

COMBINATOIRE DES ALGÈBRES
DE TEMPERLEY–LIEB
FINIES ET AFFINES

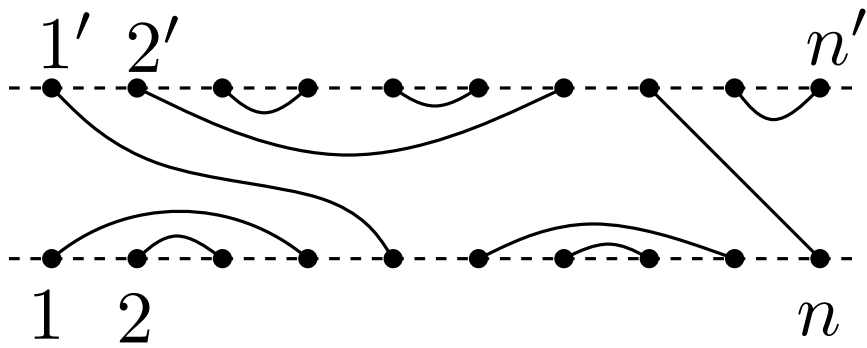
Philippe Nadeau

Journées ALEA, 18 Mars 2014.

L'algèbre de Temperley–Lieb (finie)

On fixe un entier $n \geq 2$ et un corps \mathbb{K} pour tout l'exposé.

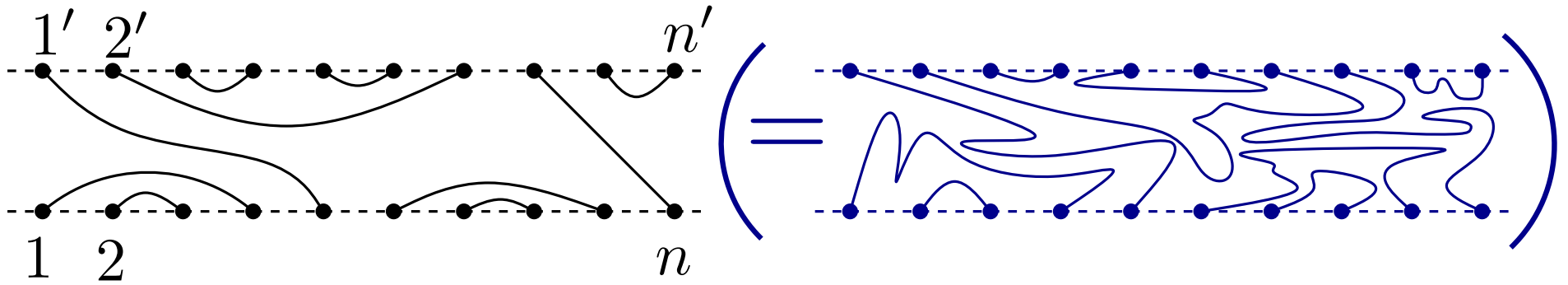
Base: Diagrammes non croisés entre $2n$ points.



L'algèbre de Temperley–Lieb (finie)

On fixe un entier $n \geq 2$ et un corps \mathbb{K} pour tout l'exposé.

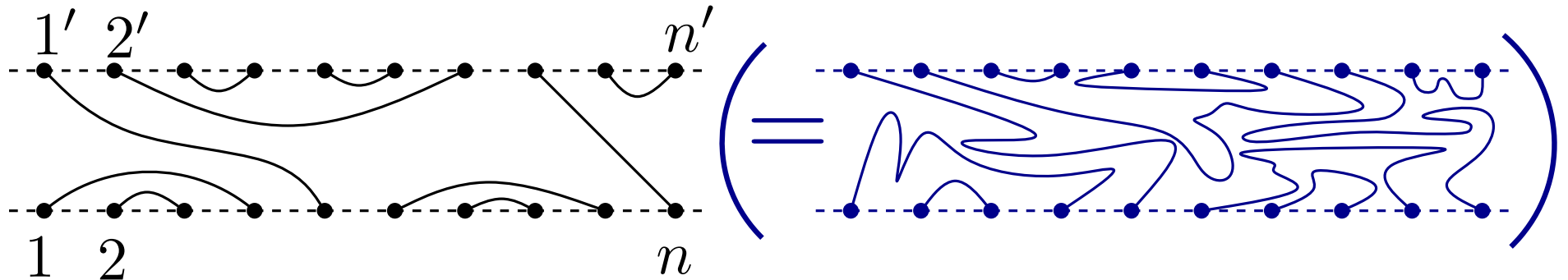
Base: Diagrammes non croisés entre $2n$ points.



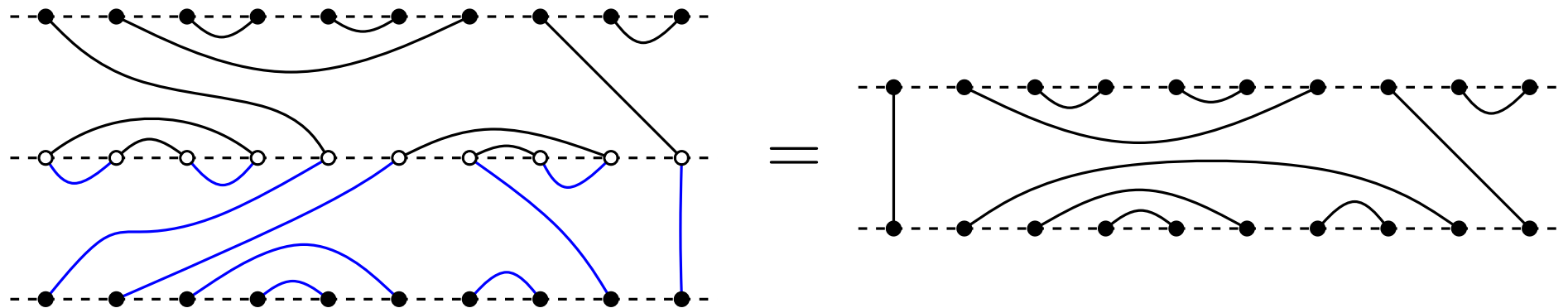
L'algèbre de Temperley–Lieb (finie)

On fixe un entier $n \geq 2$ et un corps \mathbb{K} pour tout l'exposé.

Base: Diagrammes non croisés entre $2n$ points.



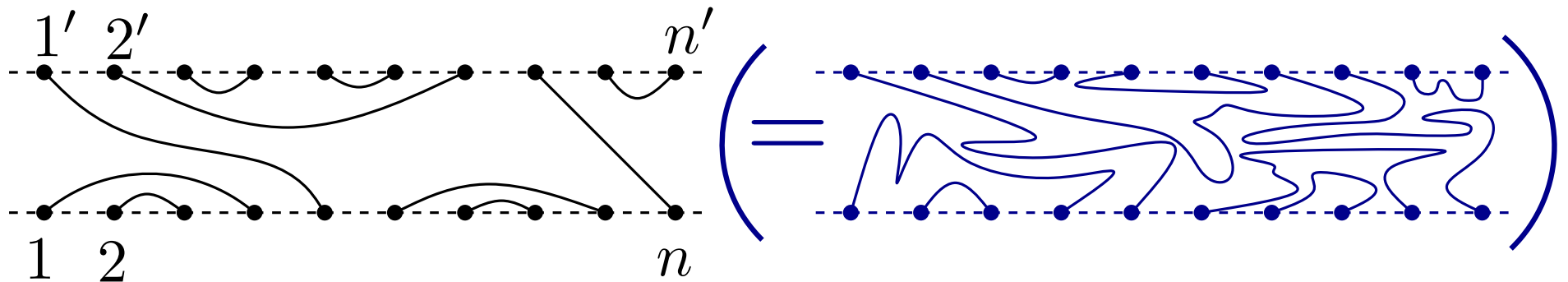
Produit: Concaténation + suppression des boucles fermées.



