EXERCICES - DIAMANT AZTÈQUE

SYLVIE CORTEEL - ALÉA 2015

Exercice 1. Treillis

Un treillis est un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$ dans lequel chaque couple d'éléments (a, b) admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$. Il est muni de deux lois $\wedge$ et $\vee$ telles que :

– $a \wedge a = a \vee a = a$
– $a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = a$
– $a \leq b \;\Leftrightarrow\; b \wedge a = a$

Ainsi $\sup(a, b) = a \vee b$ et que $\inf(a, b) = a \wedge b$.

Montrer que l'ensemble des pavages du diamant aztèque forme un treillis pour la relation d'ordre "flip". On rappelle que le rang d'un pavage T est $r(T)$ le nombre minimum de flips pour aller du pavage tout horizontal à T. On dit que $T \leq U$ si T et U différent d'un flip et $r(T) = r(U) - 1$.

Indice : utiliser la fonction de hauteur pour définir $\sup(a, b)$ et $\inf(a, b)$.

Exercice 2. Diamant aztèque et Matrices à Signes Alternants

Une matrice à signes alternants (MSA) de taille est une matrice à n colonnes et n lignes dont les entrées sont 0,1, ou -1 et telle que sur chaque ligne et chaque colonne :

– Les entrées non nulles alternent en signe
– La somme est égale à un

Soit ASM_n l'ensemble des MSA de taille n et AZ_n l'ensemble des pavages du diamant aztèque de taille n. Pour $A \in ASM_n$, soit $N_+(A)$ le nombre de 1 de A et soit $N_-(A)$ le nombre de -1 de A.

1. Construire une surjection
$$F \;:\; AZ_n \to ASM_{n+1}$$
telle que pour toute $A \in ASM_{n+1}$, $|F^{-1}(A)| = 2^{N_-(A)}$. Indice : penser au degré des sommets du pavage. Un exemple est donné sur la gauche de la Figure 1.

2. Construire une surjection
$$F \;:\; AZ_n \to ASM_n$$
telle que pour toute $A \in ASM_{n+1}$, $|F^{-1}(A)| = 2^{N_+(A)}$. Indice : penser au degré des sommets du pavage. Un exemple est donné sur la droite de la Figure 1.

3. Quel est le lien entre le nombre de 1 et le nombre de -1 d'une matrice à signes alternants ?

4. En déduire le nombre de pavages du diamant aztèque de taille n. Raffiner en comptant le nombre de dominos verticaux.

Reference : Journal of Algebraic combinatorics **1** (1992), no 2, 111-132.

Date: 16 Mars 2015.

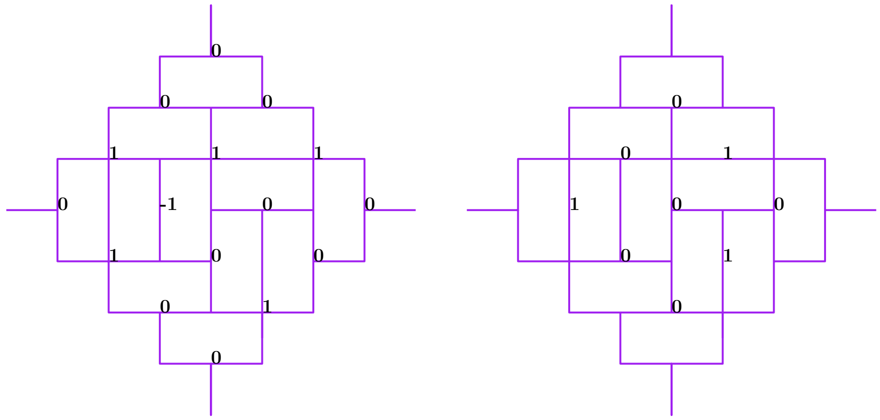

Figure 1. Diamant aztèque et Matrices à Signes Alternants

Exercice 3. Diamant aztèque et λ-déterminant

On rappelle la formule de Desnanot-Jacobi pour le calcul du déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$:

$$|M| \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n-1\}\\ \{2,\dots n-1\}}}| = |M_{\substack{\{1,\dots n-1\}\\ \{1,\dots n-1\}}}| \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n\}\\ \{2,\dots n\}}}| - |M_{\substack{\{1,\dots n-1\}\\ \{2,\dots n\}}}| \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n\}\\ \{1,\dots n-1\}}}|$$

