Arbres couvrants des arbres couvrants

Guillaume Chapuy (CNRS – LIAFA – Université Paris 7)

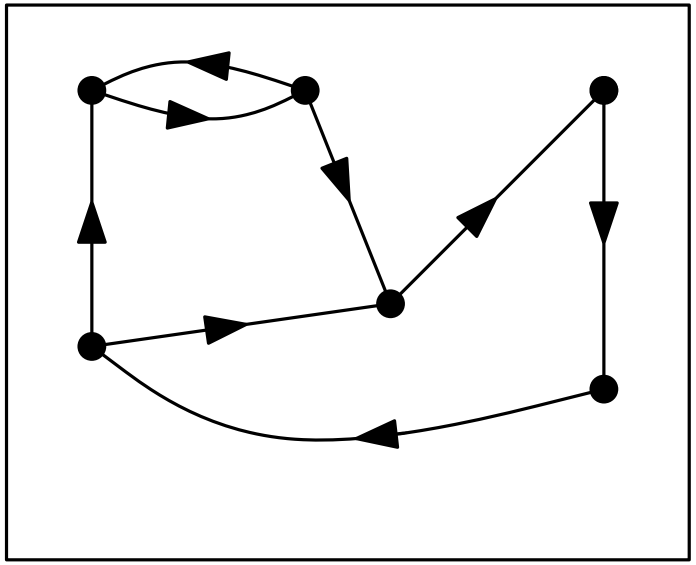
travail commun avec
Philippe Biane (CNRS – IGM – Marne-La-Vallée)

Journées Aléa 2015, Luminy

1. Introduction (le matrix-tree theorem)

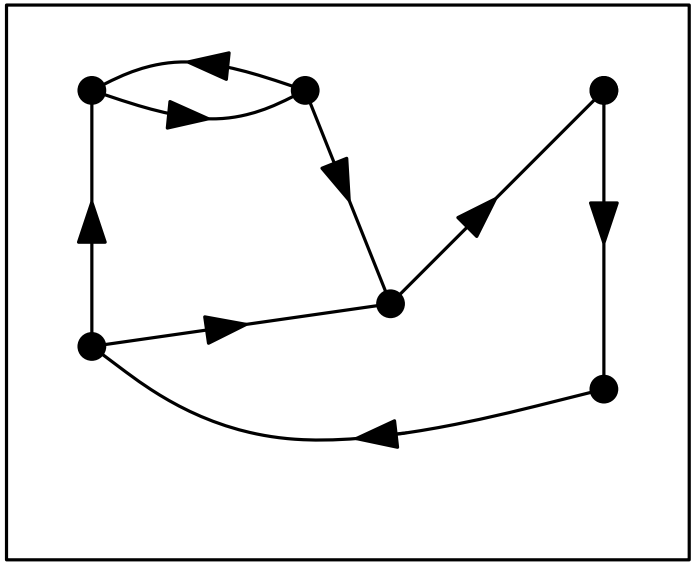
Graphes et arbres couvrants

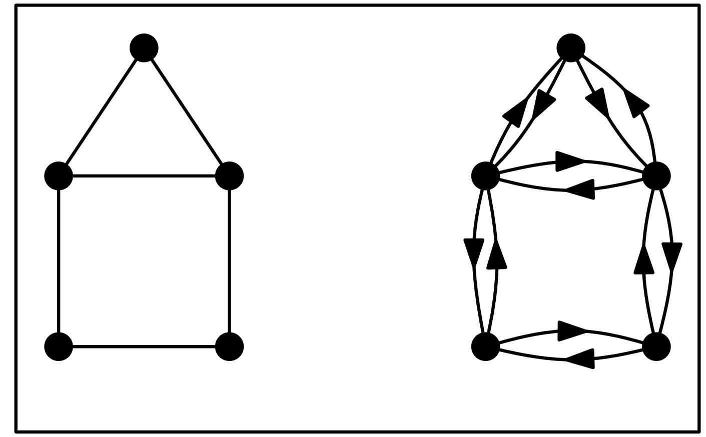
- Dans cet exposé les graphes seront dirigés.



Graphes et arbres couvrants

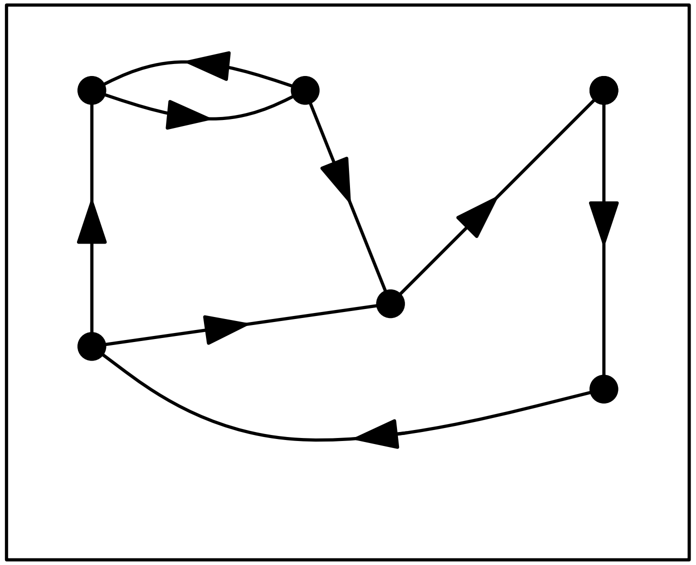
- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)

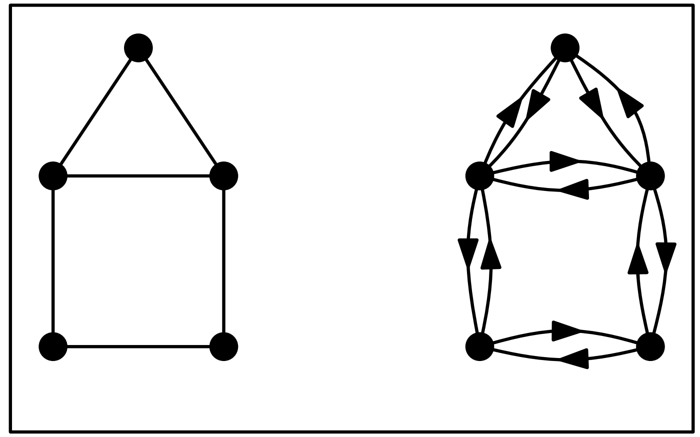




Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



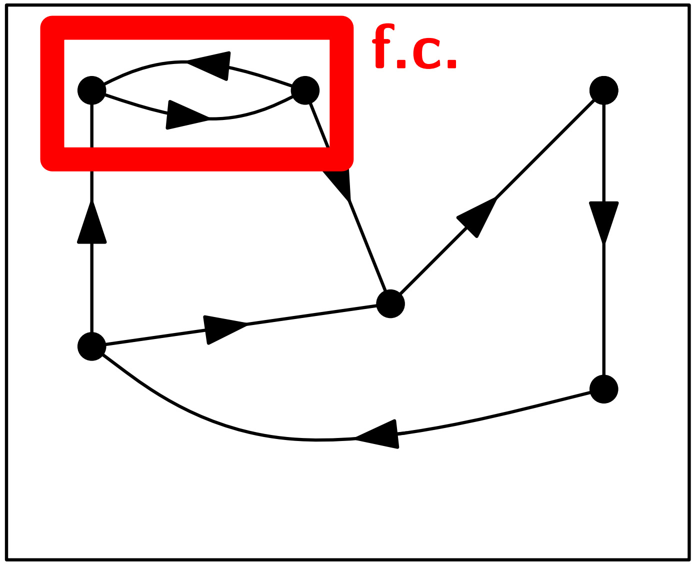


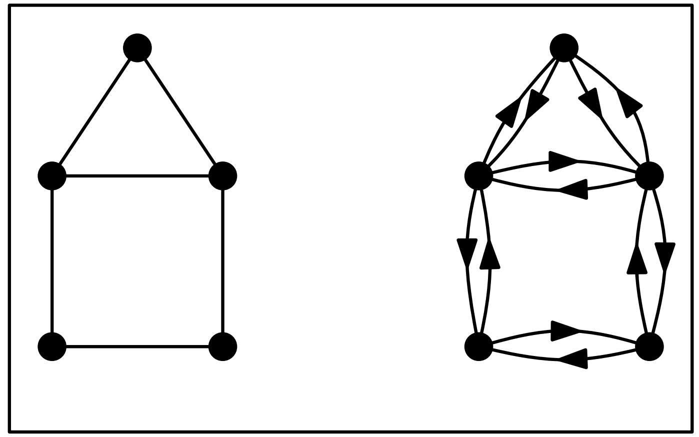
- Graphe fortement connexe: $\forall\, u, v$ sommets $\exists\, u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



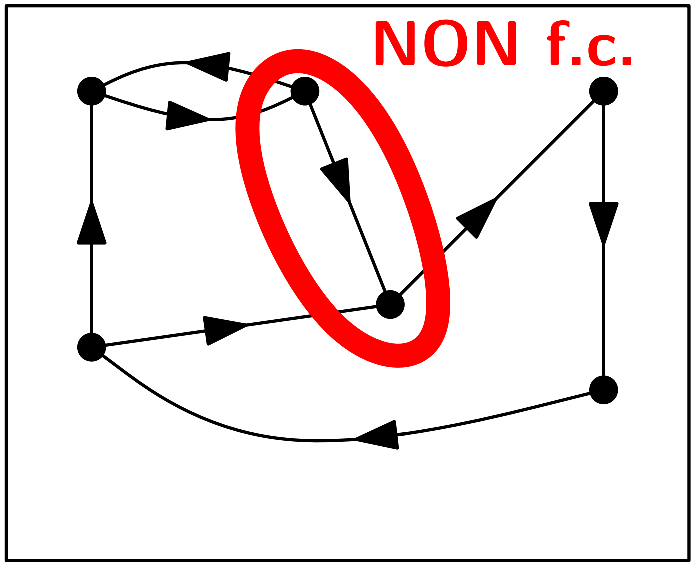


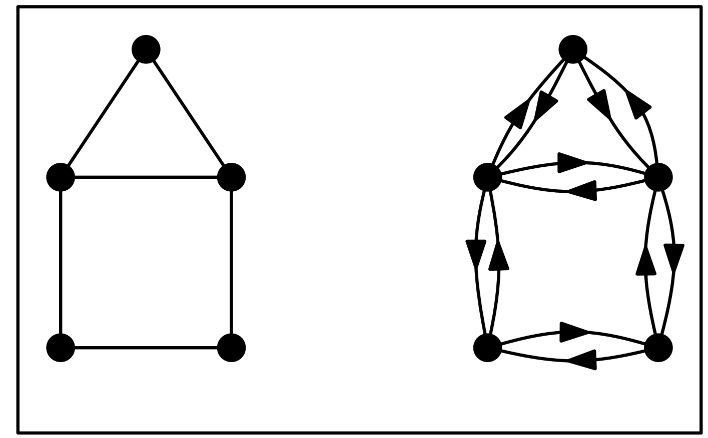
- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



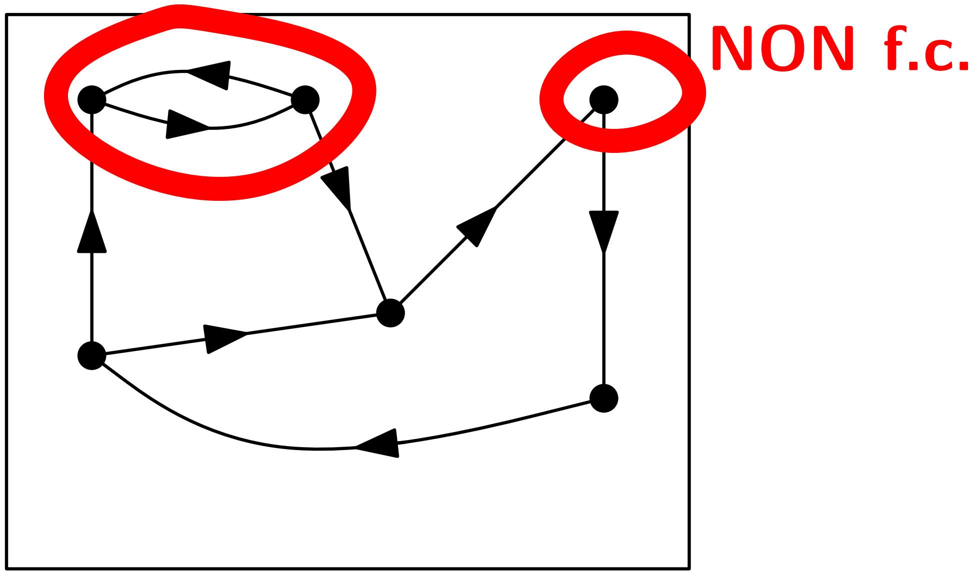


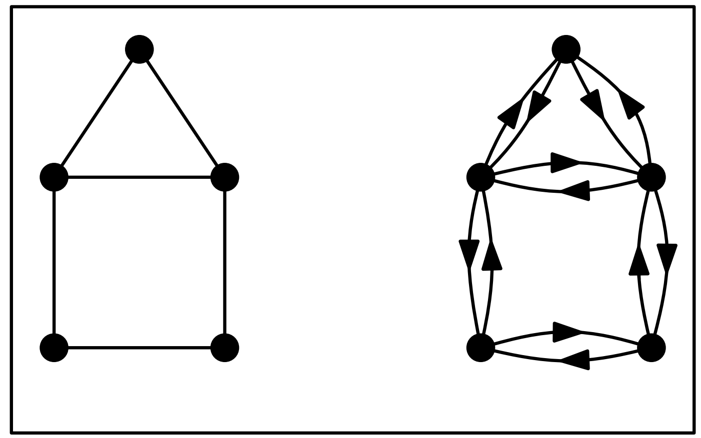
- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