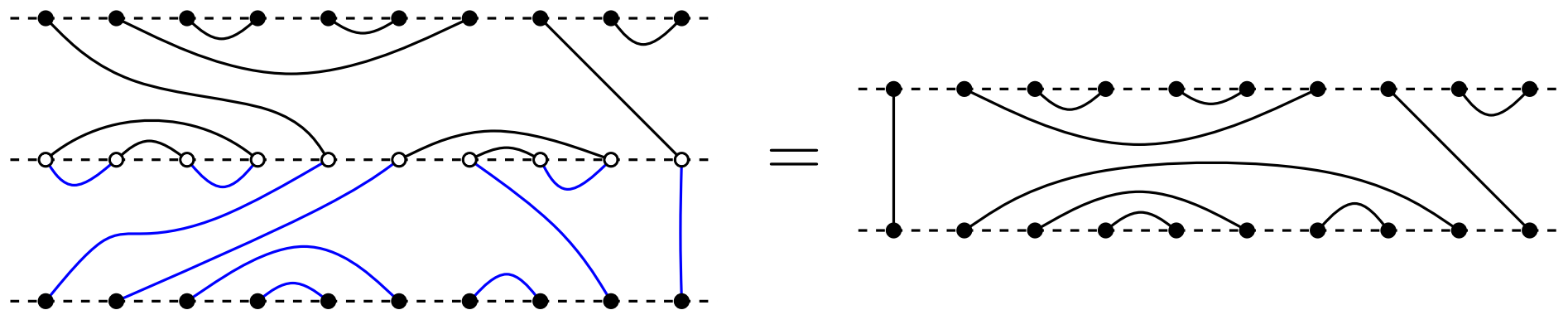
L'algèbre de Temperley–Lieb (finie)

On fixe un entier $n \geq 2$ et un corps \mathbb{K} pour tout l'exposé.

Base: Diagrammes non croisés entre $2n$ points.



Produit: Concaténation + suppression des boucles fermées.

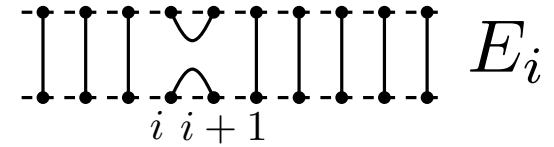


C'est une algèbre associative TL_n .

Elle a dimension C_n le n ième nombre de Catalan.

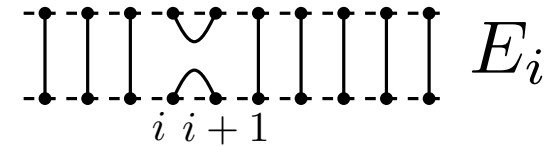
Présentation de l'algèbre TL_n

- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



Présentation de l'algèbre TL_n

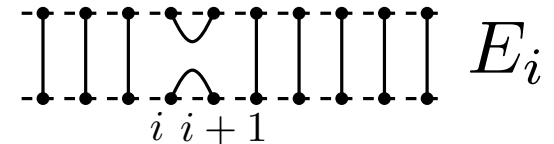
- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



Tout diagramme peut être écrit comme concaténation de E_i .

Présentation de l'algèbre TL_n

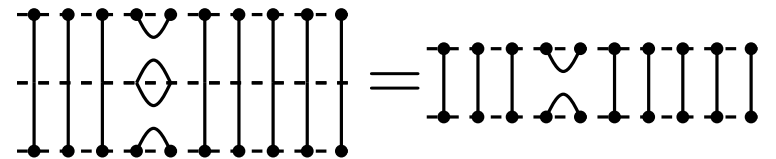
- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



Tout diagramme peut être écrit comme concaténation de E_i .

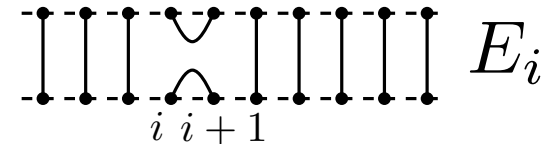
- **Relations**

$$e_i^2 = e_i$$



Présentation de l'algèbre TL_n

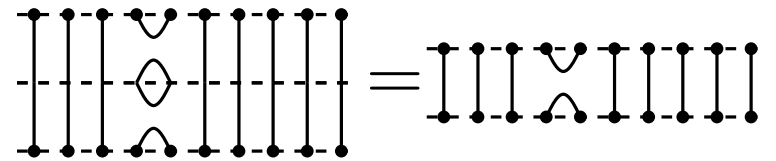
- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



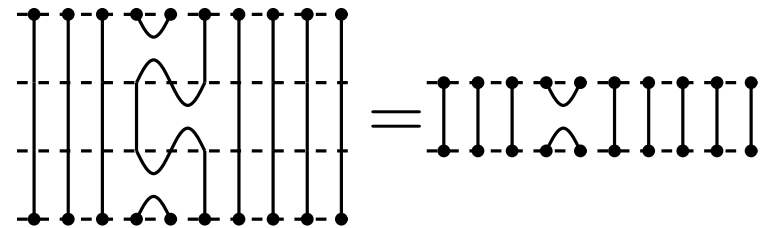
Tout diagramme peut être écrit comme concaténation de E_i .

