Modéle d'Urnes Généralisé avec Tirages Multiples et Addition Aléatoire

Rafik Aguech Nabil Lasmar Olfa Selmi

Faculté des Sciences de Monastir

March 20, 2015

Plan

Introduction

- Une urne contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules bleues.

Introduction

- Une urne contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules bleues.
- *Un tirage sans remise de $s \geq 2$ boules dans l'urne est effectué.*

Introduction

- Une urne contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules bleues.
- Un tirage sans remise de $s \geq 2$ boules dans l'urne est effectué.
- Soit w le nombre de boules blanches de l'échantition

Introduction

- Une urne contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules bleues.
- Un tirage sans remise de $s \geq 2$ boules dans l'urne est effectué.
- Soit w le nombre de boules blanches de l'échantition
- On remet l'ensemble des boules dans l'urne avec $(s-w)X$ boules blanches et wX boules bleues (resp wX boules blanches et $(s-w)X$ boules bleues) où X est une variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{N}$,

Introduction

- Une urne contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules bleues.
- Un tirage sans remise de $s \geq 2$ boules dans l'urne est effectué.
- Soit w le nombre de boules blanches de l'échantition
- On remet l'ensemble des boules dans l'urne avec $(s-w)X$ boules blanches et wX boules bleues (resp wX boules blanches et $(s-w)X$ boules bleues) où X est une variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{N}$,
- On note W_n (resp T_n) le nombre de boules blanches (resp le nombre total de boules) après n tirages de l'urne. Alors $T_n = T_0 + \sum_{k=1}^{n} sX_k$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des copies indépendantes de X.

Introduction

- $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ la filtration engendrée par les n premiers tirages.

Introduction

- $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration engendrée par les n premiers tirages.
- ξ_{n+1} le compte des boules $'W'$ dans l'échantillon numéro n, ainsi ξ_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est hypergeomètrique;

$$P(\xi_{n+1} = j|\mathcal{F}_n) = \frac{\binom{W_n}{j}\binom{T_n - W_n}{s-j}}{\binom{T_n}{s}}. \tag{1}$$

et

$$E(\xi_{n+1}) = sE\left(\frac{W_n}{T_n}\right). \tag{2}$$

Le Modèle de Renforcements Opposés

La dynamique de ce modèle est donnée par cette relation de récurrence:

$$W_n = W_{n-1} + (s - \xi_n)X_n \tag{3}$$

Espérance et Variance

On établit que l'espérance et la variance de W_n vérifient

$$E(W_n) = \frac{s\mu}{2}n + o(\sqrt{n}\ln(n)) \tag{4}$$

$$Var(W_n) = \frac{s(s+1)\sigma^2 + s\mu^2}{12}n + o(\sqrt{n}\ln(n)). \tag{5}$$

On utilise des inégalités maximales de Kolmogorov (M. Longnecker and R. J. Serfling.(1977), Billingsley) pour établir la loi forte des grands nombres.

Loi Forte des Grands Nombres

Le nombre de boules blanches après n tirages vérifie presque sûrement:

$$W_n = \frac{s\mu}{2} n + o(\sqrt{n}\ln(n)), \tag{6}$$

et par la suite

$$\frac{W_n}{T_n} = \frac{1}{2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\Big), \text{ (presque sûrement).} \tag{7}$$

Soit I un sous ensemble fini de $\{1, n-1\}$. Alors

$$E(\frac{W_n}{T_n} | \xi_i = s_i, X_i = k_i,\ i \in I) = \frac{1}{2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\Big)$$

Définition

•Le coefficient $\alpha-$ mélange de deux tribus G_1 et G_2 est définit par

$$\alpha(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) = \sup\{|P(A\cap B) - P(A)P(B)|A \in \mathcal{G}_1,\ B) \in \mathcal{G}_2\}$$

• En terme des fonctions mesurables;

$$\alpha(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) = \sup\{|Cov(u,v))|, 0 \leq u, v \leq 1\ \sigma(u) \subset \mathcal{G}_1,\ \sigma(v) \subset \mathcal{G}_2\}$$

•Une suite de v.a $(X_n)_{n\geq 0}$ est dite $\alpha-$mélangeante si la suite

$$\alpha(n) =: \sup_{k\geq 0}\{\alpha(\sigma(X_j, 0 \leq j \leq k), \sigma(X_j, j \geq k+n))\}$$

converge vers 0.