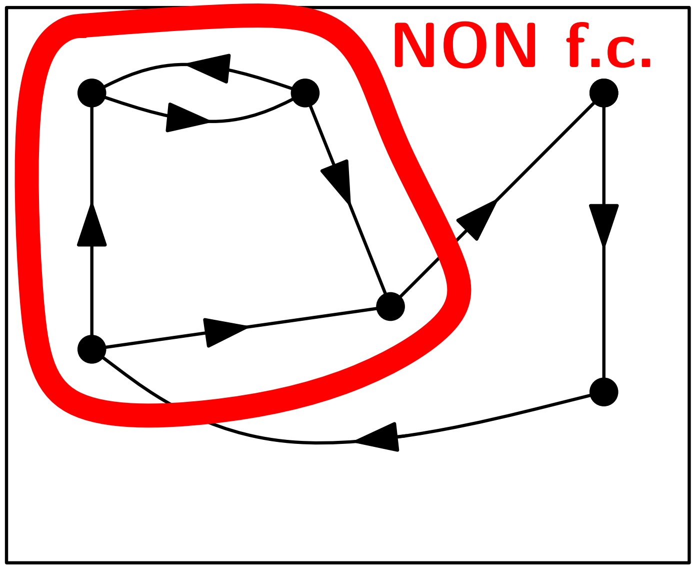


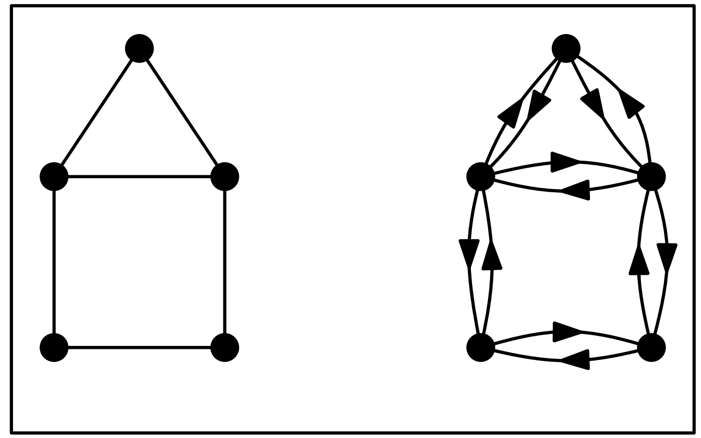
- Graphe fortement connexe: $\forall\, u, v$ sommets $\exists\, u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



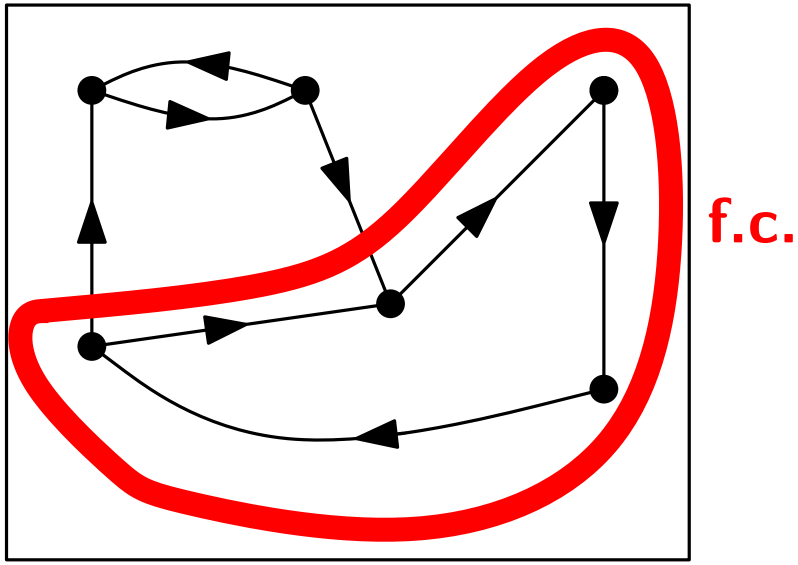


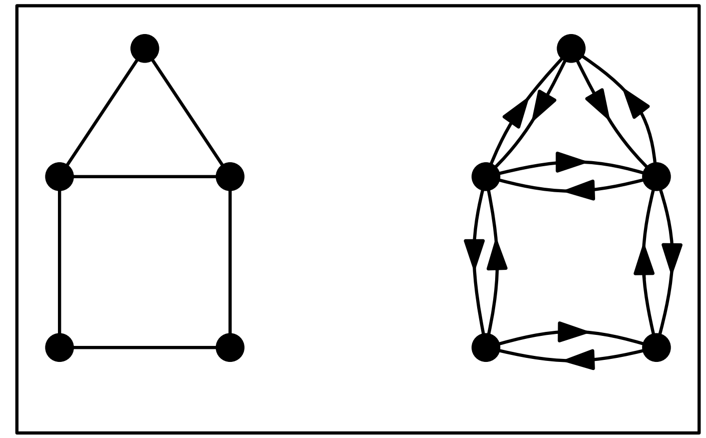
- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



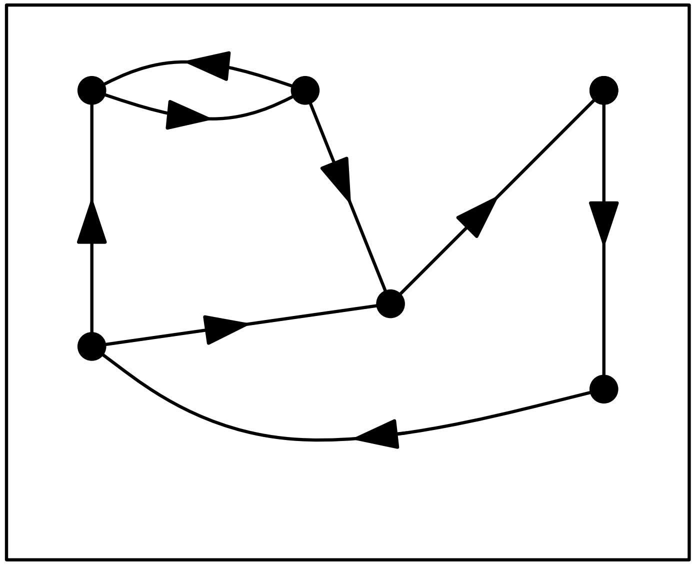


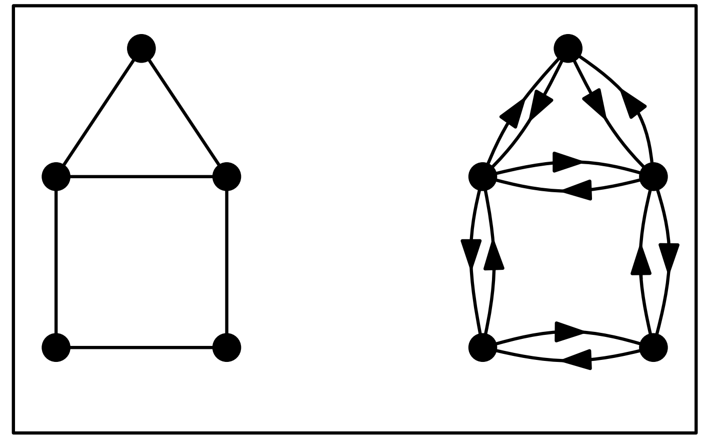
- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)

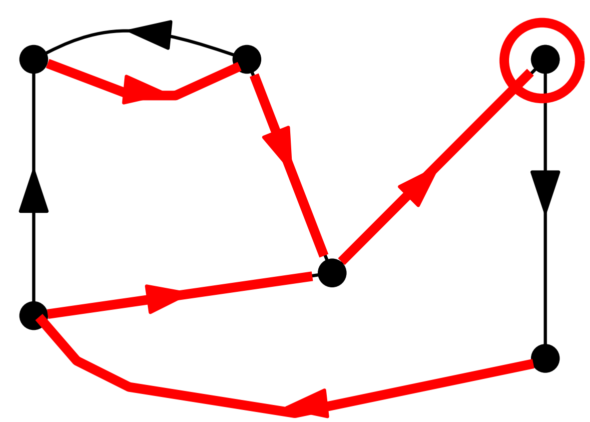




- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

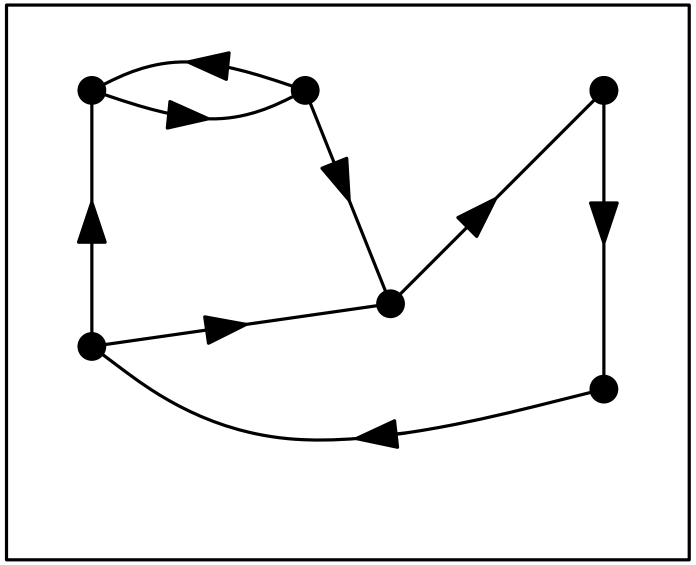
- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

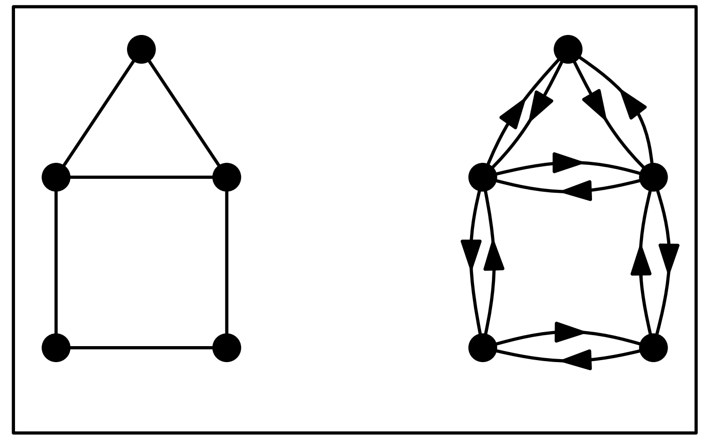
- Pour nous: arbre couvrant $=$ arbre couvrant enraciné et dirigé vers sa racine



Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



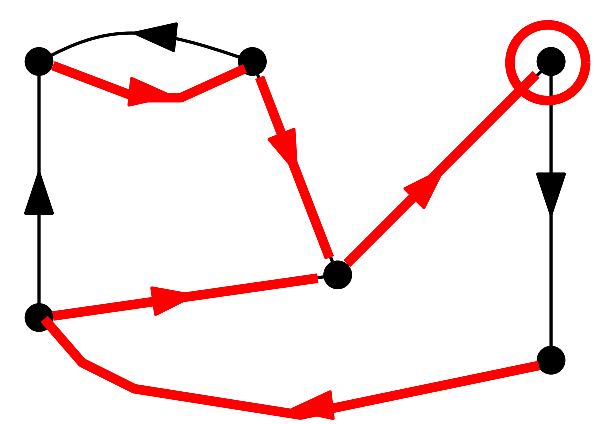


- Graphe fortement connexe: $\forall\, u, v$ sommets $\exists\, u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

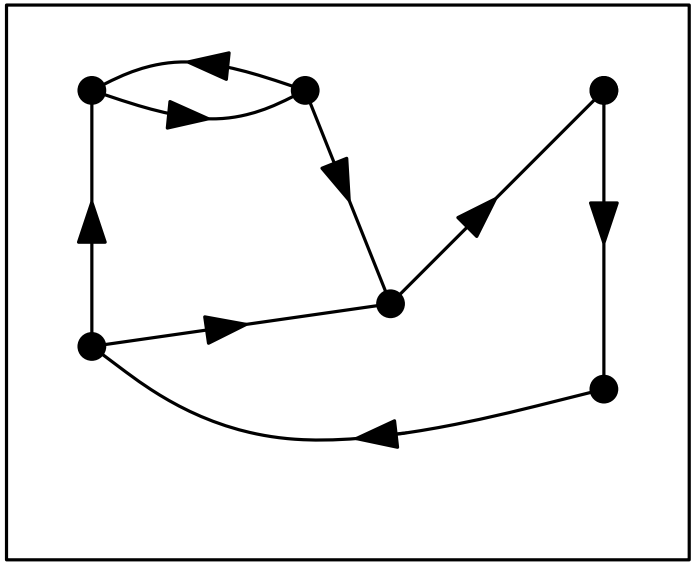
- Pour nous: arbre couvrant $=$ arbre couvrant enraciné et dirigé vers sa racine

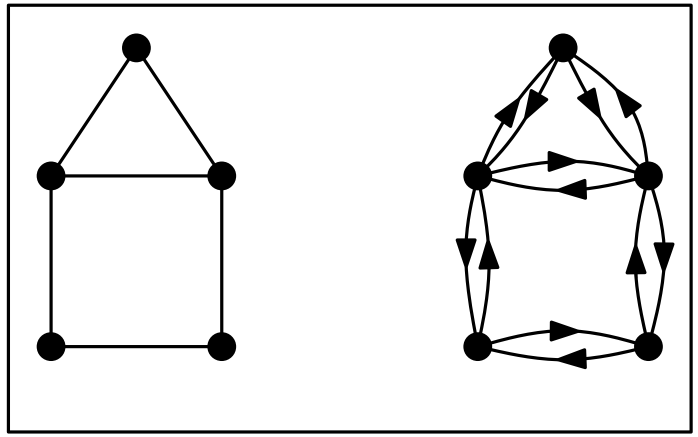
  Degrés sortants 0 (racine) ou 1 (autres sommets) $+$ racine accessible



Graphes et arbres couvrants

- Dans cet exposé les graphes seront dirigés. (cela inclut les graphes non dirigés)



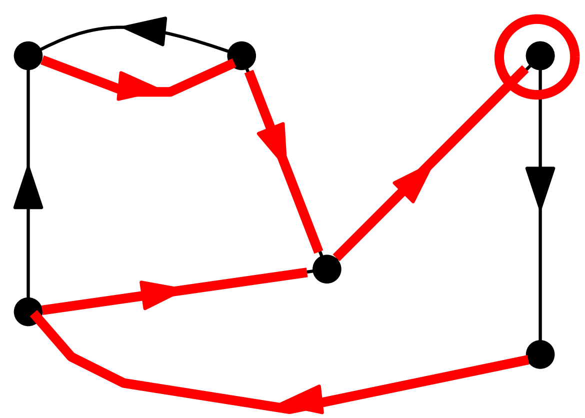


- Graphe fortement connexe: $\forall\ u, v$ sommets $\exists\ u \xrightarrow{*} v$ chemin dirigé.