- **Relations**

$$e_i^2 = e_i$$

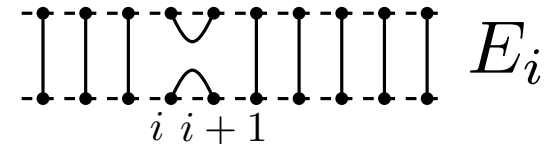


$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i$$



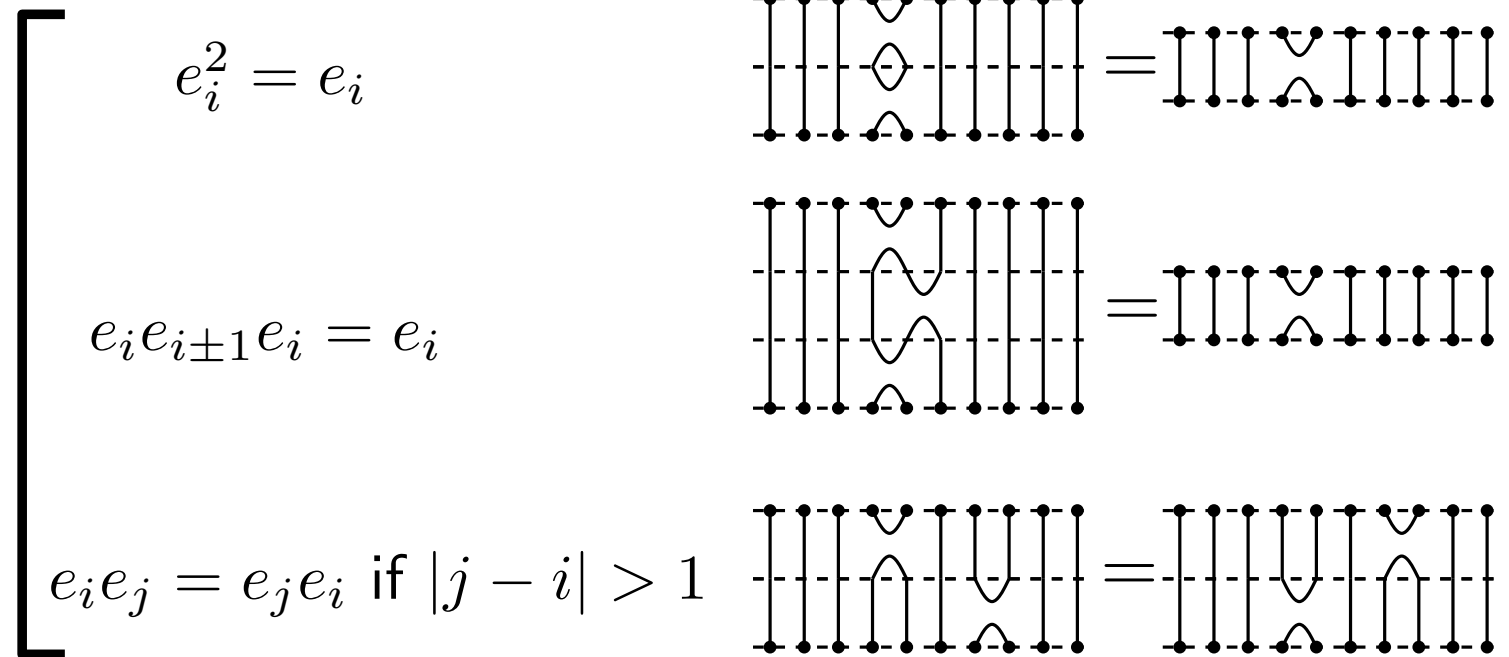
Présentation de l'algèbre TL_n

- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



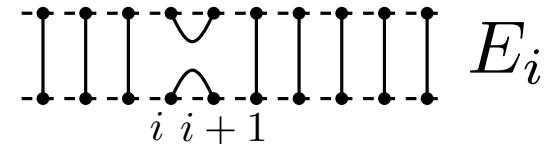
Tout diagramme peut être écrit comme concaténation de E_i .

- **Relations**



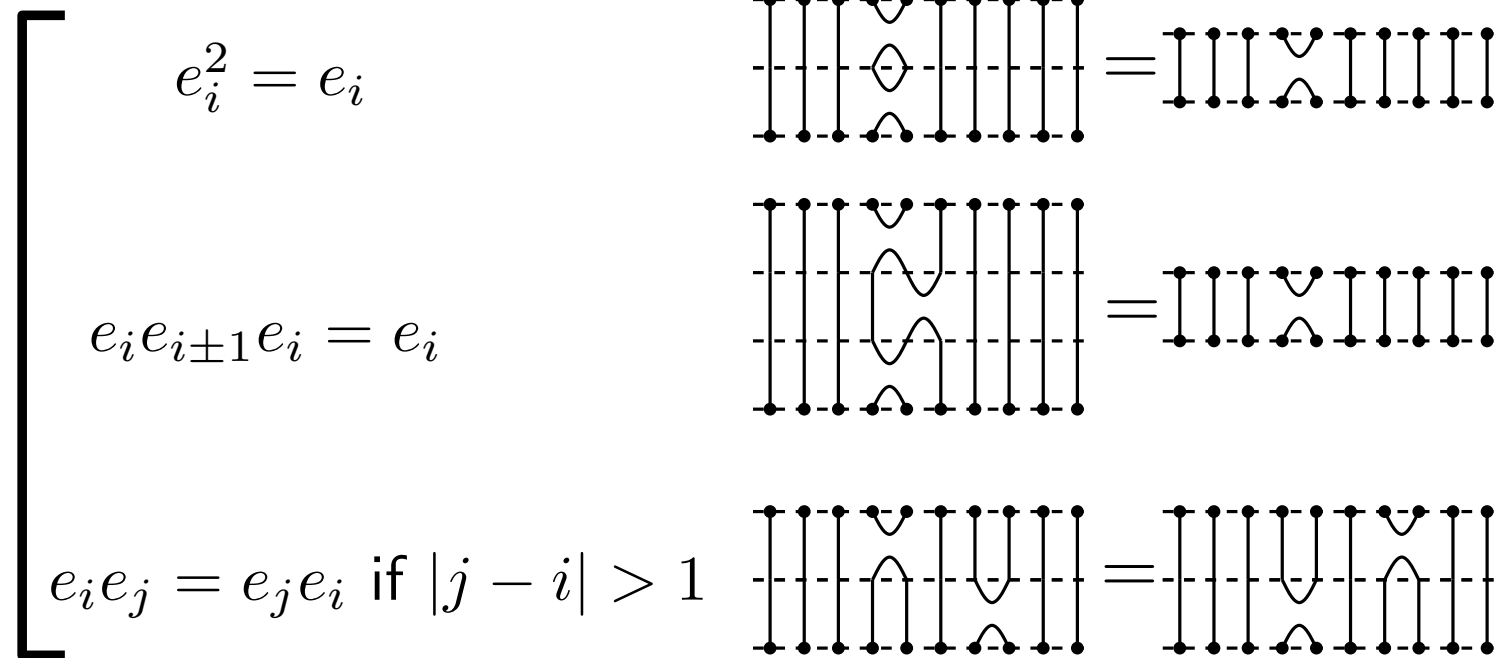
Présentation de l'algèbre TL_n

- **Générateurs** : e_1, e_2, \dots, e_{n-1}



Tout diagramme peut être écrit comme concaténation de E_i .

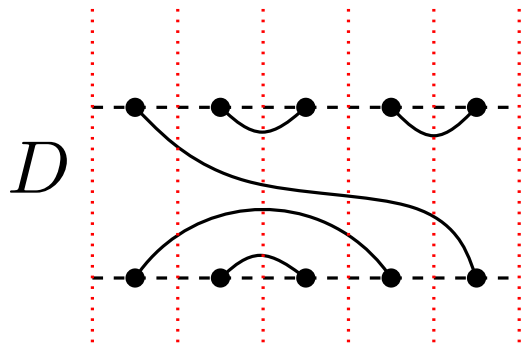
- **Relations**



Théorème [Kauffman '87] Les générateurs et relations ci-dessus définissent l'algèbre de Temperley–Lieb TL_n .

Décomposition en diagrammes élémentaires

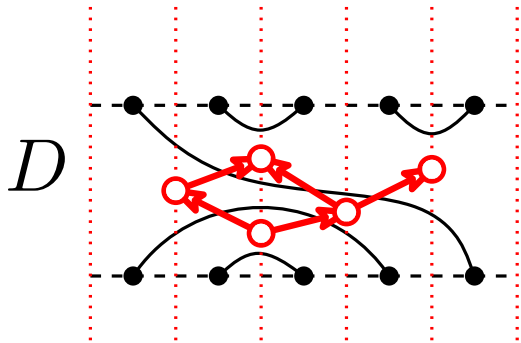
Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.



Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

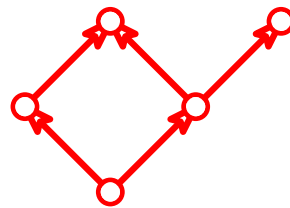
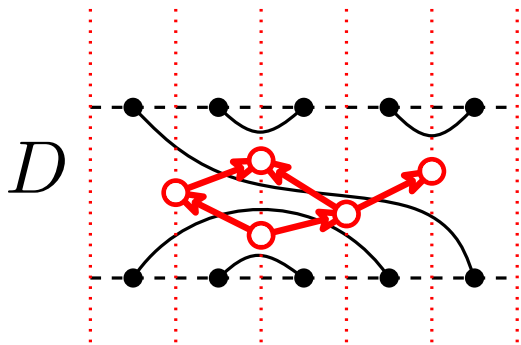
un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie



Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie

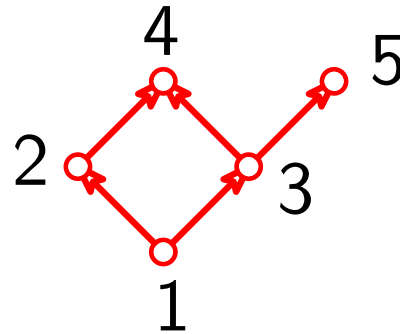
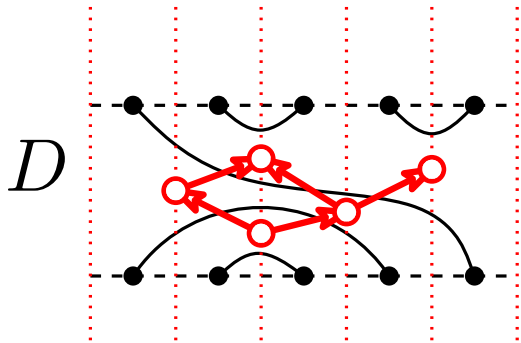


À chaque diagramme est associé un graphe orienté **acyclique**.

Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie



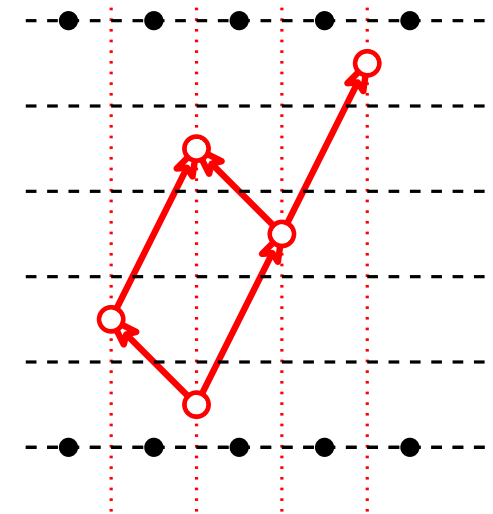
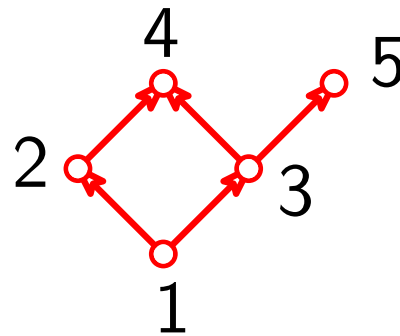
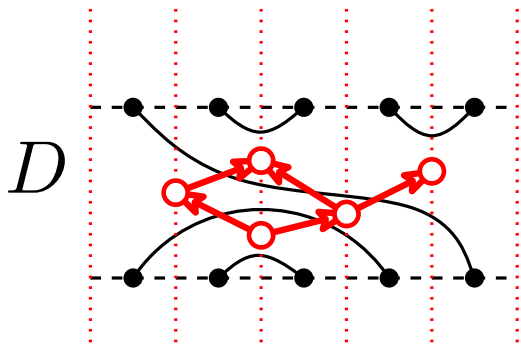
À chaque diagramme est associé un graphe orienté **acyclique**.

On peut alors choisir un parcours des sommets “compatible” : un sommet n’est visité qu’après tous ses antécédents.

Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie



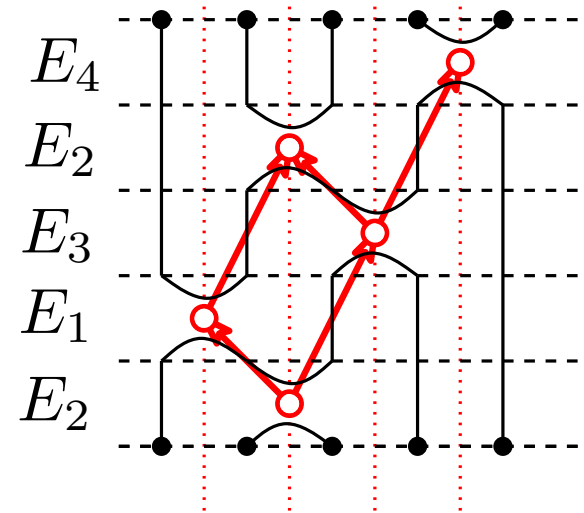
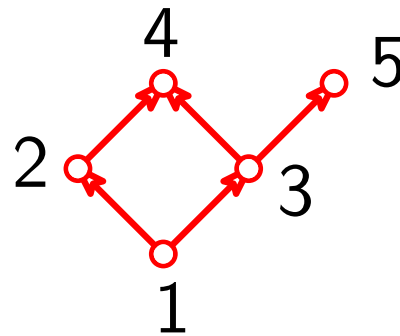
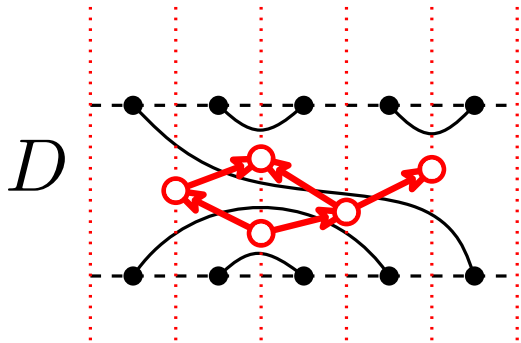
À chaque diagramme est associé un graphe orienté **acyclique**.

On peut alors choisir un parcours des sommets “compatible” : un sommet n’est visité qu’après tous ses antécédents.

Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie



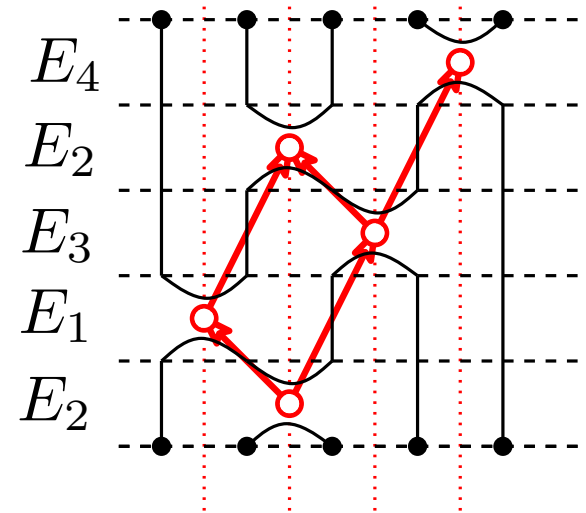
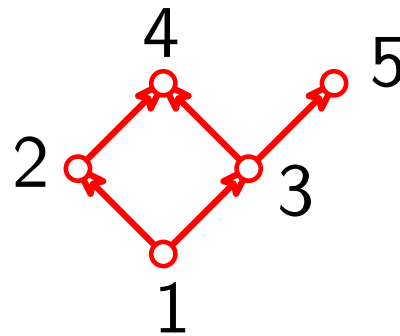
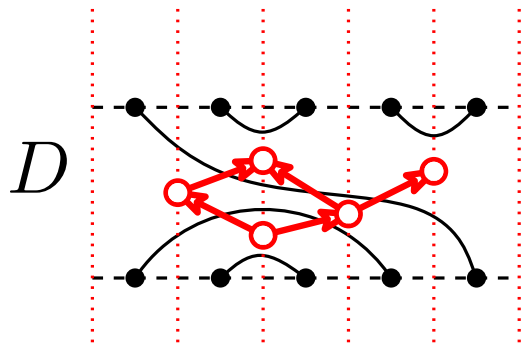
À chaque diagramme est associé un graphe orienté **acyclique**.