Lemme

La suite $((s-\xi_n)X_n)_{n\geq 1}$ est $\alpha-$mélangeante, plus précisement on a

$$\alpha(n) = o(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}). \tag{8}$$

esquisse de la démonstration

Soit $i_1 < \dots i_r \leq k < \ell \leq i_{r+1} < \dots < i_m$ pour tout couple (p,h) tels que $1 \leq p \leq h \leq m$, $(s_\alpha)_{p\leq\alpha\leq h} \in [0,s]$ et $(k_\alpha)_{p\leq\alpha\leq h} \in \mathbb{N}$ on pose

$$w_{p,h} \;\; = \;\; P(\xi_{i_h}X_{i_h} = s_h k_h | \xi_{i_\alpha}X_{i_\alpha} = s_\alpha k_\alpha, \; (p \leq \alpha \leq h))$$

$$w_{p,h} = \sum_{k|s_h k_h} E\left(\frac{\binom{W_{i_h}\;\;1}{s_h(k)}\binom{B_{i_h}\;\;1}{s-s_h(k)}}{\binom{T_{i_h}\;\;1}{s}} |\xi_{i_\alpha} X_{i_\alpha} = s_\alpha k_\alpha, p \leq \alpha \leq h \right) p_k$$

avec

$s_h(k) = \frac{s_h k_h}{k}.(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-1} + \ldots,$

$$\begin{aligned} \frac{(W_{i_h-1})_{s_h(k)}(B_{i_h-1})_{s-s_h(k)}}{(T_{i_h-1})_s} &\overset{P}{=} 2^{-s}(1+o(\frac{\ln(i_h-1)}{\sqrt{i_h-1}})) \\ &= 2^{-s}(1+o(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}})). \end{aligned}$$

Alors

$$|w_{r+1,h} - w_{1,h}| = o(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}).$$

Soit $u = 1_{(\xi_{i_\alpha} X_{i_\alpha} = s_\alpha k_\alpha, 1 \leq \alpha \leq r)}$ et $v = 1_{(\xi_{i_\alpha} X_{i_\alpha} = s_\alpha k_\alpha,\ r+1 \leq \alpha \leq m)}$

$$|Cov(u,v)| \leq \sum_{h=r+1}^{m} |w_{r+1,h} - w_{1,h}| = o\Big(\frac{\ln(n)}{\sqrt(n)}\Big).$$

Convergence en loi

- Dans le cas où $X = C$ est constante le nombre total des boules T_n est déterministe: H. Mahmoud, M. Kuba et A. Panholzer (2013) ont déterminé la loi limite de $W_n^* = \frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{n}}$ en utilisant la méthode des moments.

Convergence en loi

- Dans le cas où $X = C$ est constante le nombre total des boules T_n est déterministe: H. Mahmoud, M. Kuba et A. Panholzer (2013) ont déterminé la loi limite de $W_n^* = \frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{n}}$ en utilisant la méthode des moments.
- Ils ont donné aussi une alternative en utilisant le TLC pour les Martingales.

Une manière pour elucider la loi limite de W_n^* est de l'approximer en loi par une somme de variables aléatoires indépendantes.
On suppose désormais que $E(X^4) < \infty$ et on pose pour tout $i \in [1, n]$:

$$Y_{ni} = \frac{(s - \xi_i)X_i - (s - E(\xi_i))\mu}{\sigma_n}.$$

Technique des Blocks de Bernstein

Cette méthode consiste à décomposer l'intervalle $[1, n]$ en des 'grands blocks' et 'petits blocks' tels que la somme des Y_{ni} pour i appartenant à l'union des petits blocks converge en loi vers 0 tandis que la somme des Y_{ni} pour i dans l'union des grands blocs approche ${W_n}^*$ en loi.

Soit $q_n = \left[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\ln(n)}\right]$, $p_n = [n^{\frac{7}{8}}\ln(n)]$ et k_n tels que $k_n = [\frac{n}{p_n+q_n}]$. On note pour chaque $i \in [1, k_n]$,

$$\zeta_{ni} = \sum_{j=(i-1)(p_n+q_n)+1}^{ip_n+(i-1)q_n} Y_{nj} \text{ et } \quad Z_{n_i} = \sum_{j=ip_n+(i-1)q_n+1}^{i(p_n+q_n)} Y_{nj}. \qquad (9)$$

Ainsi $W_n{}^* = \sum_{i=1}^{k_n} \zeta_{ni} + \sum_{i=1}^{k_n} Z_{ni} + \sum_{j=k_n+1}^{n} Y_{nj}$.

