Processus de branchement avec annihilation ballistique

A. Briquet, P. Chassaing, L. Gerin, M. Krikun, S. Popov

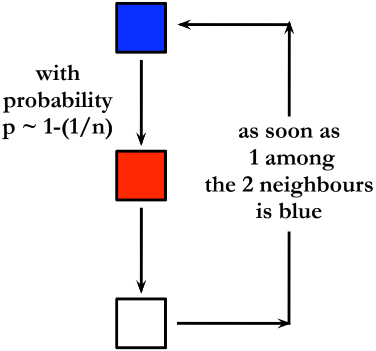
Institut Elie Cartan

Aléa, 17 mars 2015

Un automate probabiliste

Soit un automate probabiliste à 3 états :

- bleu : infecté
- rouge : convalescent
- blanc : sain



Mesure stationnaire : difficile à étudier $\longrightarrow$ limite d'échelle et généralisation

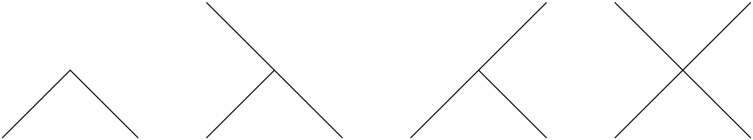
Les modèles

Soit une population de particules sur $\mathbb{R}$, subdivisée en 2 espèces :

- les positives, de vitesse 1
- les négatives, de vitesse -1.

Naissance : Elles donnent naissance à des particules de vitesse opposée selon des processus de Poisson indépendants.

Mort : Quand deux particules de vitesses opposées se rencontrent, on a 4 situations possibles :



α β γ δ

Régime stationnaire

X_t = particules au temps t
X_t^+ = particules positives au temps t
X_t^- = particules négatives au temps t

Naissances et morts : deux effets antagonistes.

Stabilisation ? $\longrightarrow$ Existe-t-il une distribution stationnaire ?

Si oui, corrélation entre particules positives et négatives ?

Rappel sur les processus de Poisson

Processus de Poisson d'intensité λ sur $\mathbb{R}$: processus ponctuel où les écarts entre deux points consécutifs sont i.i.d. de loi exponentielle de λ.

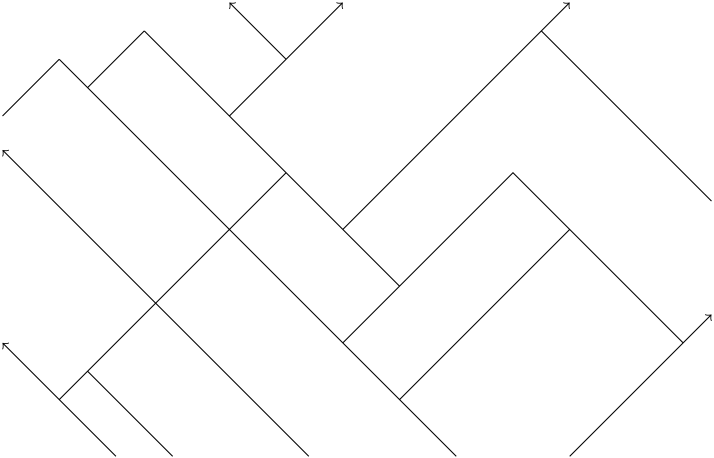
Processus de Poisson à deux types d'intensité (λ, μ) : superposition de deux processus de Poisson d'intensités λ et μ indépendants.

Si on oublie les marques, c'est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.

Un processus ponctuel est un processus de Poisson ssi pour tout couple de segments disjoints, la distribution des points est i.i.d.

Les modèles

Exemple de trajectoire avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$:

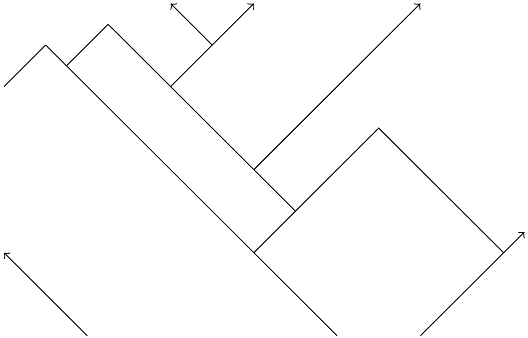


Les modèles

Deux modèles particuliers : le modèle d'annihilation pure et le modèle réversible.