On peut alors choisir un parcours des sommets “compatible” : un sommet n’est visité qu’après tous ses antécédents.

Décomposition en diagrammes élémentaires

Prenons un diagramme sans boucles, avec liens monotones.

un point sur 2 dans
chaque colonne,
puis on relie



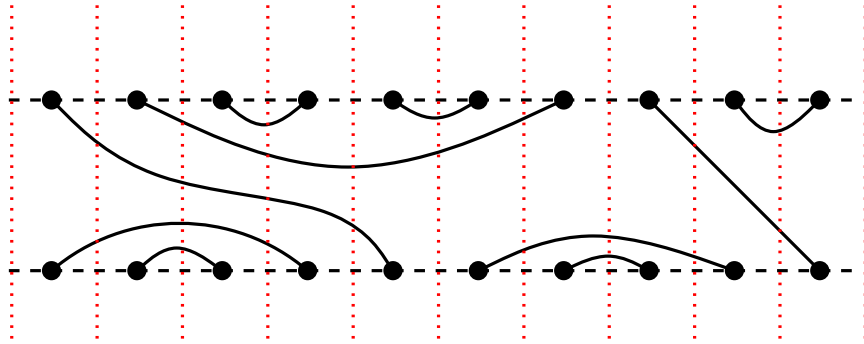
À chaque diagramme est associé un graphe orienté **acyclique**.

On peut alors choisir un parcours des sommets “compatible” : un sommet n’est visité qu’après tous ses antécédents.

Ainsi $D = E_2 E_1 E_3 E_2 E_4$. En changeant de parcours on obtient tous les mots les plus courts représentant D .

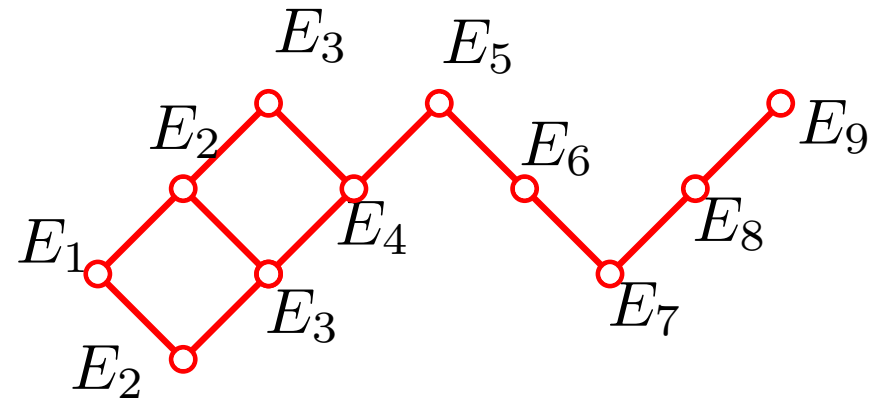
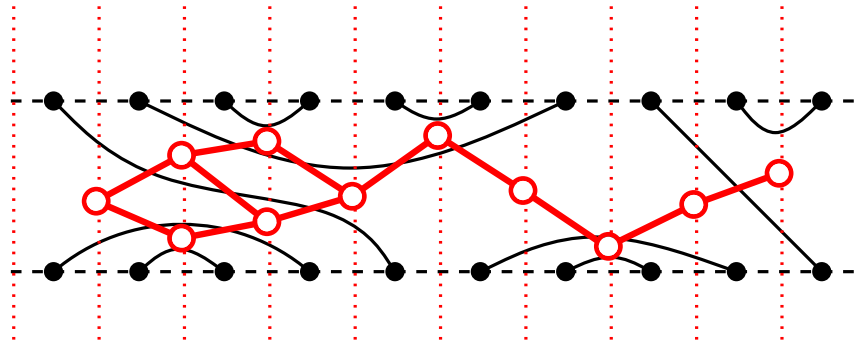
Empilements

Un exemple plus gros



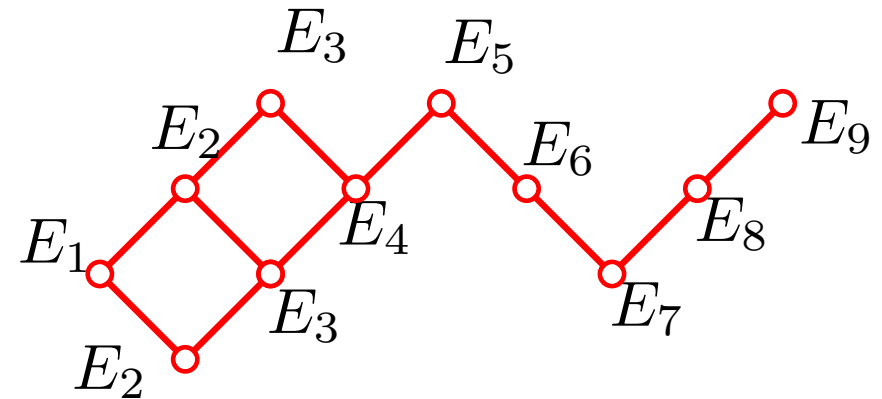
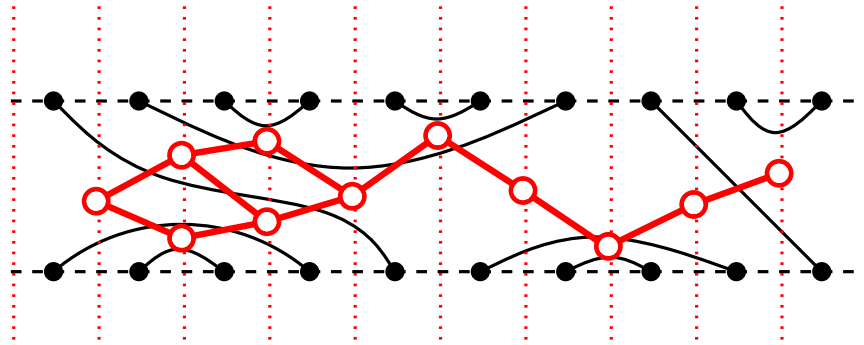
Empilements