- On dit que $W \subset V$ est fortement connexe si le graphe induit G_W est fortement connexe.

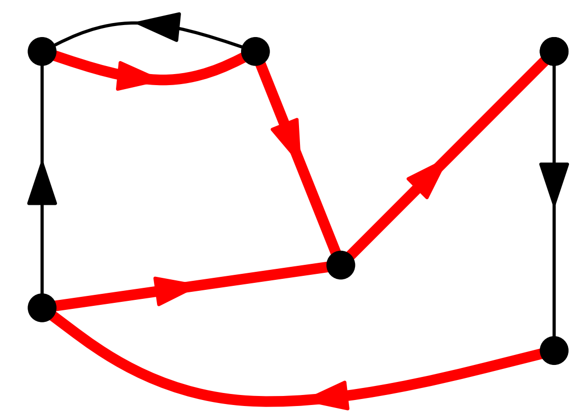
- Pour nous: arbre couvrant $=$ arbre couvrant enraciné et dirigé vers sa racine

  Degrés sortants 0 (racine) ou 1 (autres sommets) $+$ racine accessible



Poids, Laplacienne, et matrix tree theorem

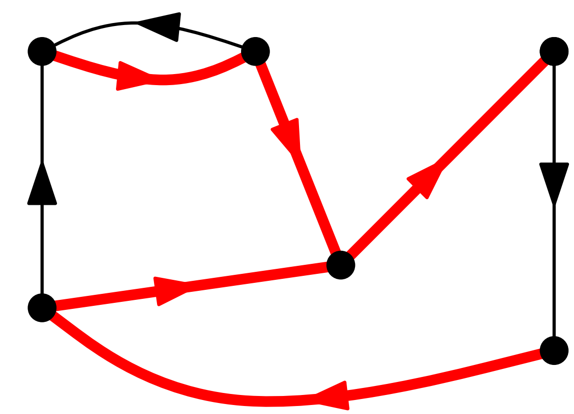
- Chaque arête $e = (i, j)$ porte un poids $x_e = x_{i,j}$.
- Le poids d'un arbre couvrant $\mathbf{t}$ est $\rho(\mathbf{t}) = \prod_{e \in \mathbf{t}} w_e$



Poids, Laplacienne, et matrix tree theorem

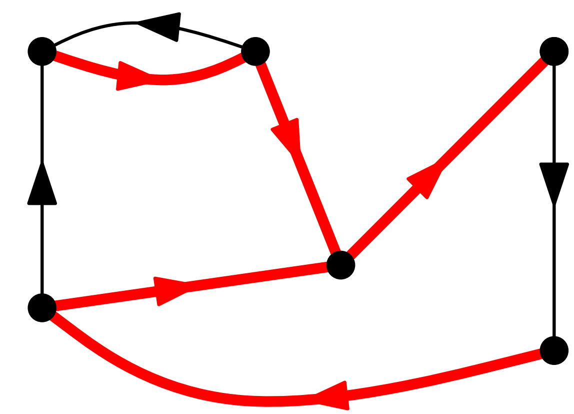
- Chaque arête $e = (i, j)$ porte un poids $x_e = x_{i,j}$.
- Le poids d'un arbre couvrant $\mathbf{t}$ est $\rho(\mathbf{t}) = \prod_{e \in \mathbf{t}} w_e$
- Fonction de partition

$$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t}:a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t})$$



Poids, Laplacienne, et matrix tree theorem

- Chaque arête $e = (i, j)$ porte un poids $x_e = x_{i,j}$.
- Le poids d'un arbre couvrant $\mathbf{t}$ est $\rho(\mathbf{t}) = \prod_{e \in \mathbf{t}} w_e$
- Fonction de partition



$$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t}:a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t})$$

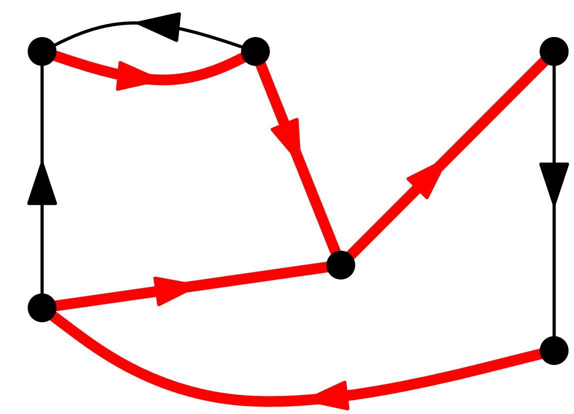
- Matrice Laplacienne Q
  - lignes et colonnes indexées par V
  - définie par: $$Q_{vw} = \begin{cases} 0 \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \notin E \\ x_{vw} \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \in E \\ -\sum_{u \neq v} x_{vu} \text{ si } v = w \end{cases}$$

Note: $\sum_{ligne} = 0$

Poids, Laplacienne, et matrix tree theorem

- Chaque arête $e = (i, j)$ porte un poids $x_e = x_{i,j}$.
- Le poids d'un arbre couvrant $\mathbf{t}$ est $\rho(\mathbf{t}) = \prod_{e \in \mathbf{t}} w_e$
- Fonction de partition

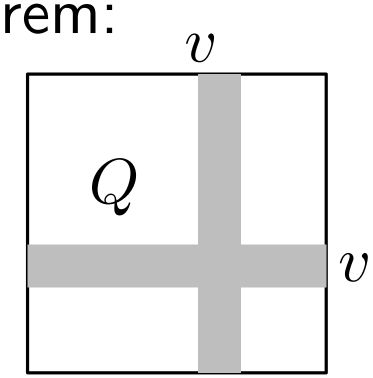
$$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t}: a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t})$$



- Matrice Laplacienne Q
  - lignes et colonnes indexées par V
  - définie par: $$Q_{vw} = \begin{cases} 0 \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \notin E \\ x_{vw} \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \in E \\ -\sum_{u \neq v} x_{vu} \text{ si } v = w \end{cases}$$

Note: $\sum_{ligne} = 0$

- Matrix-tree theorem:

$Z_v = (-1)^{n-1} \det$ 

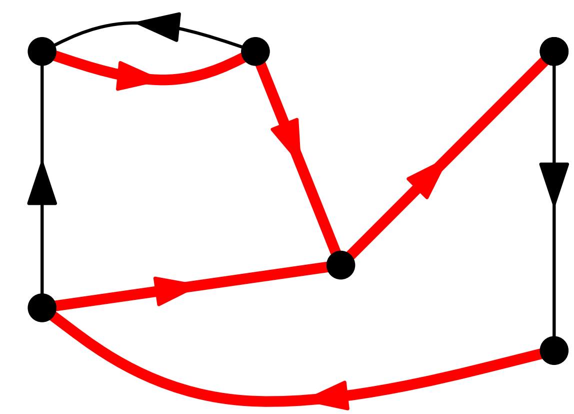
(*i.e.* Q où on a rayé la ligne et la colonne indexées par V)

(plus: si on raye les lignes et colonnes indexées par $W \subset V$ on obtient les forêts enracinées en V)

Poids, Laplacienne, et matrix tree theorem

- Chaque arête $e = (i, j)$ porte un poids $x_e = x_{i,j}$.
- Le poids d'un arbre couvrant $\mathbf{t}$ est $\rho(\mathbf{t}) = \prod_{e \in \mathbf{t}} w_e$
- Fonction de partition

$$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t}: a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t})$$

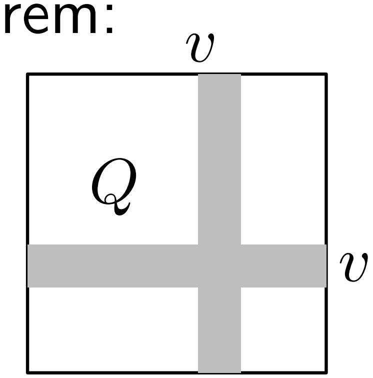


- Matrice Laplacienne Q
  - lignes et colonnes indexées par V
  - définie par: $$Q_{vw} = \begin{cases} 0 \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \notin E \\ x_{vw} \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \in E \\ -\sum_{u \neq v} x_{vu} \text{ si } v = w \end{cases}$$

EXO: preuve combinatoire directe (en développant le déterminant comme $\sum_\sigma \epsilon(\sigma)$...

Note: $\sum_{ligne} = 0$

- Matrix-tree theorem:

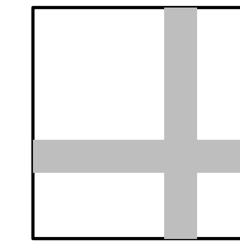
$Z_v = (-1)^{n-1} \det$ 

(*i.e.* Q où on a rayé la ligne et la colonne indexées par V)

(plus: si on raye les lignes et colonnes indexées par $W \subset V$ on obtient les forêts enracinées en V)

Example: graphe complet

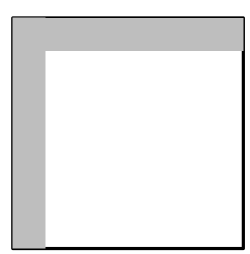
$$Q_{vw} = \begin{cases} 0 \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \notin E \\ x_{vw} \text{ si } v \neq w \text{ et } vw \in E \\ -\sum_{u \neq v} x_{vu} \text{ si } v = w \end{cases}$$

$Z_v = \det$ 

- Prenons le graphe complet sur $\{1, 2, , \ldots, n\}$.

avec poids $w \equiv 1$.

$$Q = \begin{bmatrix} (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & (1-n) & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n) \end{bmatrix}$$

$Z_1 = (-1)^n \det$  $= n^{n-2}$ (formule de Cayley)

sur espace des vecteurs de somme nulle: $-n$

sur orthogonal: 1

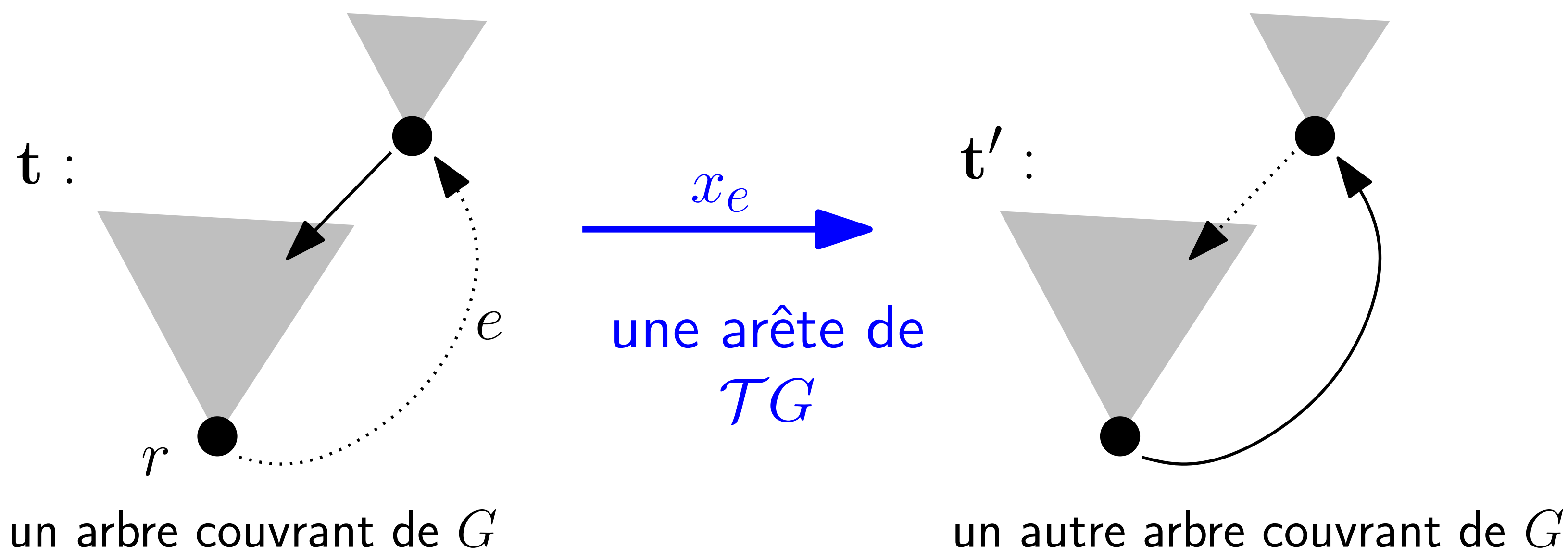
Le graphe des arbres couvrants et le MCTT

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants)

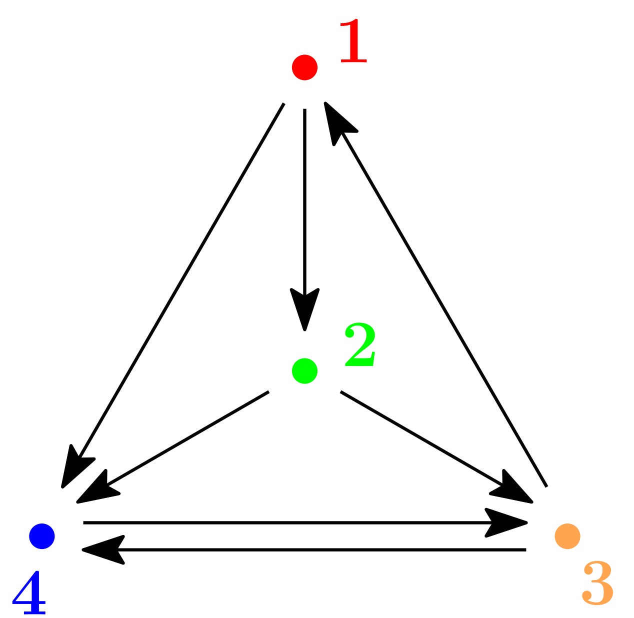
- Les sommets sont les arbres couvrants de $G = (V, E)$.