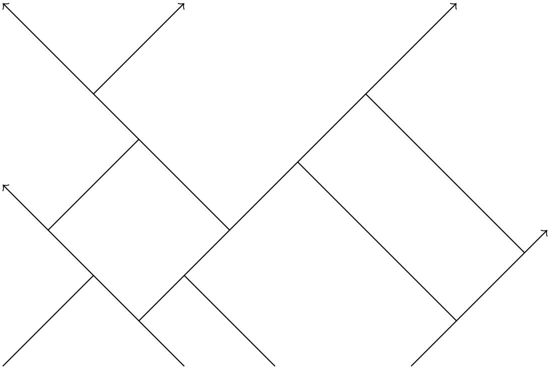
Annihilation pure : $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$

$\longrightarrow$ quand deux particules se rencontrent, elles s'annihilent toujours.



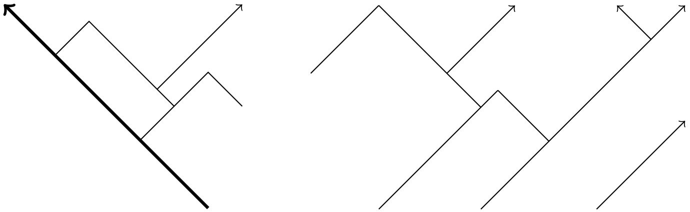
Les modèles

Modèle réversible : $\alpha = \delta = 0$, $\beta = \gamma = 1/2$
$\longrightarrow$ quand deux particules se rencontrent, l'une des deux survit et l'autre est détruite, avec probabilité 1/2.



Premières propriétés des distributions stationnaires

La distribution vide est trivialement stationnaire.



Bonnes configurations :

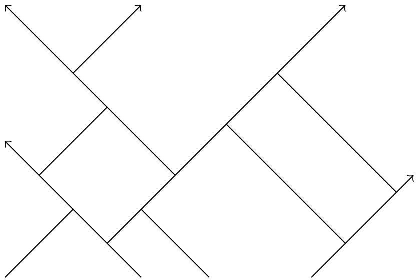
- localement finies ($\forall B$ borné, $X_t \cap B$ est fini)
- $\inf X_t^+ = \inf X_t^- = -\infty$
- $\sup X_t^+ = \sup X_t^- = +\infty$

Bonnes distributions : portées par les bonnes configurations

Résultats

Théorème

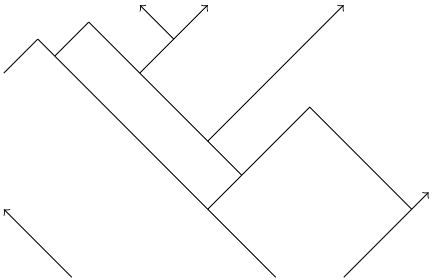
Le processus de Poisson à deux types avec les particules positives (resp. négatives) d'intensité 2 est une distribution stationnaire pour le modèle réversible.
C'est l'unique bonne distribution stationnaire invariante par translation.



Résultats

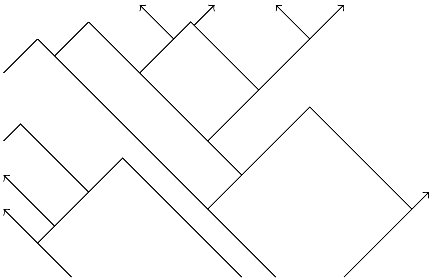
Théorème

Il existe une distribution stationnaire pour le modèle d'annihilation pure telle que les particules positives (resp. négatives) suivent un processus de Poisson d'intensité 1.
C'est l'unique bonne distribution stationnaire invariante par translation.



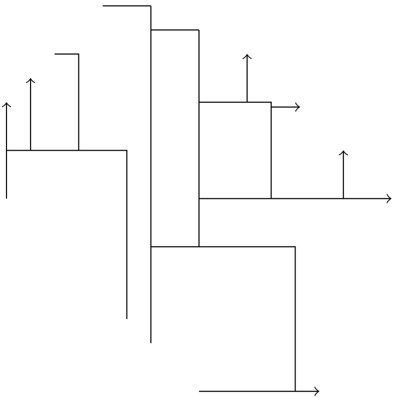
Le processus penché

On fait "pivoter" le processus.



Le processus penché

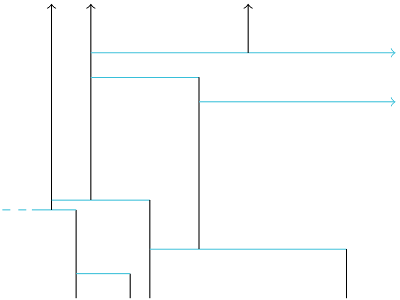
On fait "pivoter" le processus.



Les particules horizontales sont des balles qui tuent les verticales.