Un exemple plus gros



Empilements

Un exemple plus gros

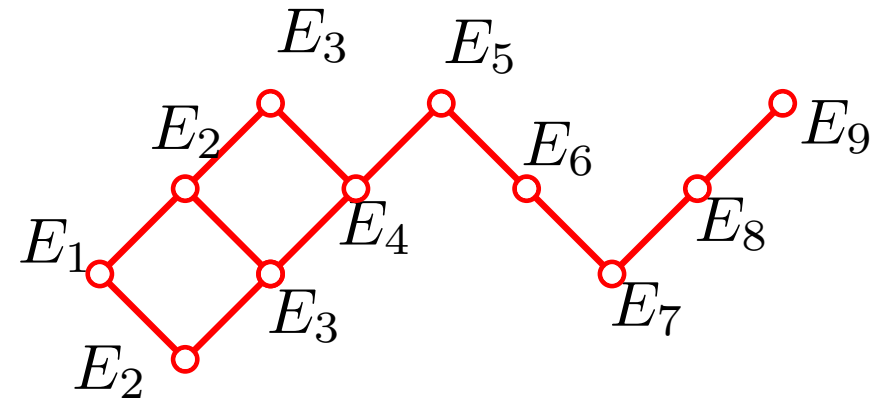
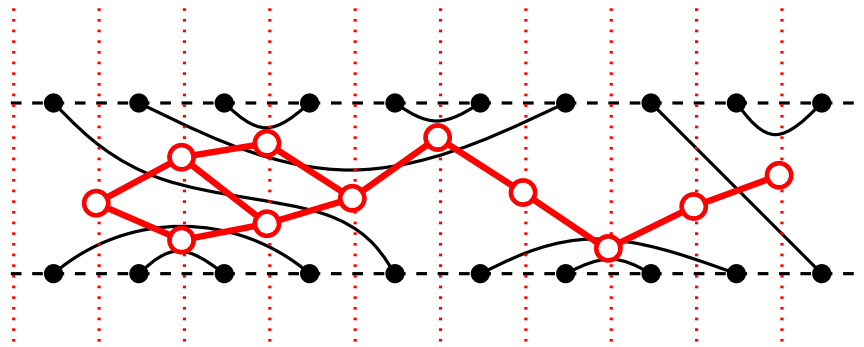


Les graphes obtenus sont appelés **empilements alternants**: pour tout i , entre deux sommets E_i , il y a toujours E_{i-1} et E_{i+1} .



Empilements

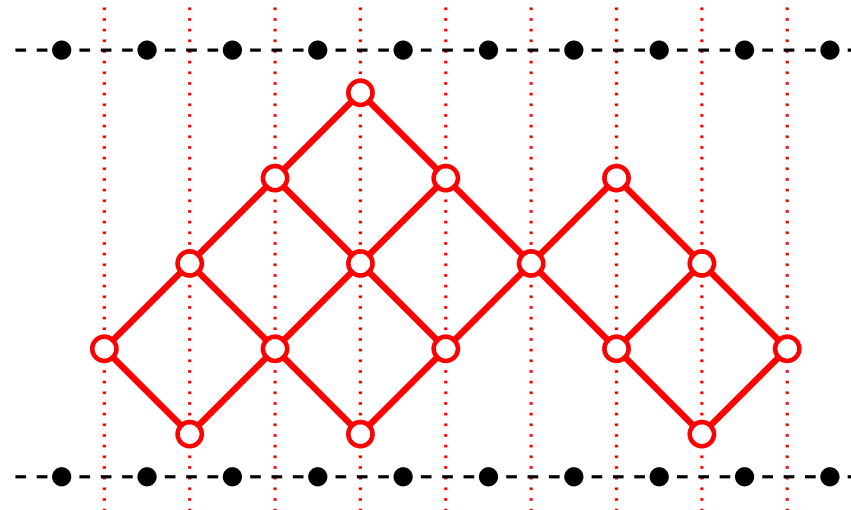
Un exemple plus gros



Les graphes obtenus sont appelés **empilements alternants**: pour tout i , entre deux sommets E_i , il y a toujours E_{i-1} et E_{i+1} .

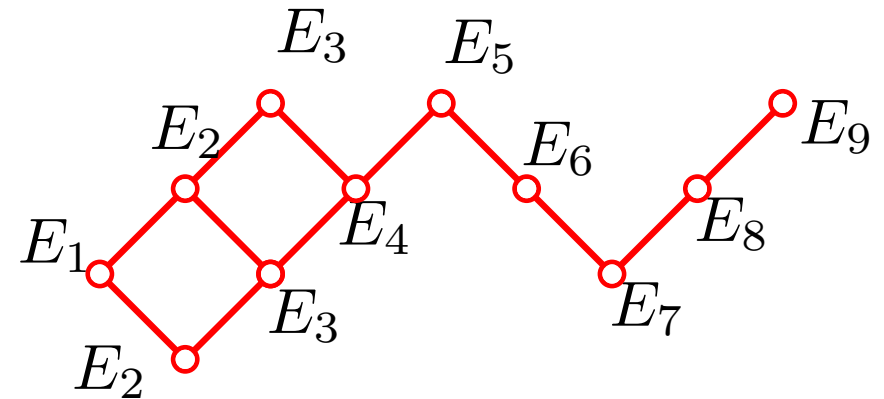
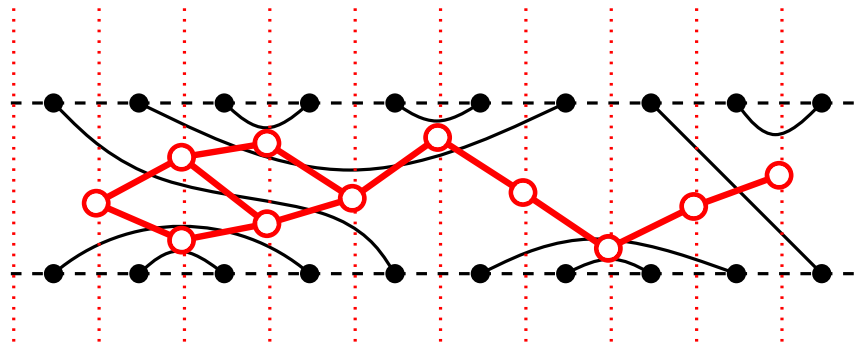


Réciproquement



Empilements

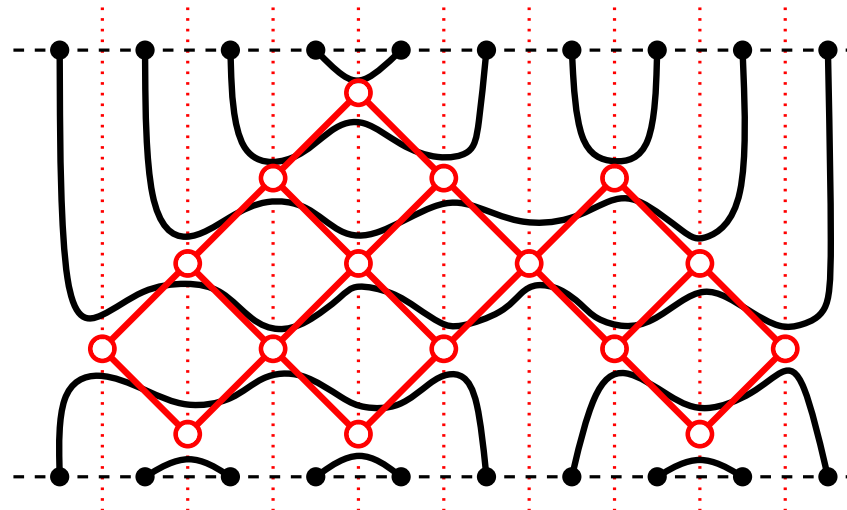
Un exemple plus gros



Les graphes obtenus sont appelés **empilements alternants**: pour tout i , entre deux sommets E_i , il y a toujours E_{i-1} et E_{i+1} .



