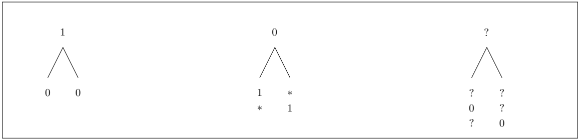
Soit μ une mesure invariante de F_p.
On regarde la densité des "?" sous μ, avec une pondération dépendant des lettres voisines.
On montre que cette quantité diminue sous l'action de F_p.

$F_p = R_p \circ D$

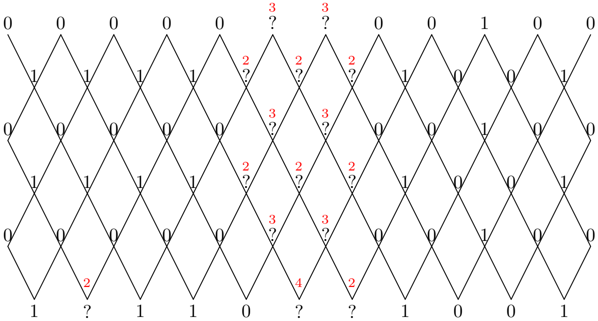


AC D

$F_p = R_p \circ D$



AC D



Questions ouvertes

- En dimension 2, peut-il y avoir d'autres mesures invariantes que les mesures de Gibbs obtenues ?

Questions ouvertes

- En dimension 2, peut-il y avoir d'autres mesures invariantes que les mesures de Gibbs obtenues ?
- Quid du jeu en version non-orientée ?

Questions ouvertes

- En dimension 2, peut-il y avoir d'autres mesures invariantes que les mesures de Gibbs obtenues ?
- Quid du jeu en version non-orientée ?
- De manière générale, comment savoir si un ACP est ergodique ?

Questions ouvertes

- En dimension 2, peut-il y avoir d'autres mesures invariantes que les mesures de Gibbs obtenues ?
- Quid du jeu en version non-orientée ?

- De manière générale, comment savoir si un ACP est ergodique ?
- Comment exprimer la ou les mesures invariantes en fonction des paramètres ?

Questions ouvertes

- En dimension 2, peut-il y avoir d'autres mesures invariantes que les mesures de Gibbs obtenues ?
- Quid du jeu en version non-orientée ?

- De manière générale, comment savoir si un ACP est ergodique ?
- Comment exprimer la ou les mesures invariantes en fonction des paramètres ?
- En dimension 1, pour les ACP de voisinage de taille 2 avec 2 symboles, est-ce que si toutes les probabilités de transition sont strictement positives, l'ACP est nécessairement ergodique ?