Le processus penché

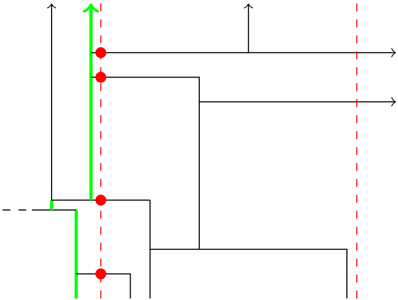
On fait "pivoter" le processus.



On ne s'intéresse plus qu'aux particules "qui montent".
On n'a à présent plus que des particules immobiles et d'un seul type.

On peut reconstituer les positions des particules positives (horizontales) avec celles des particules négatives (verticales).

Le processus penché

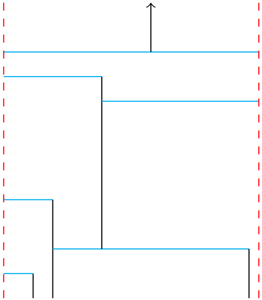


Le processus sur la bande ne dépend pas des événements à sa droite.

Il dépend des événements à sa gauche uniquement à travers la hauteur des balles qui rentrent dedans.

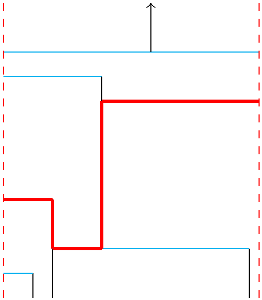
Les points d'entrée dans la paroi de gauche forment un processus de Poisson, tiré par la particule verte.

Le processus penché



On regarde donc maintenant le processus restreint à la bande, avec la dynamique penchée et des balles qui arrivent selon un flux poissonnien.

C'est un processus de Markov.



Quand toutes les particules présentes initialement sur le segment ont été détruites, les particules restantes forment un processus ponctuel indépendant de la configuration initiale.

Il y a renouvellement.

La distribution stationnaire est donc atteinte p.s. en temps fini.

Après calculs, on trouve que cette distribution stationnaire est une loi de Poisson.

Extension au plan

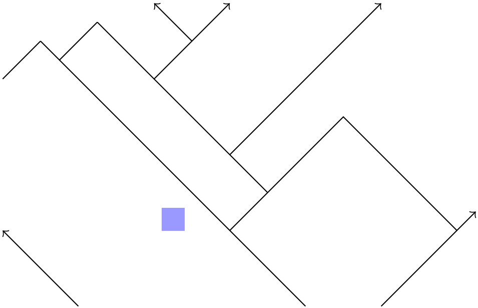
On étend ensuite le processus sur le segment à tout le plan grâce au théorème d'extension de Kolmogorov.

On fait pivoter le pavage obtenu : on obtient un pavage du plan qui obéit à la dynamique du processus droit.

On fait le raisonnement en faisant pivoter dans l'autre sens $\longrightarrow$ même résultat pour les particules positives.

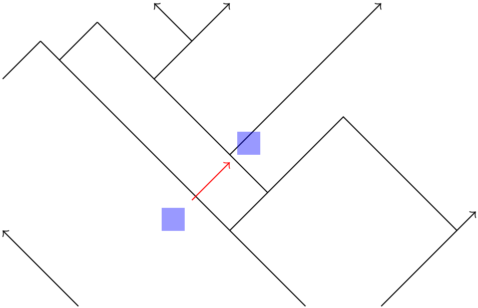
Retour au processus droit

Le pavage est donc invariant par translation en loi dans les directions $\pi/4$ et $3\pi/4$.



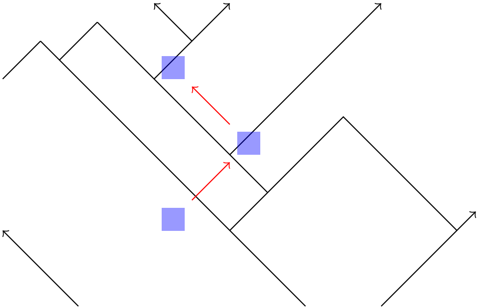
Retour au processus droit

Le pavage est donc invariant par translation en loi dans les directions $\pi/4$ et $3\pi/4$.



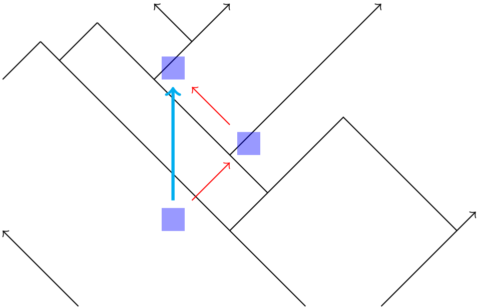
Retour au processus droit

Le pavage est donc invariant par translation en loi dans les directions $\pi/4$ et $3\pi/4$.