Une estimation de $Var(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{ni})$:

$$|Cov(Z_{ni}, Z_{nj})| \leq \frac{8s^2(\sigma^2+\mu^2)q_n^2}{n} = o\Big(\frac{n^{-\frac{3}{4}}}{\ln(n)^2}\Big).$$

D'une manière similaire

$$\sum_{i=1}^{k_n} Var(Z_{ni}) \leq \frac{k_n q_n^2}{n} = o(n^{-\frac{5}{8}}).$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{k_n} Z_{ni}$ converge en loi vers 0 et d'après cette estimation on a

$$Var(\sum_{i=1}^{k_n+1} \zeta_{ni}) \longrightarrow 1. \tag{10}$$

Lemme

Il existe une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $\tilde{\zeta}_{n1}, \ldots, \tilde{\zeta}_{nk_n}$ telles que pour chaque i : $\tilde{\zeta}_{ni} \stackrel{Loi}{=} \zeta_{ni}$ et que $\sum_{i=1}^{k_n+1} \tilde{\zeta}_{ni} - \zeta_{ni} \xrightarrow{Loi} 0$.

Preuve

- En effet il suffit de démontrer que $\Delta_n = E(e^{-it\sum_{j=1}^{k_n}\zeta_{nj}}) - \prod_{j=1}^{k_n} E(e^{-it\zeta_{nj}})$ vérifie $|\Delta_n| \longrightarrow 0$.

Preuve

- En effet il suffit de démontrer que $\Delta_n = E(e^{-it\sum_{j=1}^{k_n}\zeta_{nj}}) - \prod_{j=1}^{k_n} E(e^{-it\zeta_{nj}})$ vérifie $|\Delta_n| \longrightarrow 0$.
- On pose $\pi_{rn} = \sum_{i=r}^{k_n} \zeta_{ni}$, on a

$$
\begin{aligned}
|\Delta_n| &\leq \sum_{h=1}^{k_n} \left| \prod_{j=1}^{h} E(e^{it\zeta_{nj}}) E(\prod_{j=h+1}^{k_n} e^{it\zeta_{nj}}) - \prod_{j=1}^{h-1} E(e^{it\zeta_{nj}}) E(\prod_{j=h}^{k_n} e^{it\zeta_{nj}}) \right| \\
&\leq \sum_{h=1}^{k_n} \left| E(e^{it\pi_{h+1,n}} e^{it\zeta_{nh}}) - E(e^{it\pi_{h+1,n}}) E(e^{it\zeta_{nh}}) \right| \\
&\leq 4k_n\alpha(q_n) = o(n^{-\frac{5}{16}} \ln(n))
\end{aligned}
$$

Théorème Central Limite:

On montre que la suite $(\tilde{\zeta}_{ni})_{1\leq i\leq k_n}$ vérifie les conditions du TLC:
On vérifie la condition de Lindeberg

$$\sum_{j=1}^{k_n} E(\zeta_{nj}^2 1_{|\zeta_{nj}|>\varepsilon}) \xrightarrow{P} 0. \tag{11}$$

On montre que $\sum_{i=1}^{k_n} E(\zeta_{ni}^4) \longrightarrow 0$:

$$\sum_{j=(i-1)(p_n+q_n)+1}^{ip_n+(i-1)p_n} (s-\xi_j)X_j =: H_n = W_{ip_n+(i-1)q_n} - W_{(i-1)p_n+(i-1)q_n}$$
$$\overset{p.s}{=} p_n + o(\sqrt{p_n}\ln(p_n)).$$

La suite $p_n^{-2}(\ln(p_n))^{-4}(H_n - E(H_n))^4$ est uniformément intégrable alors on a;

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k_n} E((H_n - E(H_n))^4) = o(\frac{p_n^2 k_n \ln(p_n)^4}{n^2})$$
$$= o(n^{-\frac{1}{8}}\ln(n)^4).$$

Théoréme:

Soit W_n le nombre de boules blanches pour un modèle d'urnes géneralisées alors

$$\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{s(s+1)\sigma^2 + s\mu^2}{12}\right). \qquad (12)$$

En particulier si, $W_0 = B_0$ on a:

$$\frac{W_n - \frac{s\mu n}{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{s(s+1)\sigma^2 + s\mu^2}{12}\right). \qquad (13)$$

Etendre ce résultat dans le cas où $E(X^r) = \infty$ avec $r \geq 0$.