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants)

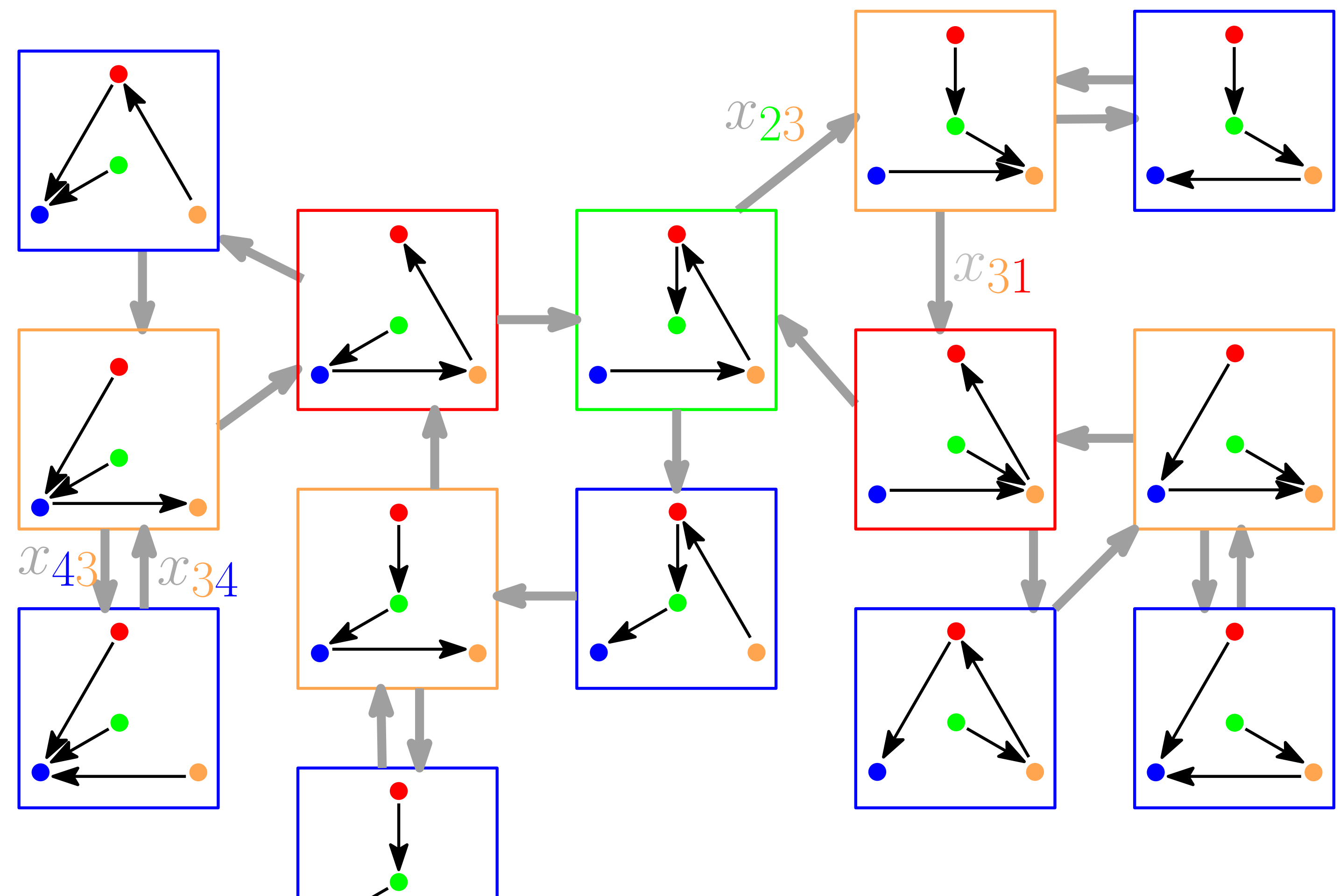
- Les sommets sont les arbres couvrants de $G = (V, E)$.
- Pour chaque arbre couvrant $\mathbf{t}$ on a $deg_{out}(r)$ arêtes sortantes où r est la racine de $\mathbf{t}$:



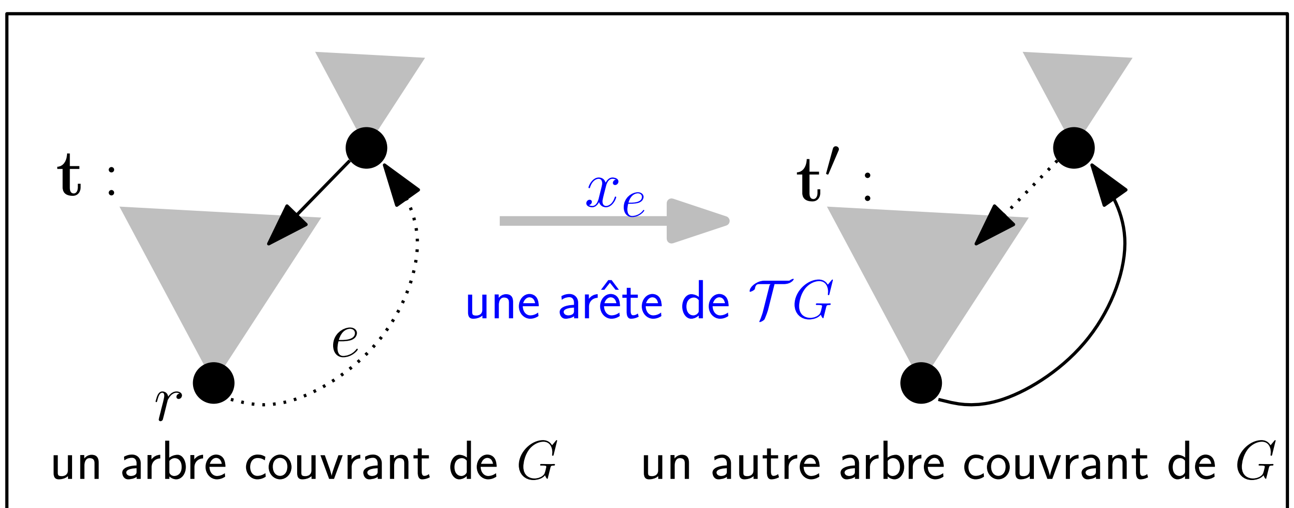
Exemple !



Un graphe G avec 14 arbres couvrants

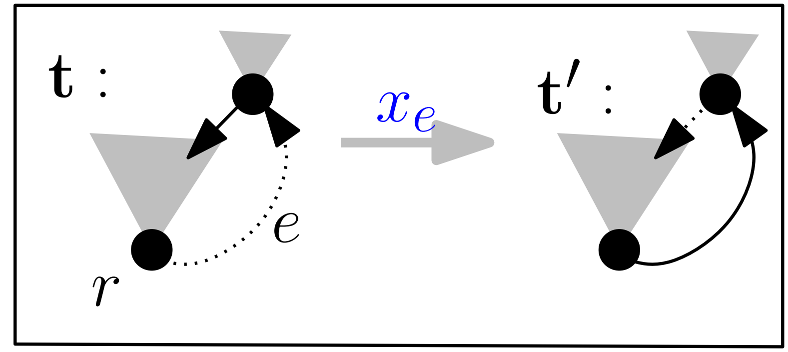


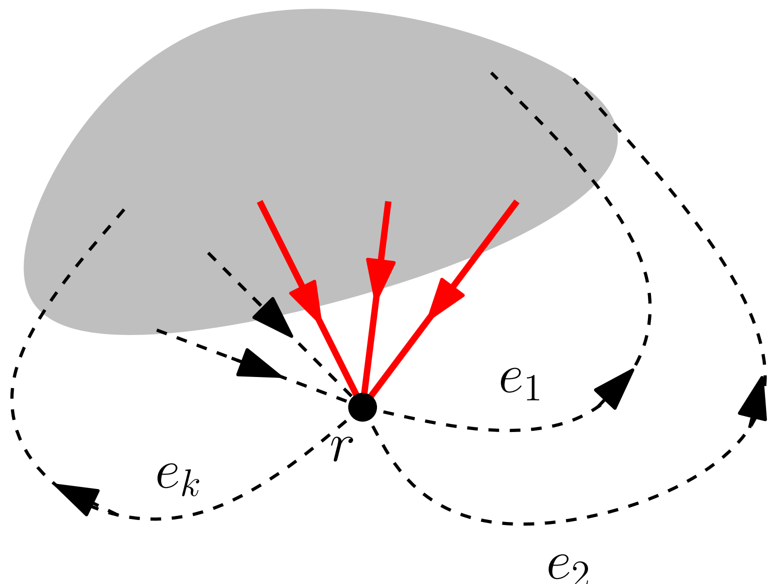
Le graphe $\mathcal{T}G$



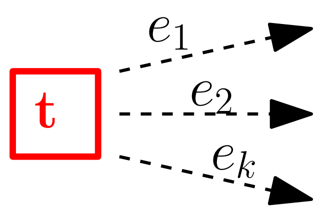
Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2

• Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)





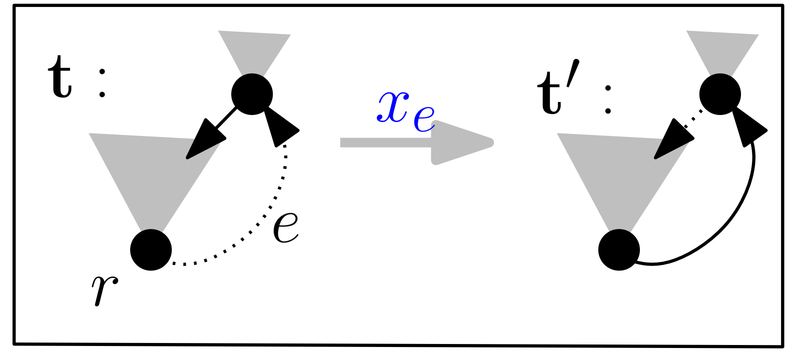
$\mathbf{t}$ a.c. de G

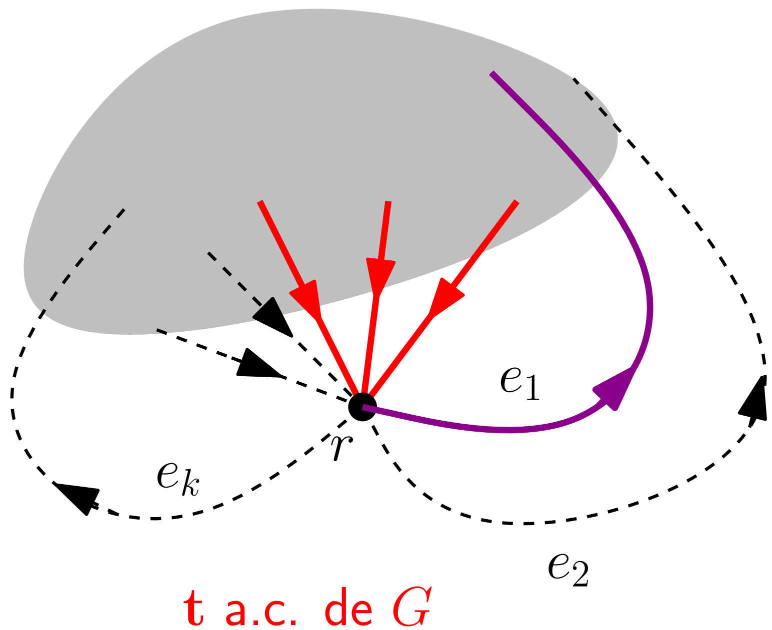


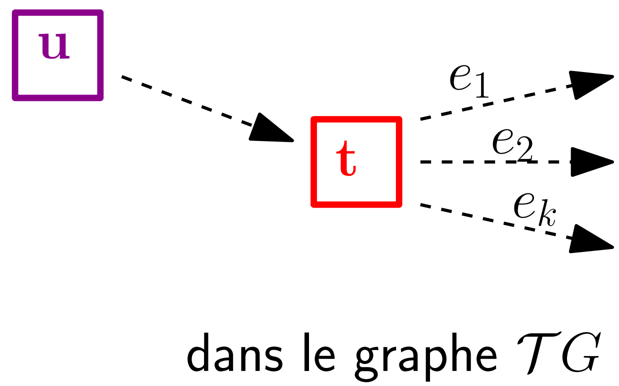
dans le graphe $\mathcal{T}G$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2

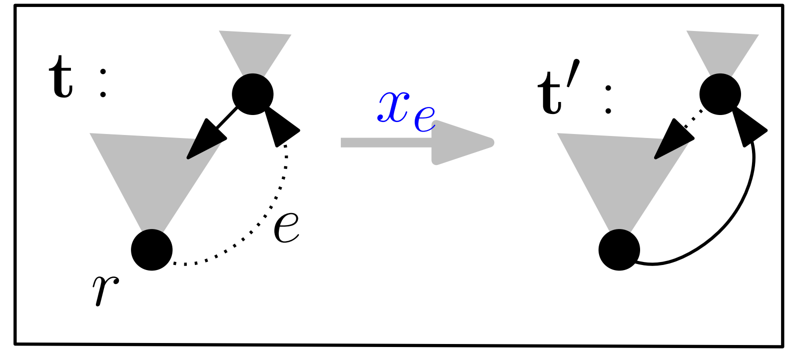
- Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)



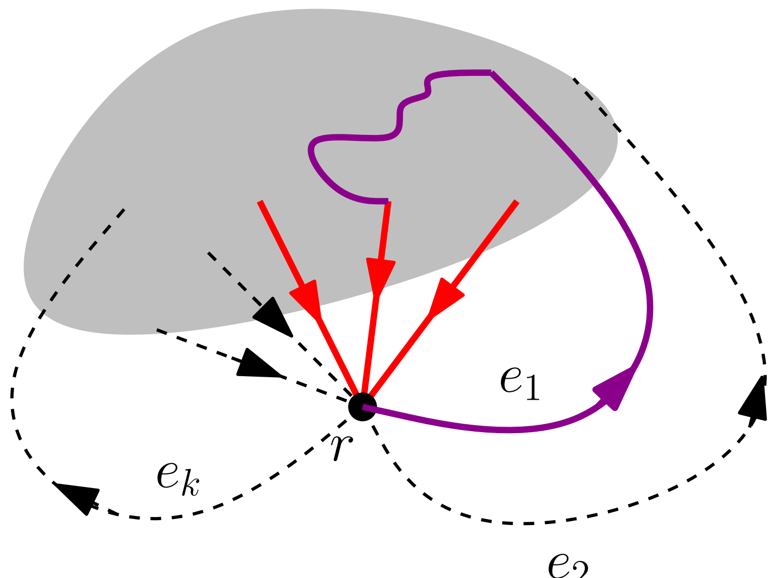




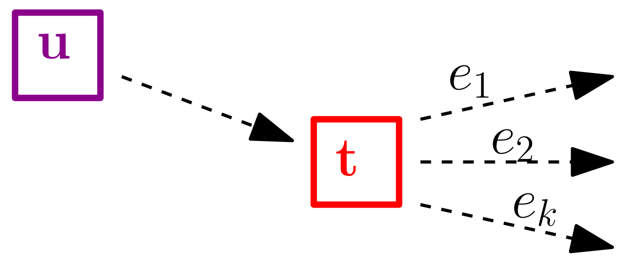
Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2



• Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)

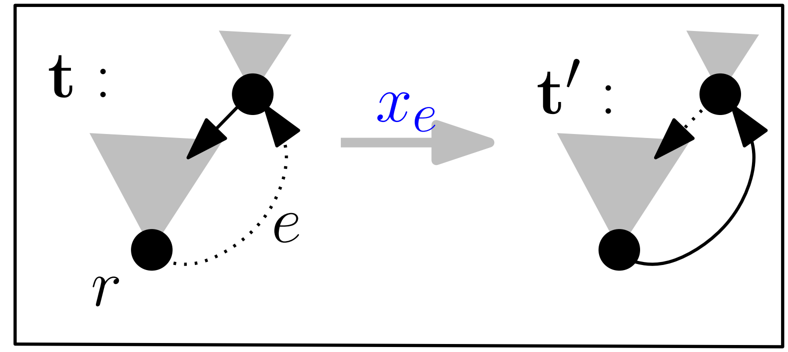


$\mathbf{t}$ a.c. de G

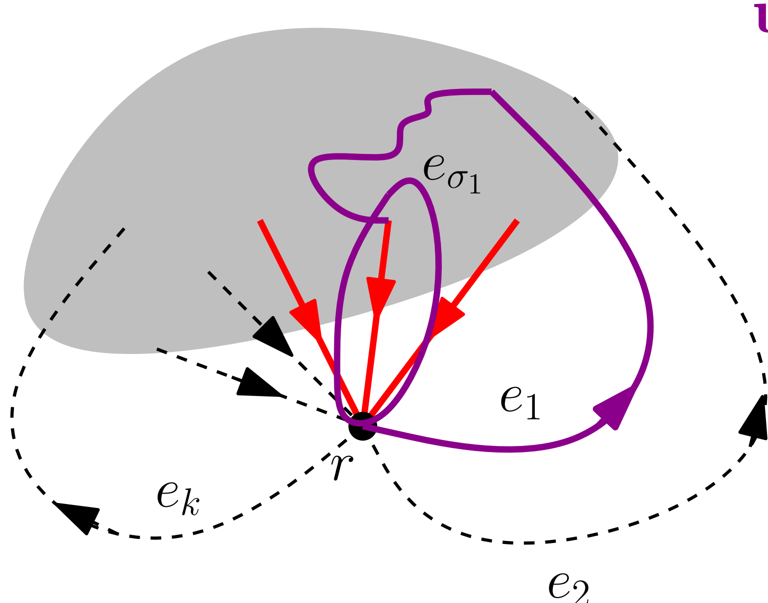


dans le graphe $\mathcal{T}G$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2

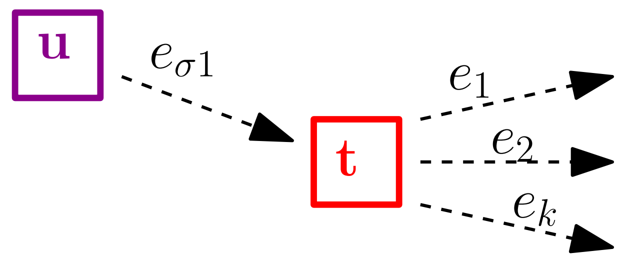


• Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)



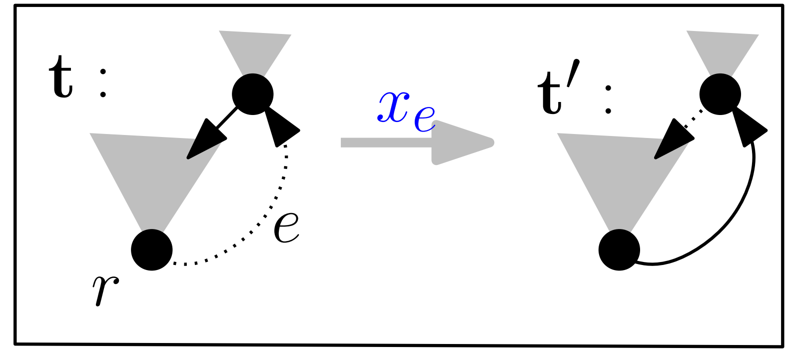
$\mathbf{t}$ a.c. de G

$\mathbf{u} = (\mathbf{t} - e_1) \cup e_{\sigma_1}$



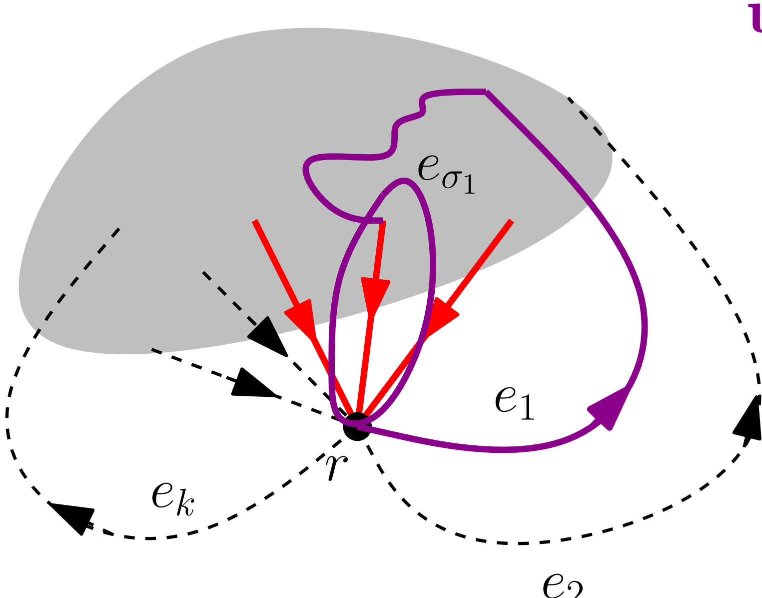
dans le graphe $\mathcal{T}G$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2

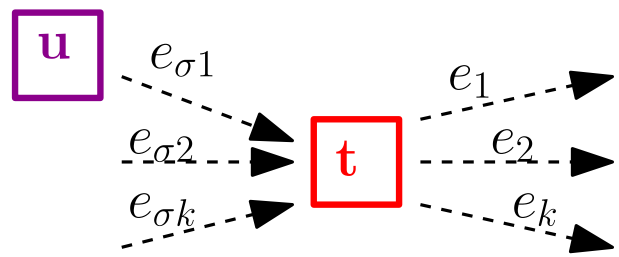


- Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)

$\mathbf{u} = (\mathbf{t} - e_1) \cup e_{\sigma_1}$

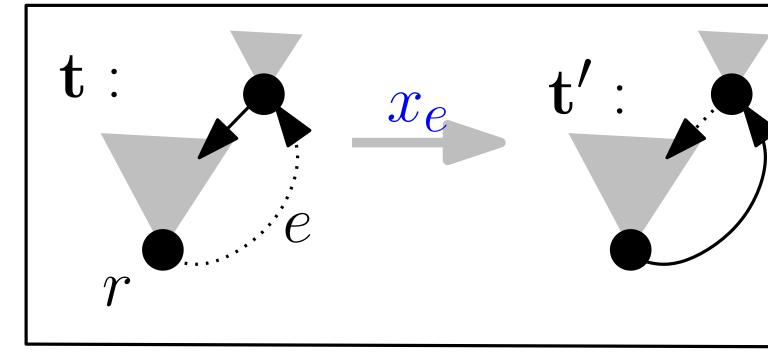


$\mathbf{t}$ a.c. de G



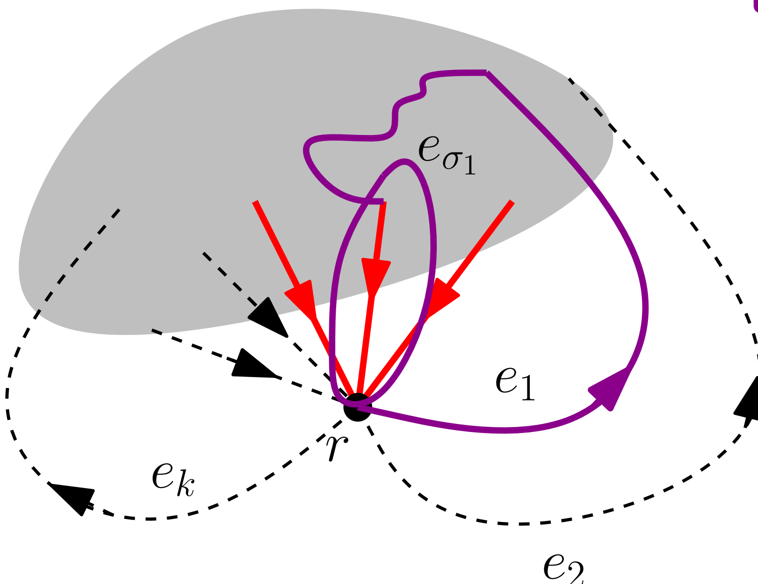
dans le graphe $\mathcal{T}G$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 2

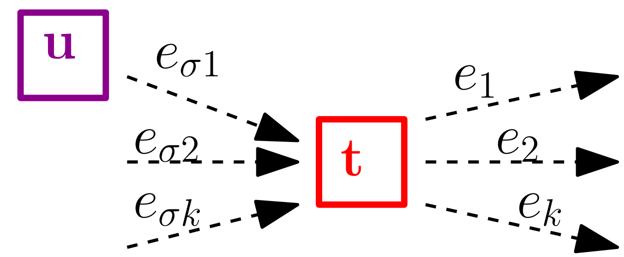


- Le graphe $\mathcal{T}G$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)

$\mathbf{u} = (\mathbf{t} - e_1) \cup e_{\sigma_1}$



$\mathbf{t}$ a.c. de G

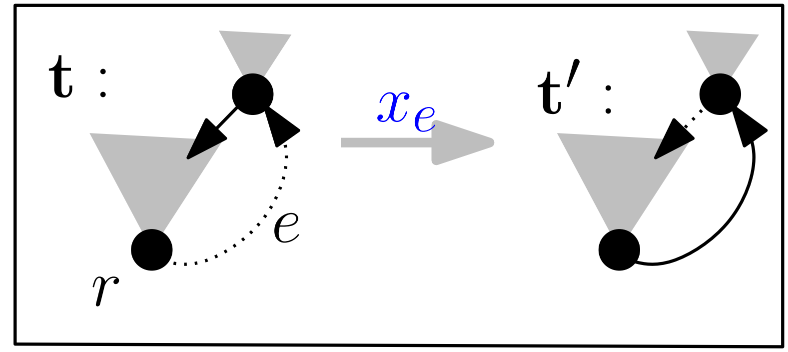


dans le graphe $\mathcal{T}G$

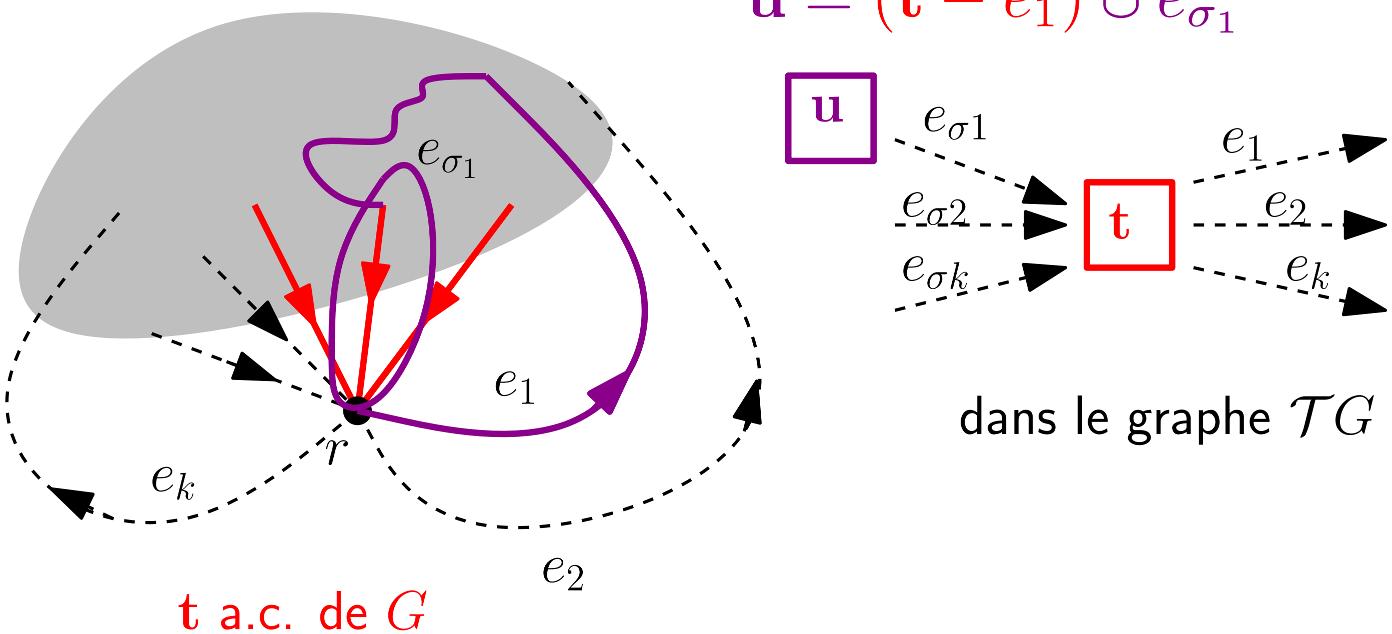
- La mesure $\rho(\mathbf{t}) :=$ poids de $\mathbf{t}$ est une mesure invariante sur $\mathcal{T}G$.
  $i.e.$ $\rho R = 0$ où R est la matrice Laplacienne du graphe

Le graphe $\mathcal{TG}$ (graphe des arbres couvrants) – 2

- Le graphe $\mathcal{TG}$ est eulérien: il y a $deg_{out}(r)$ arêtes qui sortent mais aussi $\deg_{out}(r)$ arêtes qui rentrent en chaque $\mathbf{t}$ (enraciné en r)



$\mathbf{u} = (\mathbf{t} - e_1) \cup e_{\sigma_1}$



- La mesure $\rho(\mathbf{t}) :=$ poids de $\mathbf{t}$ est une mesure invariante sur $\mathcal{TG}$.
  $i.e.$ $\rho R = 0$ où R est la matrice Laplacienne du graphe

dém: $\left(\rho R\right)_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{u}\to\mathbf{t}} \rho(\mathbf{u}) x_{\mathbf{ut}} - \rho(\mathbf{t}) \sum_{\mathbf{t}\to\mathbf{u}} x_{\mathbf{tu}}$ (tout ce qui rentre moins tout ce qui sort)

$$= \sum_{i=1}^{k} \rho(\mathbf{t}) x_{e_i} - \rho(\mathbf{t}) \sum_{i=1}^{k} x_{e_i} = 0$$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 3

- Interprétation probabiliste: supposons que pour tout i on a $\sum_{j \neq i} x_{i,j} = 1$.