Retour au processus droit

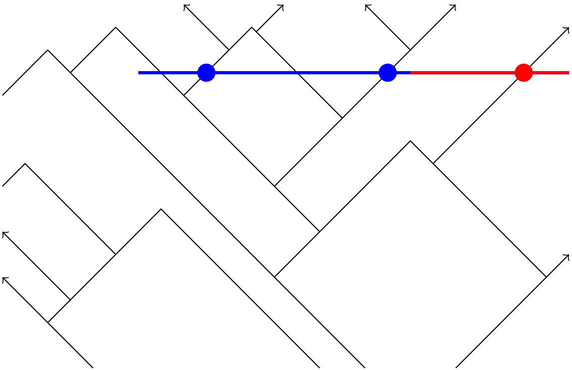
Le pavage est donc invariant par translation en loi dans les directions $\pi/4$ et $3\pi/4$.



La distribution construite est donc stationnaire.

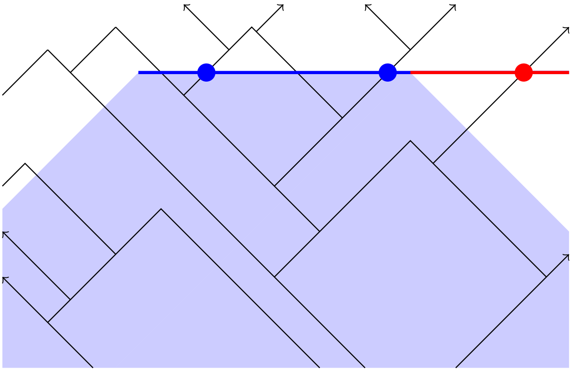
Distribution des particules positives

On va prouver que la distribution des particules positives sur deux segments disjoints sont indépendants.



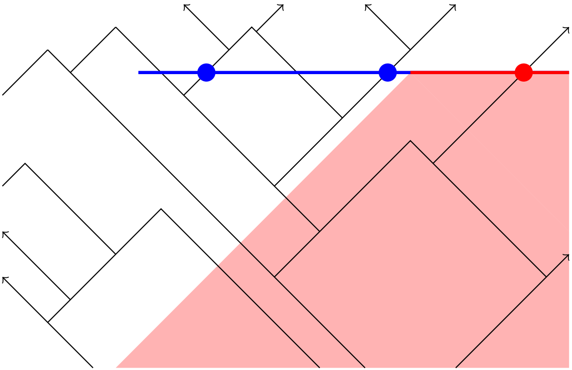
Distribution des particules positives

Voici le cône de dépendance du segment bleu :



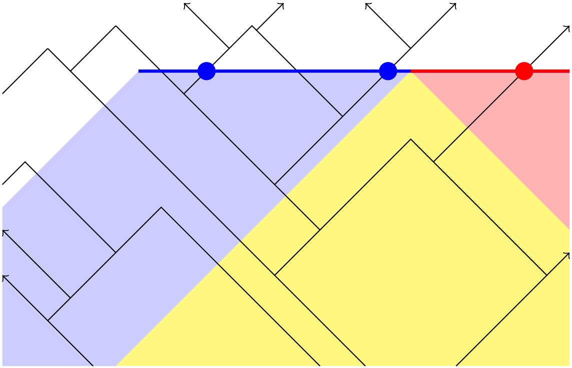
Distribution des particules positives

Voici le cône de dépendance du segment rouge :



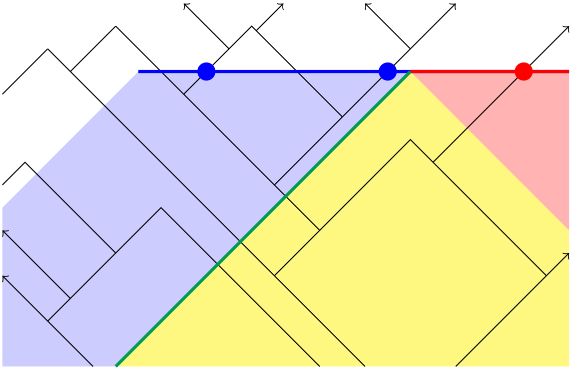
Distribution des particules positives

Ils ont une zone en commun : a priori, les deux segments ne sont pas indépendants.