Pour $I, J \subseteq \{1, \dots n\}$, $M_{\substack{I\\J}}$ est la sous-matrice formée des lignes de M indexées par I et des colonnes de M indexées par J. Robbins et Rumsey en 86 ont défini le λ-déterminant $\det_\lambda(M) = |M|_\lambda$ par :

$$|M|_\lambda \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n-1\}\\ \{2,\dots n-1\}}}|_\lambda = |M_{\substack{\{1,\dots n-1\}\\ \{1,\dots n-1\}}}|_\lambda \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n\}\\ \{2,\dots n\}}}|_\lambda + \lambda |M_{\substack{\{1,\dots n-1\}\\ \{2,\dots n\}}}|_\lambda \cdot |M_{\substack{\{2,\dots n\}\\ \{1,\dots n-1\}}}|_\lambda$$

pour $n > 1$ et $\det_\lambda(a) = a$ pour $n = 1$ and 0 pour $n = 0$.

Ils ont montré que

$$|M|_\lambda = \sum_{A \in ASM_n} \lambda^{I(A) - N_-(A)} (1+\lambda)^{N_-(A)} \prod_{i,j} M_{i,j}^{A_{i,j}}$$

avec $I(A) = \sum_{i<r,\ j>s} A_{i,j} A_{r,s}$ et $N_-(A)$ le nombre de -1 de A.

1. Montrer que si $\lambda = -1$, on retrouve la formule classique pour le calcul du déterminant.

2. Montrer que le λ-déterminant de la matrice $D_n = (x_j^{i-1})_{1 \le i,j \le n}$ est égal à $\prod_{i<s}(x_i + \lambda x_s)$.

3. En déduire le nombre de pavages du diamant aztèque de taille n.

Reference : Advances in Maths **62** 1986, 169-184.

Exercice 3. Diamant aztèque et Chemins qui ne se coupent pas

Un chemin de Schröder de longueur $2n$ est un chemin formé de pas de l'ensemble $\{(1,1), (1,-1), (2,0)\}$, joignant le point $(0,0)$ au point $(2n, 0)$ et confiné au demi-plan positif $\{(x,y) \mid y \ge 0\}$. Soit $s_{n,k}$ le nombre de chemins de Schröder de longueur $2n$ ayant k pas horizontaux et $s_n = \sum_k s_{n,k}$.

1. Rappeler la formule pour $s_{n,0}$ puis donner une formule pour $s_{n,k}$.

2. Indépendamment de la question précédente, donner une équation satisfaite par la série génératrice ordinaire des chemins de Schröder $S(t) = \sum_{n \ge 1} s_n t^n$. Faire de même pour la série bivariée $S(t,u) =$

$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} s_{n,k}u^k t^n$.

3. Un chemin de Schröder est dit petit s'il ne contient pas de pas horizontal au niveau 0. Soit p_n le nombre de petits chemins de Schröder de longueur $2n$. Montrer par une égalité de séries génératrices que $s_n = 2p_n$. Prouver l'égalité précédente bijectivement.

4. Un système de (petit) Schröder de taille n est un n-uplet de (petits) chemins de Schröder d'origines les points $(-2i+1,0)$ pour $i = 1,\dots,n$ et d'extrémité les points $(2i-1,0)$ pour $i = 1,\dots,n$. Soit S_n^{s} le nombre de systèmes de Schröder non intersectants de taille n et S_n^{p} celui des systèmes de petit Schröder non intersectants. Montrer que $S_n^{\mathrm{p}} = S_{n-1}^{\mathrm{s}}$ bijectivement. Indication : Voir figure 2.

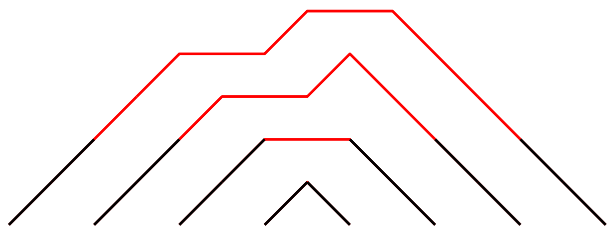

FIGURE 2

5. Montrer en utilisant le lemme LGV que $S_n^{\mathrm{s}} = \det((s_{i+j-1})_{1\leq i,j\leq n}$ et que $S_n^{\mathrm{p}} = \det(p_{i+j-1})_{1\leq i,j\leq n}$. Rappel : Soit $G = (V,E)$ un graphe orienté acyclique auquel on associe une pondération $w : E \to \mathbb{R}$. On associe un poids à tout chemin P entre deux sommets A et B, $w(P) = \prod_{e\in P} w(e)$. A des ensembles de sommets $\{A_1,\dots,A_n\}$ et $\{B_1,\dots,B_n\}$, on associe la matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j,\leq n}$ avec $m_{i,j} = \sum_{P:\ A_i\to B_j} w(P)$. Deux chemins sont non intersectants s'ils ne partagent pas de sommets. Alors le lemme de LGV, dit que