  On a donc une chaîne de Markov à temps discret sur G (et sur $\mathcal{T}G$)

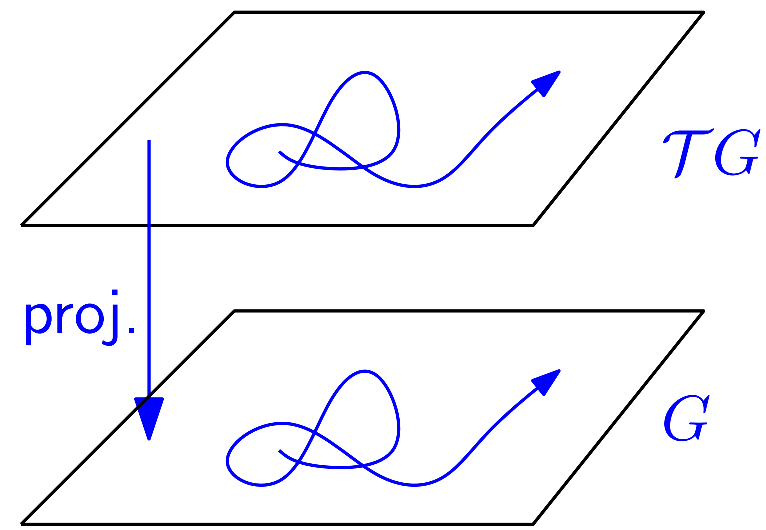
  Alors la mesure sur $\mathcal{T}G$ donnée par $\mathbf{t} \mapsto \rho(\mathbf{t})$ est une (la) mesure invariante de cette chaîne de Markov.

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 3

• Interprétation probabiliste: supposons que pour tout i on a $\sum_{j \neq i} x_{i,j} = 1$.

On a donc une chaîne de Markov à temps discret sur G (et sur $\mathcal{T}G$)
Alors la mesure sur $\mathcal{T}G$ donnée par $\mathbf{t} \mapsto \rho(\mathbf{t})$ est une (la) mesure invariante de cette chaîne de Markov.

• Remarque: La projection $\mathcal{T}G \to G$ qui envoie un arbre sur sa racine est un morphisme de graphes, qui envoie la chaîne sur $\mathcal{T}G$ sur la chaîne sur G.

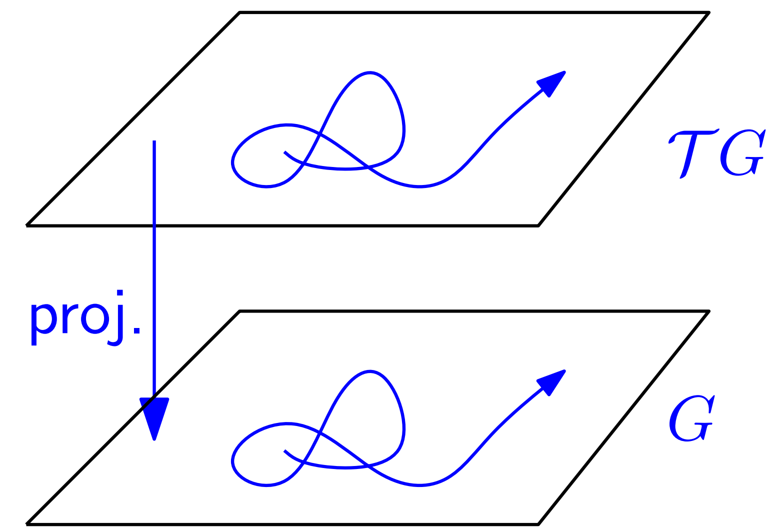


Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 3

- Interprétation probabiliste: supposons que pour tout i on a $\sum_{j\neq i} x_{i,j} = 1$.

  On a donc une chaîne de Markov à temps discret sur G (et sur $\mathcal{T}G$)
  Alors la mesure sur $\mathcal{T}G$ donnée par $\mathbf{t} \mapsto \rho(\mathbf{t})$ est une (la) mesure invariante de cette chaîne de Markov.

- Remarque: La projection $\mathcal{T}G \to G$ qui envoie un arbre sur sa racine est un morphisme de graphes, qui envoie la chaîne sur $\mathcal{T}G$ sur la chaîne sur G.



- On en déduit le Markov Chain Tree Theorem

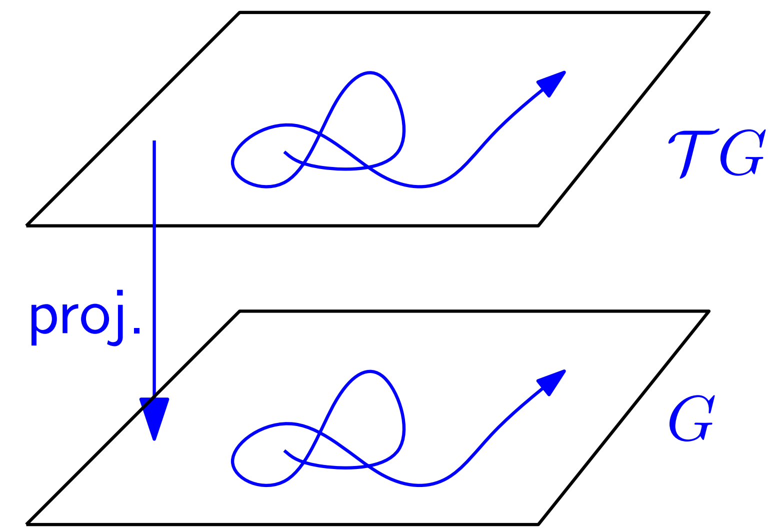
> Si M est une chaîne de Markov irréductible de graphe de transition G, alors sa mesure invariante est donnée par:
>
> $$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t}: a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t}), \qquad (v \in V)$$

Le graphe $\mathcal{T}G$ (graphe des arbres couvrants) – 3

- Interprétation probabiliste: supposons que pour tout i on a $\sum_{j \neq i} x_{i,j} = 1$.

  On a donc une chaîne de Markov à temps discret sur G (et sur $\mathcal{T}G$)
  Alors la mesure sur $\mathcal{T}G$ donnée par $\mathbf{t} \mapsto \rho(\mathbf{t})$ est une (la) mesure invariante de cette chaîne de Markov.

- Remarque: La projection $\mathcal{T}G \to G$ qui envoie un arbre sur sa racine est un morphisme de graphes, qui envoie la chaîne sur $\mathcal{T}G$ sur la chaîne sur G.



- On en déduit le Markov Chain Tree Theorem

  > Si M est une chaîne de Markov irréductible de graphe de transition G, alors sa mesure invariante est donnée par:
  >
  > $$Z_v = \sum_{\substack{\mathbf{t} : a.c. \\ \text{racine } v}} \rho(\mathbf{t}), \qquad (v \in V)$$

  (remarque: cela donne une démonstration du Matrix-tree theorem! En effet: 1. par Perron-Frobenius on a "unicité" de la mesure invariante; 2. le déterminant du MT theorem donne une mesure invariante en développant le déterminant)

The B polynomial et notre résultat

Les arbres couvrants du graphe des arbres couvrant (I)

- On va regarder les arbres couvrants du graphe des arbres couvrants.

$$\boxed{\text{Soit } Z_{\mathbf{t}} = \sum_{\substack{T \text{ a.c. de } \mathcal{T}G \\ \text{racine } \mathbf{t}}} \rho(T)}$$

(arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ a.c. de G)

Les arbres couvrants du graphe des arbres couvrant (I)

- On va regarder les arbres couvrants du graphe des arbres couvrants.

$$\text{Soit } Z_{\mathbf{t}} = \sum_{\substack{T \text{ a.c. de } \mathcal{T}G \\ \text{racine } \mathbf{t}}} \rho(T)$$

(arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ a.c. de G)

- Remarque

Il existe un polynôme $\Phi_G \in \mathbb{Z}[(x_e)_{e \in E}]$ tel que pour tout a.c. $\mathbf{t}$ de G:

$$Z_{\mathbf{t}} = \rho(\mathbf{t}) \cdot \Phi_G$$

Les arbres couvrants du graphe des arbres couvrant (I)

- On va regarder les arbres couvrants du graphe des arbres couvrants.

$$\text{Soit } Z_{\mathbf{t}} = \sum_{\substack{T \text{ a.c. de } \mathcal{T}G \\ \text{racine } \mathbf{t}}} \rho(T)$$

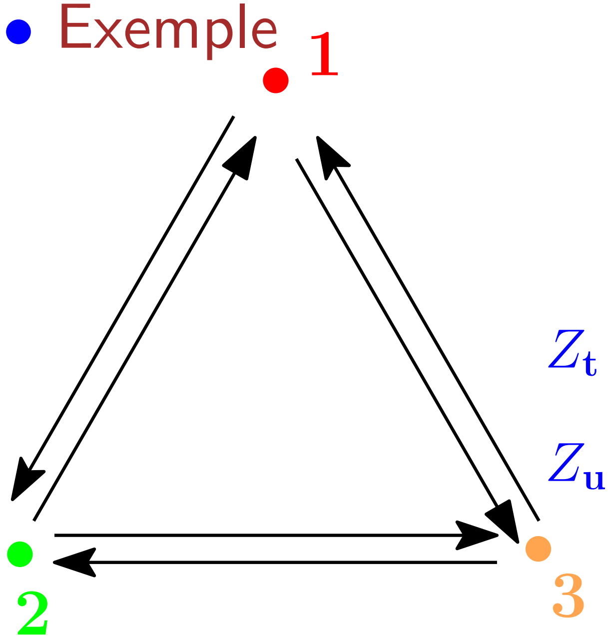
(arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ a.c. de G)

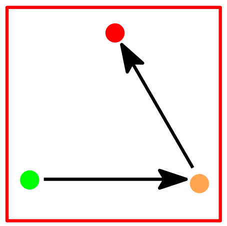
- Remarque

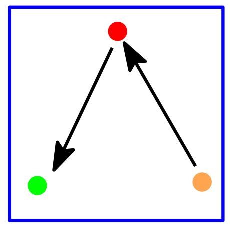
  Il existe un polynôme $\Phi_G \in \mathbb{Z}[(x_e)_{e \in E}]$ tel que pour tout a.c. $\mathbf{t}$ de G:

$$Z_{\mathbf{t}} = \rho(\mathbf{t}) \cdot \Phi_G$$

- Exemple



$\mathbf{t} =$ 

$\mathbf{u} =$ 

$$Z_{\mathbf{t}} = x_{2,3}x_{3,1}\left(x_{1,2}{}^2x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

$$Z_{\mathbf{u}} = x_{3,1}x_{1,1}\left(x_{1,2}{}^2x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

mais en fait...

Les arbres couvrants du graphe des arbres couvrant (I)

- On va regarder les arbres couvrants du graphe des arbres couvrants.

$$\boxed{\text{Soit } Z_{\mathbf{t}} = \sum_{\substack{T \text{ a.c. de } \mathcal{T}G \\ \text{racine } \mathbf{t}}} \rho(T)}$$

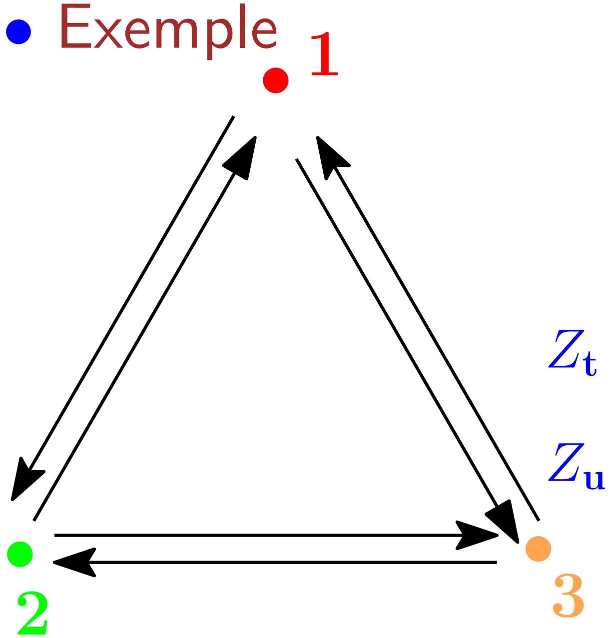
(arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ a.c. de G)

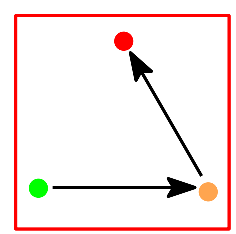
- Remarque

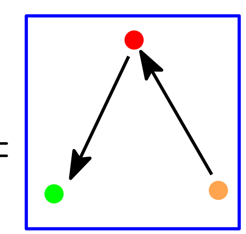
  Il existe un polynôme $\Phi_G \in \mathbb{Z}[(x_e)_{e\in E}]$ tel que pour tout a.c. $\mathbf{t}$ de G:

$$Z_{\mathbf{t}} = \rho(\mathbf{t}) \cdot \Phi_G$$

- Exemple



$\mathbf{t} =$ 

$\mathbf{u} =$ 

$$Z_{\mathbf{t}} = x_{2,3}x_{3,1}\left(x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

$$Z_{\mathbf{u}} = x_{3,1}x_{1,1}\left(x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

mais en fait...