Réciproquement



Diagrammes, empilements et permutations

Proposition La construction précédente est une bijection entre la base de diagrammes de TL_n et les empilements alternants.

Comme on a vu, à chaque empilement correspond l'ensemble de mots minimaux sur les E_i représentant le diagramme correspondant.

Diagrammes, empilements et permutations

Proposition La construction précédente est une bijection entre la base de diagrammes de TL_n et les empilements alternants.

Comme on a vu, à chaque empilement correspond l'ensemble de mots minimaux sur les E_i représentant le diagramme correspondant.

Permutations: Si on remplace E_i dans ces mots par la transposition $(i, i + 1) \in S_n$, quelles permutations obtient-on?

Diagrammes, empilements et permutations

Proposition La construction précédente est une bijection entre la base de diagrammes de TL_n et les empilements alternants.

Comme on a vu, à chaque empilement correspond l'ensemble de mots minimaux sur les E_i représentant le diagramme correspondant.

Permutations: Si on remplace E_i dans ces mots par la transposition $(i, i + 1) \in S_n$, quelles permutations obtient-on?

Théorème [Billey, Jockush, Stanley '93] Cela définit une bijection des empilements alternants vers les permutations sans motif 321.

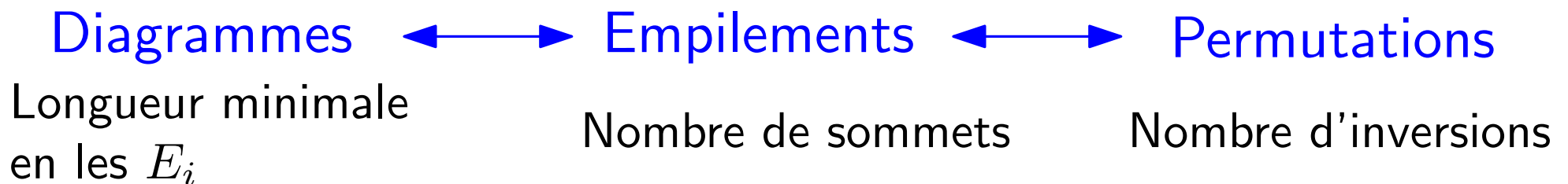
Diagrammes, empilements et permutations

Proposition La construction précédente est une bijection entre la base de diagrammes de TL_n et les empilements alternants.

Comme on a vu, à chaque empilement correspond l'ensemble de mots minimaux sur les E_i représentant le diagramme correspondant.

Permutations: Si on remplace E_i dans ces mots par la transposition $(i, i + 1) \in S_n$, quelles permutations obtient-on?

Théorème [Billey, Jockush, Stanley '93] Cela définit une bijection des empilements alternants vers les permutations sans motif 321.



L'algèbre de Temperley–Lieb affine

Définie indépendamment dans [Fan '97] et [Graham '95], elle est donnée par la présentation suivante

\widetilde{TL}_n

- Générateurs: $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$
- Relations:
 - $e_i^2 = e_i$
 - $e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i$ indices modulo n
 - $e_i e_j = e_j e_i$ sinon

L'algèbre de Temperley–Lieb affine

Définie indépendamment dans [Fan '97] et [Graham '95], elle est donnée par la présentation suivante

\widetilde{TL}_n

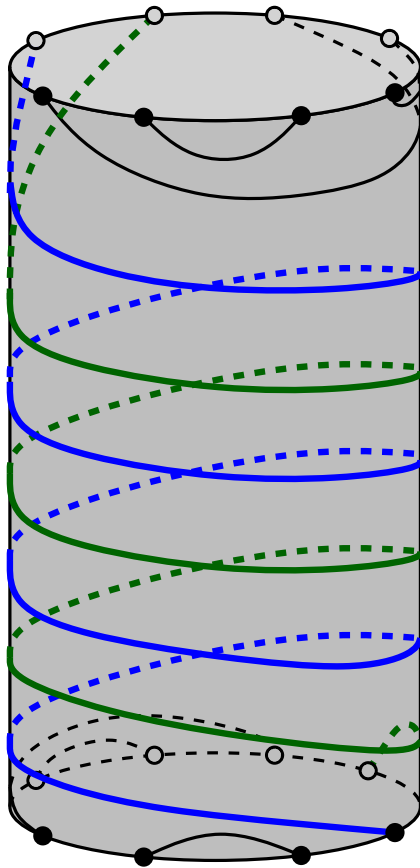
- Générateurs: $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$
- Relations:
 - $e_i^2 = e_i$
 - $e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i$ indices modulo n
 - $e_i e_j = e_j e_i$ sinon

Buts:

- Représentation par un calcul une algèbre de diagrammes.
- Interprétation comme empilements.
- Questions énumératives.

Les diagrammes affines

Idée: remplacer une structure “linéaire” par une “cyclique”
→ On va dessiner les diagrammes sur un **cylindre**.



- Liens non croisés sur la surface du cylindre (à isotopie près) joignant les $2n$ points fixés.
- On n'efface pas les boucles fermées autour du cylindre (“non contractiles”).

Diagrammes E_0, E_1, \dots, E_{n-1} satisfont les relations de \widetilde{TL}_n .

Les diagrammes affines

Idée: remplacer une structure “linéaire” par une “cyclique”
→ On va dessiner les diagrammes sur un cylindre.

2 choses à montrer:

- Caractérisation des diagrammes engendrés par les E_i (diagrammes admissibles);
- Montrer que l’algèbre obtenue n’est pas trop petite, i.e. ne satisfait pas d’autres relations.

Les diagrammes affines

Idée: remplacer une structure “linéaire” par une “cyclique”
→ On va dessiner les diagrammes sur un **cylindre**.

2 choses à montrer:

- Caractérisation des diagrammes engendrés par les E_i (**diagrammes admissibles**);
- Montrer que l’algèbre obtenue n’est pas trop petite, i.e. ne satisfait pas d’autres relations.

Theorem [Fan and Green '97] L’algèbre des diagrammes admissibles est isomorphe à \widetilde{TL}_n .

La preuve est un peu technique.

→ On simplifie en passant par les empilements.

Empilements affines

Par les travaux de [Fan '97] [Graham '95], on sait que \widetilde{TL}_n a comme base les mots minimaux sur les e_i à commutation près.

Empilements affines

Par les travaux de [Fan '97] [Graham '95], on sait que \widetilde{TL}_n a comme base les mots minimaux sur les e_i à commutation près.

Dans [Biagioli, Jouhet, N '13], on décrit précisément les empilements affines correspondant à de tels mots.