Modèle d'Auto Renforcement

La dynamique du modèle est décrite par une équation recursive

$$W_{n+1} = W_n + X_{n+1}\xi_{n+1} \tag{14}$$

Théorème

$\frac{W_n}{n} \xrightarrow{p.s} W_\infty$ où W_∞ est une variable aléatoire non dégenerée.

Remarque

Lorsque X est constante, M.R Chen et M. Kuba(2012) ont déterminés les valeurs exactes des moments de W_∞.

Théorème

On suppose que X est a support borné. Alors la loi de W_∞ est absolument continue.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On définit la suite d'événements

$$\Omega_\ell \quad := \quad \{W_\ell \geq sA, \text{ et}, \; T_\ell - W_\ell \geq sA\}$$

avec $|X| \leq A$. On a $P(\cup_{\ell \geq 0} \Omega_\ell) = 1$. Soit $(p_c)_c$ la loi de X, $d_n = \min\{W_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k i_k, \; c_k \in \text{Supp}(X), \; 0 \leq i_k \leq s\}$ et $D_n = \max\{W_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k i_k, \; c_k \in \text{Supp}(X), \; 0 \leq i_k \leq s\}$. Tout revient a demontrer que W_∞ est absolument continue surs chaque Ω_ℓ.

Lemme (Wei 2005)

Il existe une constante positive κ telle que pour tout $c \in \text{Supp(X)}$, $n \geq \ell + 1$, $d_1 \leq j \leq D_\ell$ et $k \leq D_n$ on a

$$\sum_{i=0}^{s} P(W_{n+1} = j + k + ic | W_n = j + k) \leq p_c(1 - \frac{1}{n} + \frac{\kappa}{n^2}). \quad (15)$$

Preuve

Soit $u_{n,k}(c) = \sum_{i=0}^{s} P(W_{n+1} = j + k + ic | W_n = j + k)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n,k}(c) &= p_c \sum_{i=0}^{s} \binom{j+k}{i} \binom{T_n - j - k}{s-i} \binom{T_n}{s}^{-1} \\ &= p_c \binom{T_n}{s}^{-1} \left(\frac{T_n^s}{s!} + \frac{1-s-2c}{(s-1)!} T_n^{s-1} + \ldots\right)\left(\frac{T_n^s}{s!}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-s)}{2(s-1)!} T_n^{s-1} + \ldots\right)^{-1} \overset{a.s}{=} p_c\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Preuve du Théorème

Soit $v_{\ell,n} = \max_{0 \leq k \leq d_n} \{P(W_n = j + k | W_\ell = j)\}$. On a

$$v_{\ell+n+1} \quad \leq \quad (1 - \frac{1}{n} + \frac{\kappa}{n^2}) v_{\ell+n}$$

On obtient ainsi pour tout $n \geq \ell + 1$,

$$v_{\ell+n+1} \leq \prod_{i=\ell}^{n} \left(1 - \frac{1}{i} + \frac{\kappa}{i^2}\right) \leq \exp(-\sum_{i=\ell}^{i} \frac{1}{i}) \leq \frac{C(\ell)}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{C(\ell)}$. Soit $x_1 < x_1' \leq x_2 < x_2' \leq \ldots \leq x_r < x_r'$ une famille de réels tels que $\sum_{i=1}^{r} |x_i' - x_i| \leq \delta$. D'aprés le lemme de Fatou on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} P(\{x_i \leq W_\infty \leq x_i'\} \cap \Omega_{\ell,j}) &\leq \sum_{i=1}^{r} \underline{\lim} P(x_i \leq \frac{W_n}{n} \leq x_i' | W_\ell = j) P(\Omega\\ &\leq \sum_{i=1}^{r} \underline{\lim}(((x_i' - x_i)n + 1)\frac{C(\ell)}{n})\\ &\leq \sum_{i=1}^{r} (x_i' - x_i) C(\ell) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Merci.