$$\det M = \sum_S \epsilon(\sigma_S) w(S)$$

où $w(S) = \prod_{P_i\in S} w(P_i)$ et S est un syst ème de chemins deux à deux non intersectants, σ_S est la permutation induite par le système (chemins de A_i à $B_{\sigma_S(i)}$) et ϵ est le signe de la permutation.

6. En déduire, à l'aide de la question 3, une récurrence pour $\det S_n$, et calculer S_n^{s}.

7. On décore les quatre types de dominos résultants de la façon suivante :

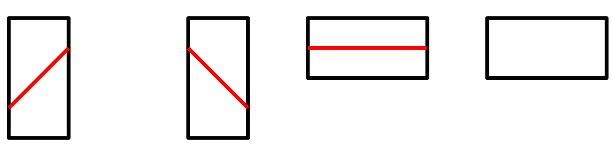

FIGURE 3. Décoration des 4 types de dominos dans un pavage du diamant aztèque.

Montrer en utilisant ces décorations que les pavages du diamant aztèque de taille n sont en bijection avec les systèmes de Schröder non intersectant de taille n. Voir Figure 4.

8. Déduire du résultat précédent le nombre de pavages du diamant aztèque de taille n.

Reference : Electronic Journal of Combinatorics, **12** (2005), # R18.

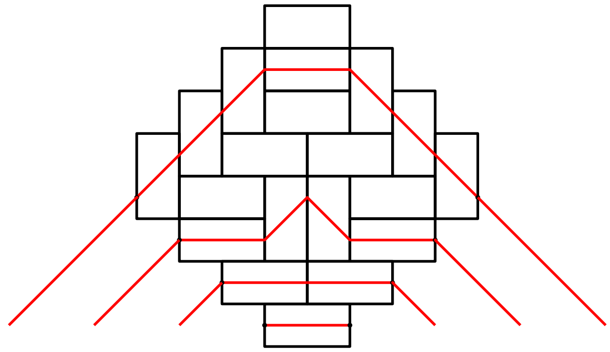

FIGURE 4. Décoration des 4 types de dominos dans un pavage du diamant aztèque.

Exercice 4. Diamant aztèque par récurrence

1. Soit $g(n)$ le nombre de pavages du diamant aztèque de taille n. Montrer que

$$g(n)g(n-2) = 2g(n-1)g(n-1)$$

pour $n \geq 2$. Utiliser les couplages parfaits. Indice : Superposer un couplage du diamant de taille n et un couplage du diamant de taille $n-2$ et récupérer deux paires de couplages du diamant de taille $n-1$.

2. Soit $g(n,k)$ le nombre de pavages du diamant aztèque de taille n tels que les cellules les plus à gauche des k premières lignes en partant du haut sont pavées par des dominos horizontaux puis les cellules les plus à gauche des $n-k$ lignes suivantes sont pavées par des dominos verticaux. Montrer que

$$g(n,k) = \binom{n}{k} g(n-1),$$

pour $n \geq k \geq 0$ et $n \geq 1$.

Exercice 5. Diamant aztèque et Permutations de Baxter

On a vu dans l'exercice 2, qu'á un pavage du diamant aztèque, on peut associer une matrice à signes alternants B de taille $n+1$ et une matrice A à signes alternants de taille n. On appelle une telle paire de matrices, une paire compatible.

1. Etant donnée une matrice à signes alternants B de taille $n+1$, combien de matrices à signes alternants de taille n sont compatibles avec B ?

2. On considère dans la suite que B ne contient pas de -1. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur B pour que $A_{i,j} = 0$? Donner un algorithme qui construit A à partir de B.

3. Montrer que A ne contient pas de -1 si et seulement si B est une permutation de Baxter. Rappel : Une permutation de Baxter est une permutation $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots)$ telle que il n'existe pas $i < j < k$ avec $\sigma(j+1) < \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)$ ou $\sigma(j) < \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j+1)$.

Reference : Electronic Journal of Combinatorics, **105** (2010), # R105.