Distribution des particules positives

Le processus penché donne toutefois une propriété de Markov : conditionnellement à la ligne verte, la zone bleue et les zones jaunes et rouges sont indépendantes.
La ligne verte ne nous donne que des informations sur les particules négatives.



Loi stationnaire

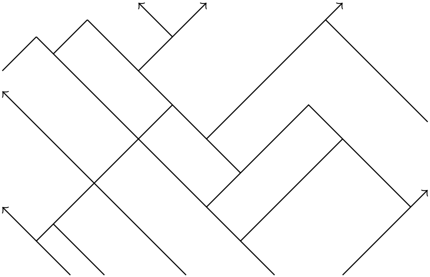
Les distributions des particules positives sur les segments disjoints sont i.i.d. : elles forment donc un processus de Poisson.

On peut faire la même chose avec les particules négatives.

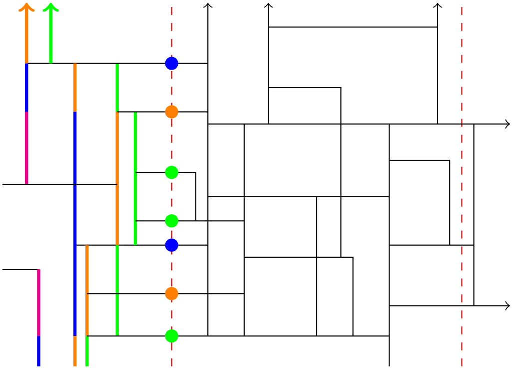
Ces processus sont indépendants dans le cas réversible (les particules positives et négatives forment donc un processus de Poisson à 2 types), mais ils sont corrélés dans le cas d'annihilation pure.

Conjecture

Si $\beta + \delta < 1$ *et* $\gamma + \delta < 1$, *il existe une distribution stationnaire pour le modèle* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *telle que les particules positives (resp. négatives) suivent un processus de Poisson d'intensité* $\frac{1}{1-(\beta+\delta)}$ *(resp.* $\frac{1}{1-(\gamma+\delta)}$*).*
C'est l'unique bonne distribution stationnaire invariante par translation.

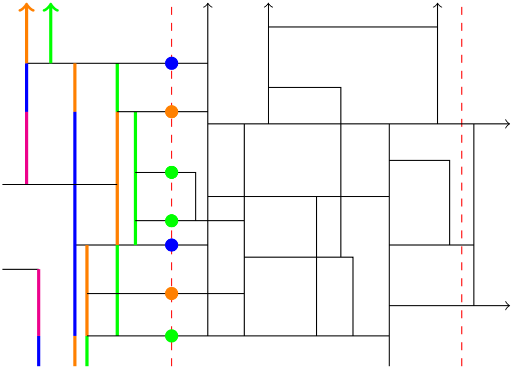


Processus penché : cas général



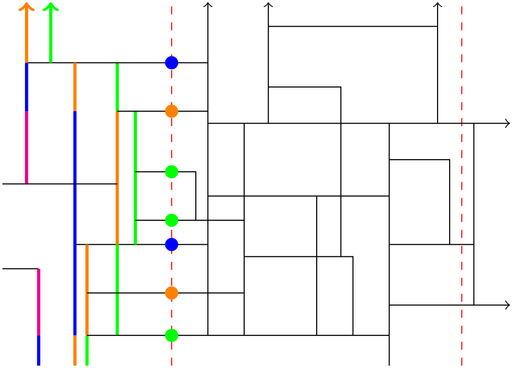
Particule verte : dernière particule avant le début du segment
$\longrightarrow$ processus de Poisson d'intensité 1 sur les pointillés rouges.

Processus penché : cas général



Particule orange : avant-dernière particule avant le début du segment $\longrightarrow$ processus de Poisson d'intensité 1 sur la particule verte, une proportion $(\alpha + \beta)$ est absorbée, une proportion $(\delta + \gamma)$ arrive aux pointillés rouges.

Processus penché : cas général



Particule bleue : antepénultième particule avant le début du segment
$\longrightarrow$ proportion $(\delta+\gamma)^2$ de son flux sur les pointillés rouges, etc...

Questions ouvertes et conjectures

- La distribution construite est-elle l'unique distribution stationnaire avec au moins une particule p.s. ?
- Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la distribution stationnaire est-elle poissonnienne ?
- Quelles sont les caractéristiques de cette distribution ?
- Dans le cas d'annihilation pure, on sait par simulation que :
  - Les écarts entre particules ne sont pas exponentiels
  - Les signes des particules ne sont pas indépendants
  - Les signes des particules ne sont pas Markoviens
  - Distribution de certains motifs au-delà des symétries naturelles ?