Les arbres couvrants du graphe des arbres couvrant (I)

- On va regarder les arbres couvrants du graphe des arbres couvrants.

$$\boxed{\text{Soit } Z_{\mathbf{t}} = \sum_{\substack{T \text{ a.c. de } \mathcal{T}G \\ \text{racine } \mathbf{t}}} \rho(T)}$$

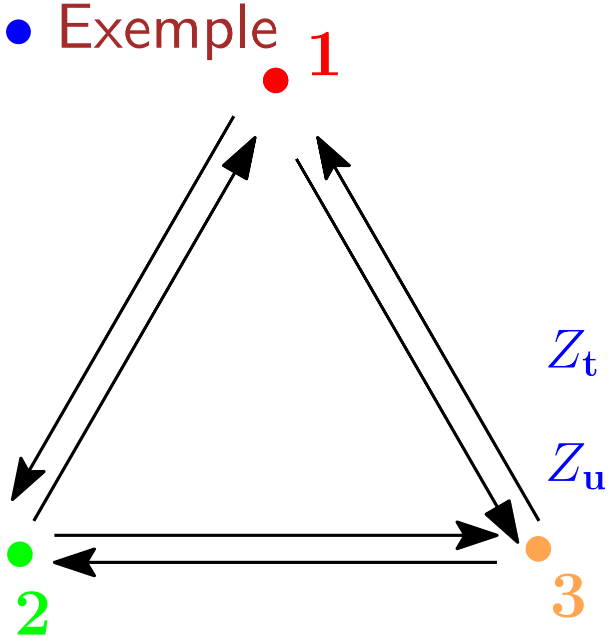
(arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ a.c. de G)

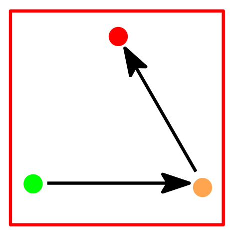
- Remarque

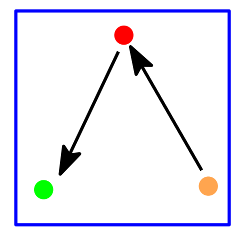
  Il existe un polynôme $\Phi_G \in \mathbb{Z}[(x_e)_{e\in E}]$ tel que pour tout a.c. $\mathbf{t}$ de G:

$$Z_{\mathbf{t}} = \rho(\mathbf{t}) \cdot \Phi_G$$

- Exemple



$\mathbf{t} =$ 

$\mathbf{u} =$ 

$$Z_{\mathbf{t}} = x_{2,3}x_{3,1}\left(x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

$$Z_{\mathbf{u}} = x_{3,1}x_{1,1}\left(x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}{}^2 + 2\,x_{1,2}{}^2 x_{2,1}x_{2,3}x_{3,1}x_{3,2} + 16 \text{ termes}\right)$$

mais en fait...

$$Z_{\mathbf{t}} = x_{2,3}x_{3,1}\left(x_{2,1}x_{3,1} + x_{2,1}x_{3,2} + x_{3,1}x_{2,3}\right)\left(x_{1,2}x_{3,1} + x_{1,2}x_{3,2} + x_{1,3}x_{3,2}\right)\left(x_{1,2}x_{2,3} + x_{1,3}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,3}\right)$$

Notre résultat principal (1)

- Théorème (Biane - GC - 2015)

  Le polynôme $\Phi_G \in \mathbb{Z}[(x_e)_{e\in E}]$ est méga factorisé. Plus précisément on a:

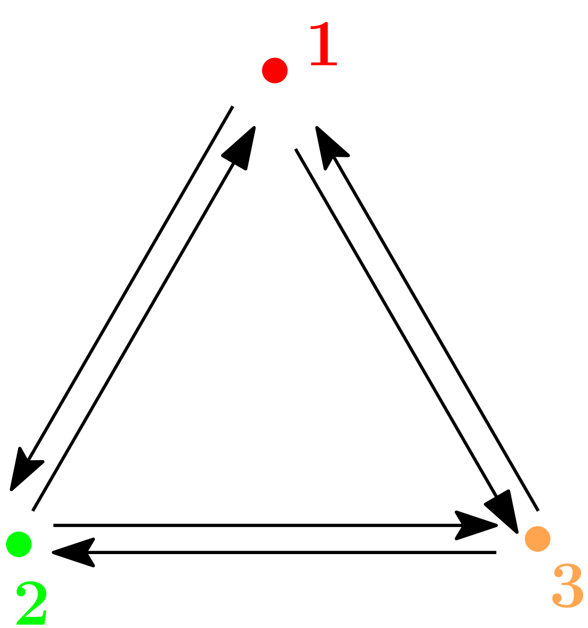
$$\Phi_G = \prod_{\substack{W\subset V\\ propre, f.c.}} (\det Q_W)^{m(W)}$$

où Q_W: matrice Laplacienne de G où on garde lignes/colonnes indexées par W

$\det(Q_W)$: nombre (ou polynôme générateur) des forêts couvrantes de G dont les racines sont W^c.

$m(W)$ sont des entiers que je vais décrire mais qui restent mystérieux...

- Exemple



$$\Phi_G = (x_{2,1}x_{3,1} + x_{2,1}x_{3,2} + x_{3,1}x_{2,3})$$
$$(x_{1,2}x_{3,1} + x_{1,2}x_{3,2} + x_{1,3}x_{3,2})$$
$$(x_{1,2}x_{2,3} + x_{1,3}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,3})$$

ex: $W = \{1,3\}$ $\quad m(W) = 1$

$W^c = \{2\}$

$\det(W^c) = (x_{1,2}x_{3,1} + x_{1,2}x_{3,2} + x_{1,3}x_{3,2})$

L'algorithme pour calculer les multiplicités

- **Corollaire**

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

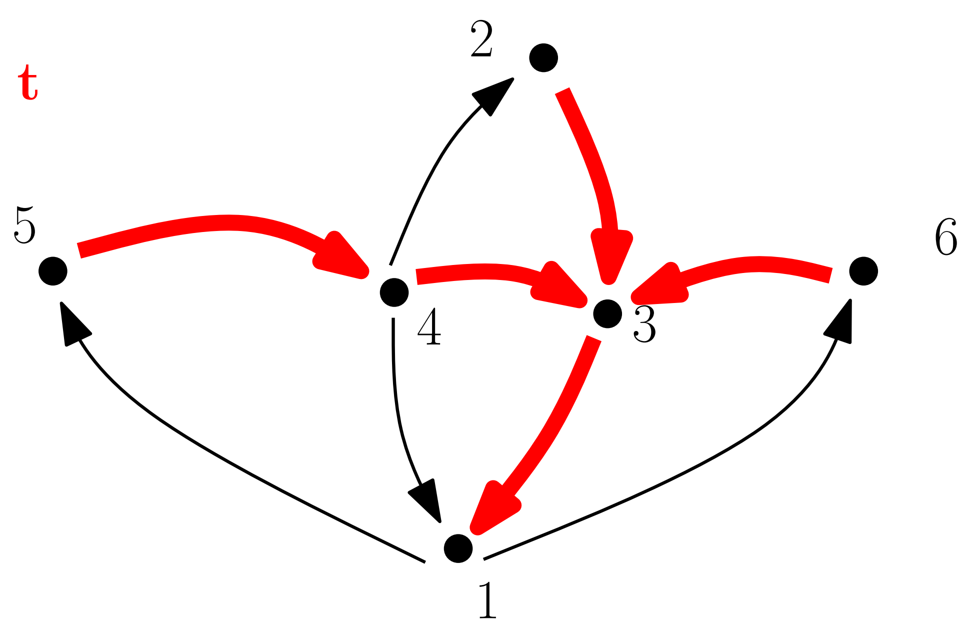
  $$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où
ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



L'algorithme pour calculer les multiplicités

- Corollaire

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

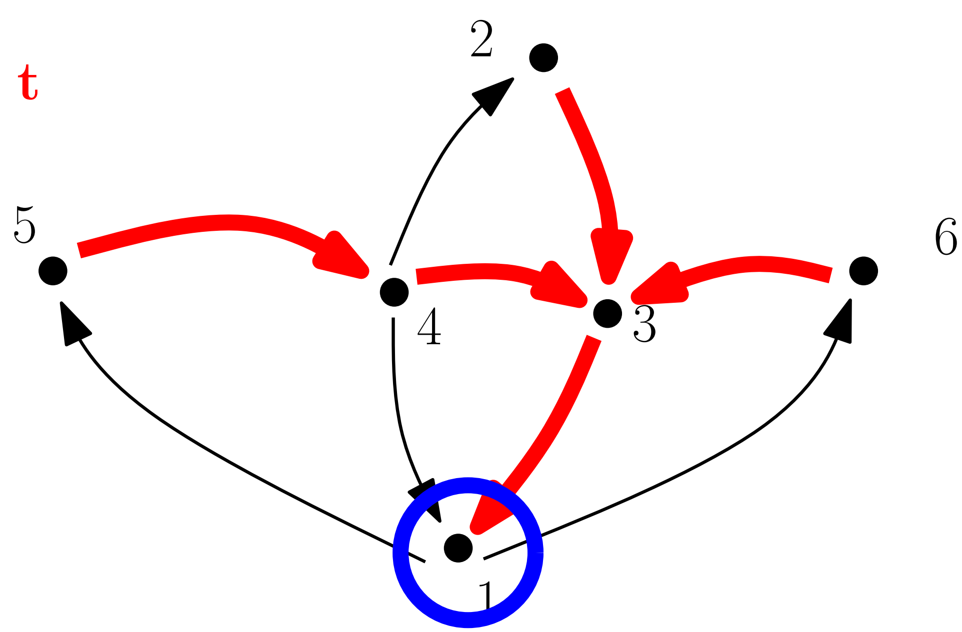
- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où

ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



L'algorithme pour calculer les multiplicités

- **Corollaire**

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

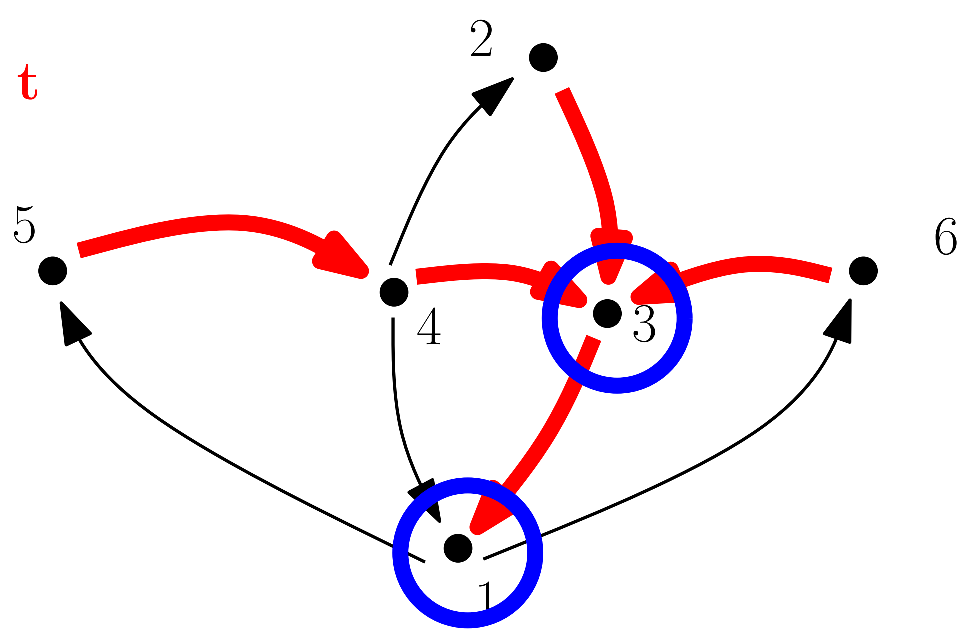
$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

- **Définition algorithmique des nombres $m(W)$**

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



L'algorithme pour calculer les multiplicités

- Corollaire

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

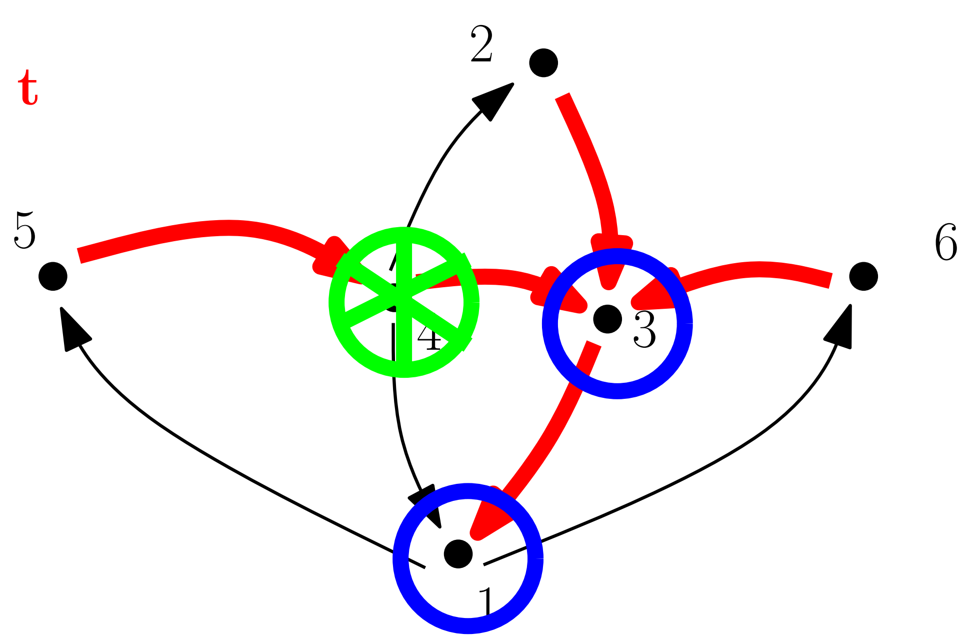
- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où

ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



L'algorithme pour calculer les multiplicités

- **Corollaire**

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

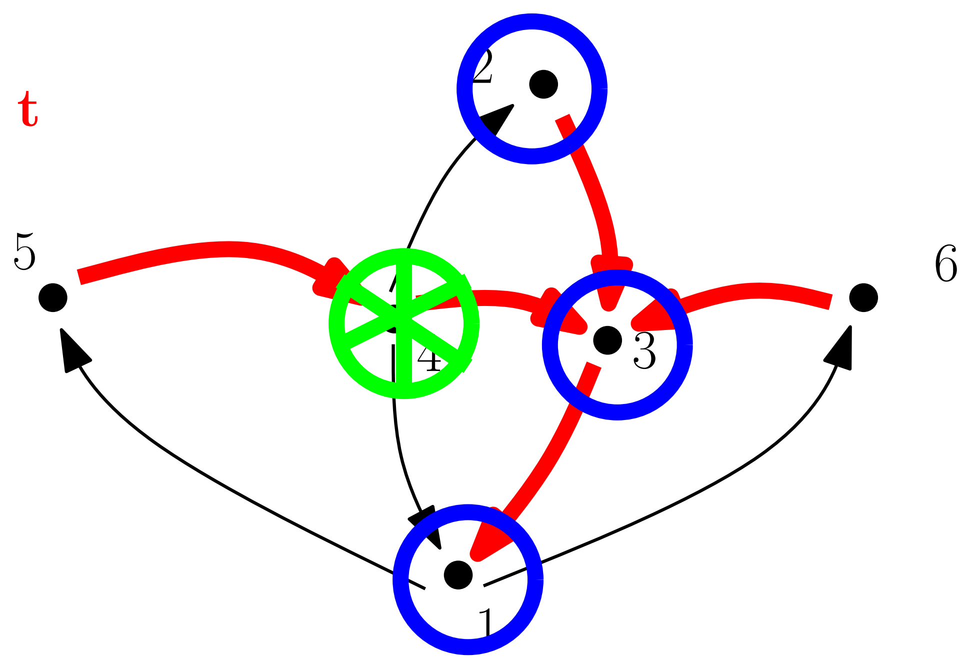
- **Définition algorithmique des nombres $m(W)$**

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où

ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



L'algorithme pour calculer les multiplicités

- Corollaire

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

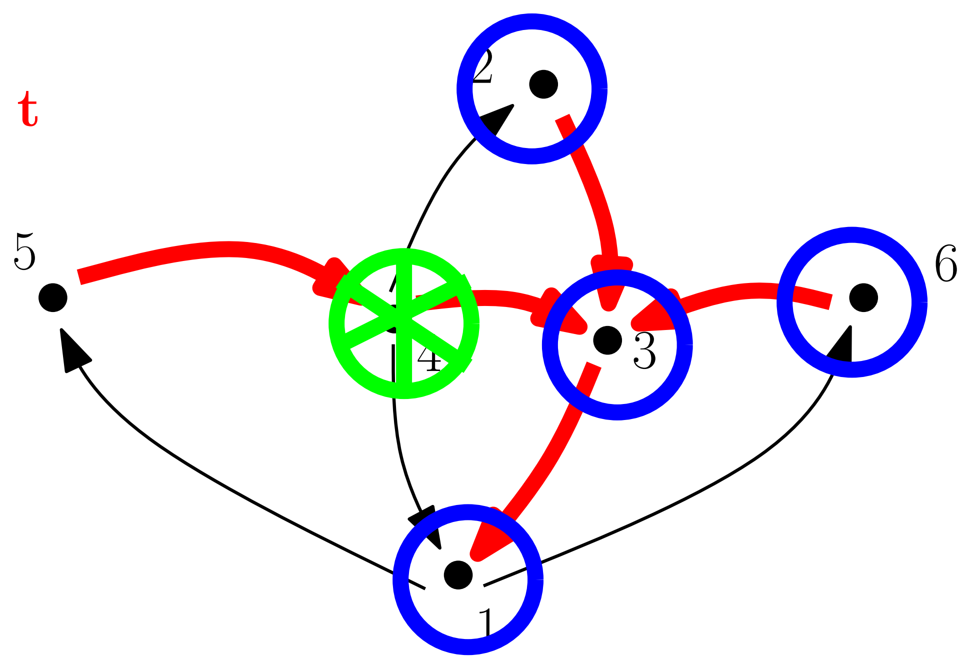
$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où
ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



$\rightarrow$ on a fini l'exploration (note: on n'a pas exploré tout le graphe)

L'algorithme pour calculer les multiplicités

- Corollaire

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

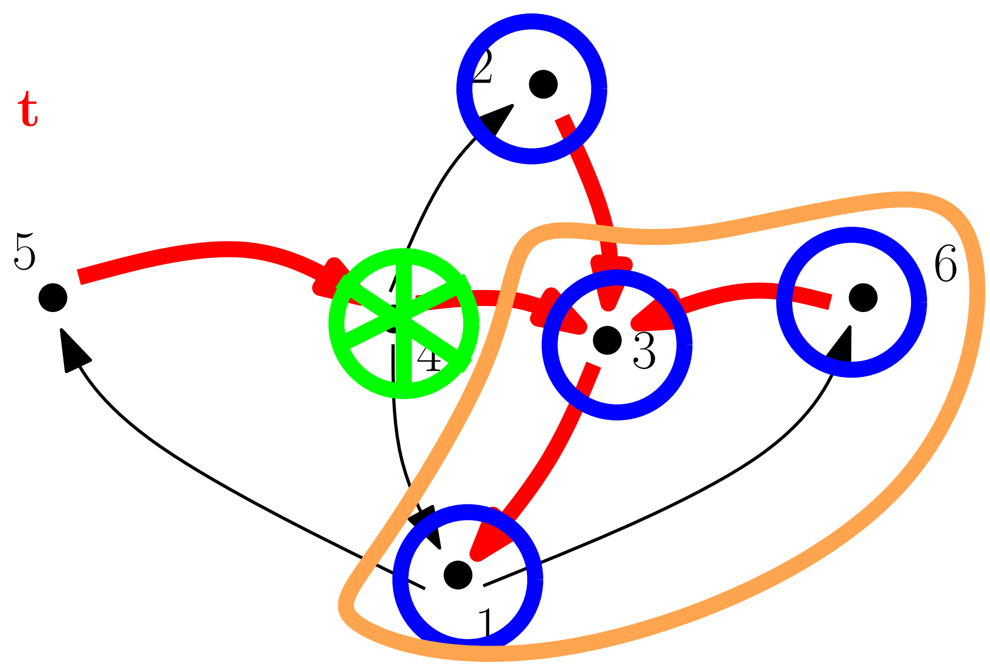
- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où

ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



$\rightarrow$ on a fini l'exploration (note: on n'a pas exploré tout le graphe)

$\rightarrow$ on garde $\psi(\mathbf{t}) := \{1, 3, 6\}$ qui est fortement connexe

L'algorithme pour calculer les multiplicités

- Corollaire

  Le nombre d'arbres couvrants de $\mathcal{T}G$ enracinés en $\mathbf{t}$ est égal à:

$$Z_{\mathbf{t}} = \prod_{\substack{W \subset V \\ propre, f.c.}} (\text{forêts couvrantes de } G \text{ enracinées en } W^c)^{m(W)}$$

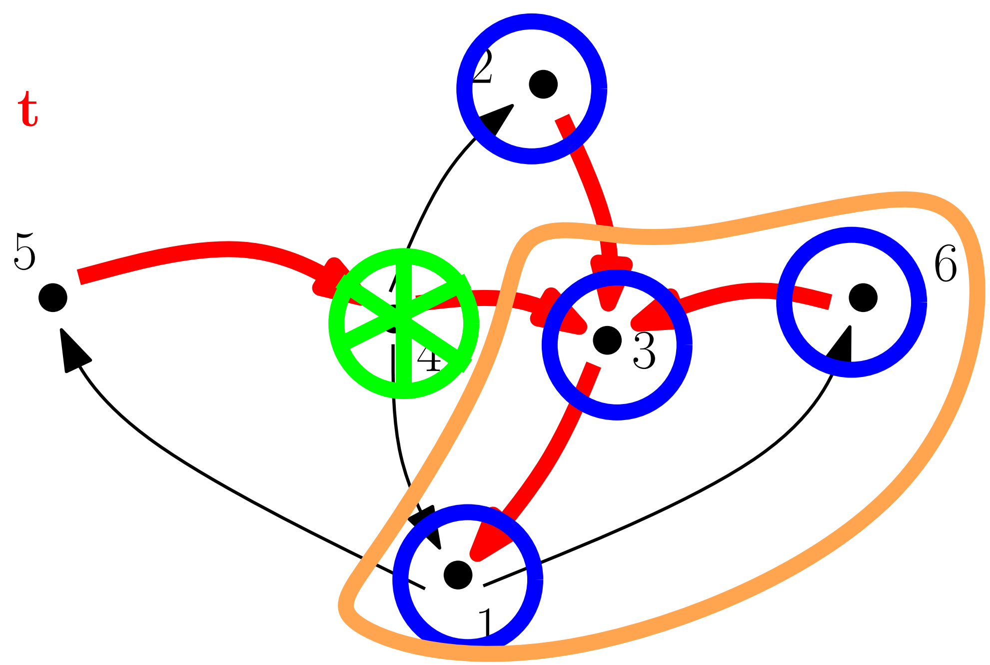
- Définition algorithmique des nombres $m(W)$

Algorithme: **entrée:** un a.c. $\mathbf{t}$ de G

sortie: un sous-ensemble $\psi(\mathbf{t}) = W \subset V$ fortement connexe

parcours en largeur (en remontant les arêtes) où

ne survivent que les sommets découverts via $\mathbf{t}$



$\to$ on a fini l'exploration (note: on n'a pas exploré tout le graphe)

$\to$ on garde $\psi(\mathbf{t}) := \{1, 3, 6\}$ qui est fortement connexe

Définition-Lemme: $m(W, w) = m(W) =$ nb. d'arbres couvrants enracinés en w qui renvoient W

On vient de voir $m(\{1, 3, 6\}) \geq 1$

Exemple: le graphe complet

- On regarde le graphe dont les sommets sont les n^{n-1} arbres de Cayley enracinés.

- Si on applique l'algo à un graphe de Cayley, on trouve $W =$ 1-voisinage de la racine.

Donc $m(W) = (k-1)(n-1)^{n-k-1}$ où $k = |W|$.

(nombre de manière de compléter les $n-k$ sommets restants par une forêt à $k-1$ racines)

Le nombre d'arbres couvrant de ce (gros) graphe est donc:

$$\prod_{n=2}^{n-1} \left((n-k)n^{k-1}\right)^{\binom{n}{k}(k-1)(n-1)^{n-k-1}}$$

Exemple: le graphe complet

- On regarde le graphe dont les sommets sont les n^{n-1} arbres de Cayley enracinés.

- Si on applique l'algo à un graphe de Cayley, on trouve $W =$ 1-voisinage de la racine.

Donc $m(W) = (k-1)(n-1)^{n-k-1}$ où $k = |W|$.

(nombre de manière de compléter les $n-k$ sommets restants par une forêt à $k-1$ racines)

Le nombre d'arbres couvrant de ce (gros) graphe est donc:

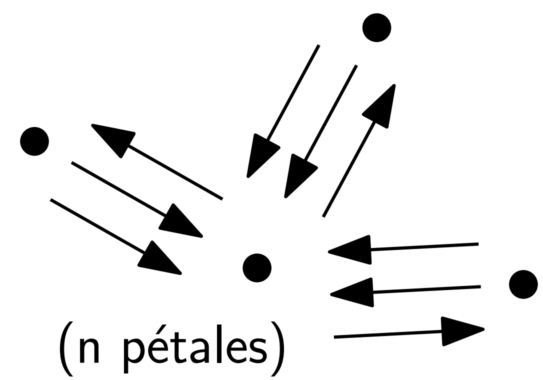
$$\prod_{n=2}^{n-1} \left((n-k)n^{k-1}\right)^{\binom{n}{k}(k-1)(n-1)^{n-k-1}}$$

- Exercice: prendre pour G le graphe bouquet:

alors $\mathcal{T}G$ est (presque) le graphe de l'hypercube $\{0,1\}^n$.

On retrouve la formule de Stanley pour les a.c. de l'hypercube:

$$|\mathcal{T}\{0,1\}^n| = \prod_{i=1}^{n} (2i)^{\binom{n}{i}}$$



Exemple: le graphe complet

• On regarde le graphe dont les sommets sont les n^{n-1} arbres de Cayley enracinés.

• Si on applique l'algo à un graphe de Cayley, on trouve $W =$ 1-voisinage de la racine.
Donc $m(W) = (k-1)(n-1)^{n-k-1}$ où $k = |W|$.

(nombre de manière de compléter les $n-k$ sommets restants par une forêt à $k-1$ racines)

Le nombre d'arbres couvrant de ce (gros) graphe est donc:

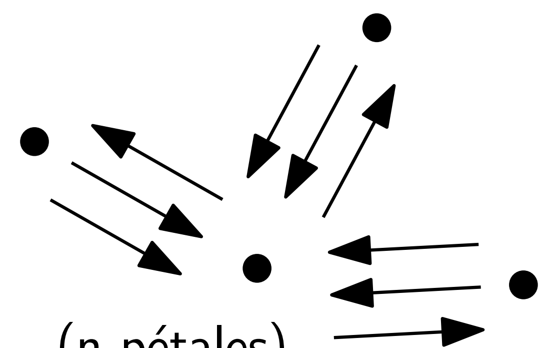
$$\prod_{n=2}^{n-1} \left((n-k)n^{k-1}\right)^{\binom{n}{k}(k-1)(n-1)^{n-k-1}}$$

• Exercice: prendre pour G le graphe bouquet:

alors $\mathcal{T}G$ est (presque) le graphe de l'hypercube $\{0,1\}^n$.

On retrouve la formule de Stanley pour les a.c. de l'hypercube:

$$|\mathcal{T}\{0,1\}^n| = \prod_{i=1}^{n} (2i)^{\binom{n}{i}}$$



(n pétales)

note: pas de bijection connue!

Démonstration?

- En fait c'est un peu compliqué...
- Pour chaque $W \subset V$, pour chaque $w \in W$, pour chaque arbre qui contribue à $m(W, w)$ on trouve une "copie" de la matrice Q_W dans R.

Merci!