→ **Ces empilements forment une base de \widetilde{TL}_n .**

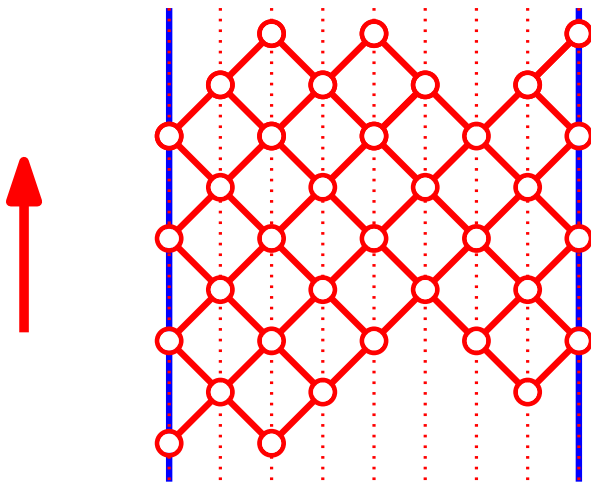
Empilements affines

Par les travaux de [Fan '97] [Graham '95], on sait que \widetilde{TL}_n a comme base les mots minimaux sur les e_i à commutation près.

Dans [Biagioli, Jouhet, N '13], on décrit précisément les empilements affines correspondant à de tels mots.

→ **Ces empilements forment une base de \widetilde{TL}_n .**

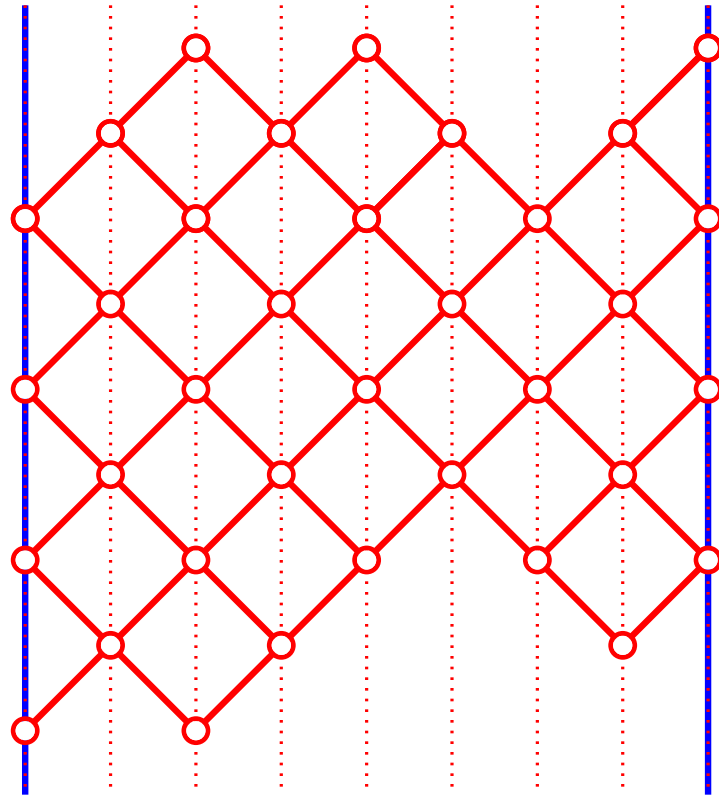
Pas de surprise: ce sont les graphes orientés acycliques tels que les arêtes entre e_i et e_{i+1} alternent.



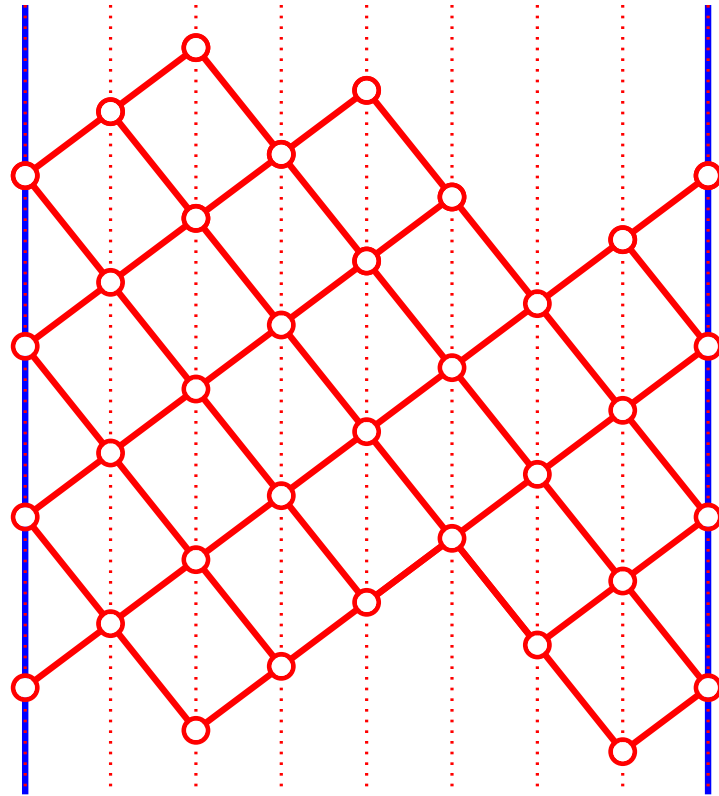
On est sur un cylindre

→ on identifie les deux lignes bleues.

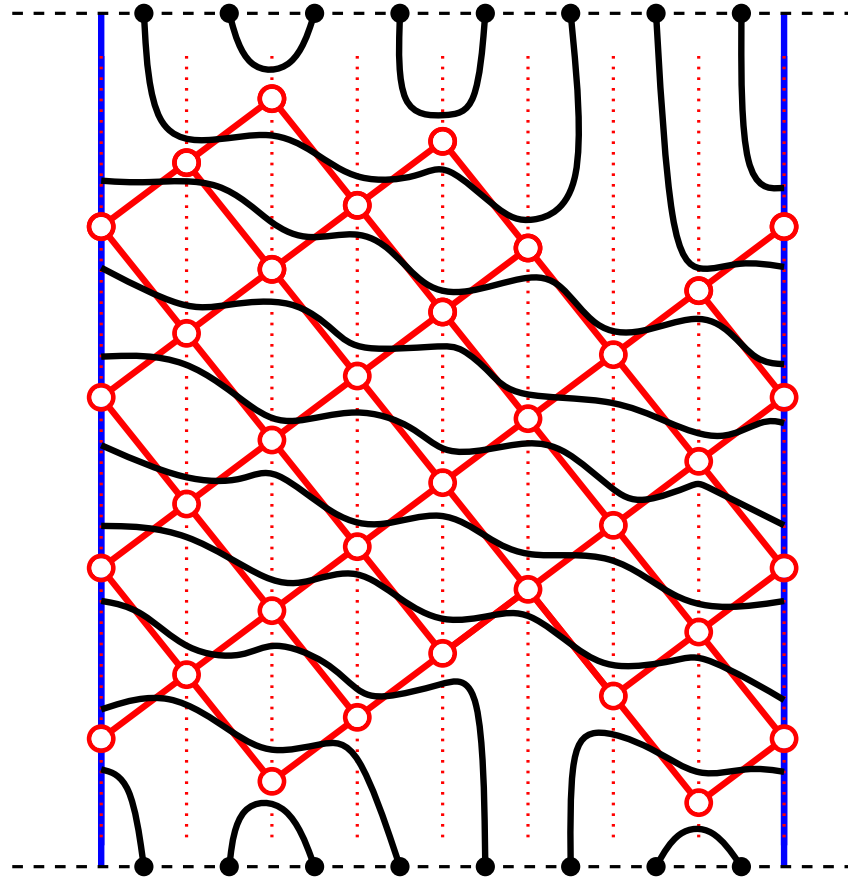
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



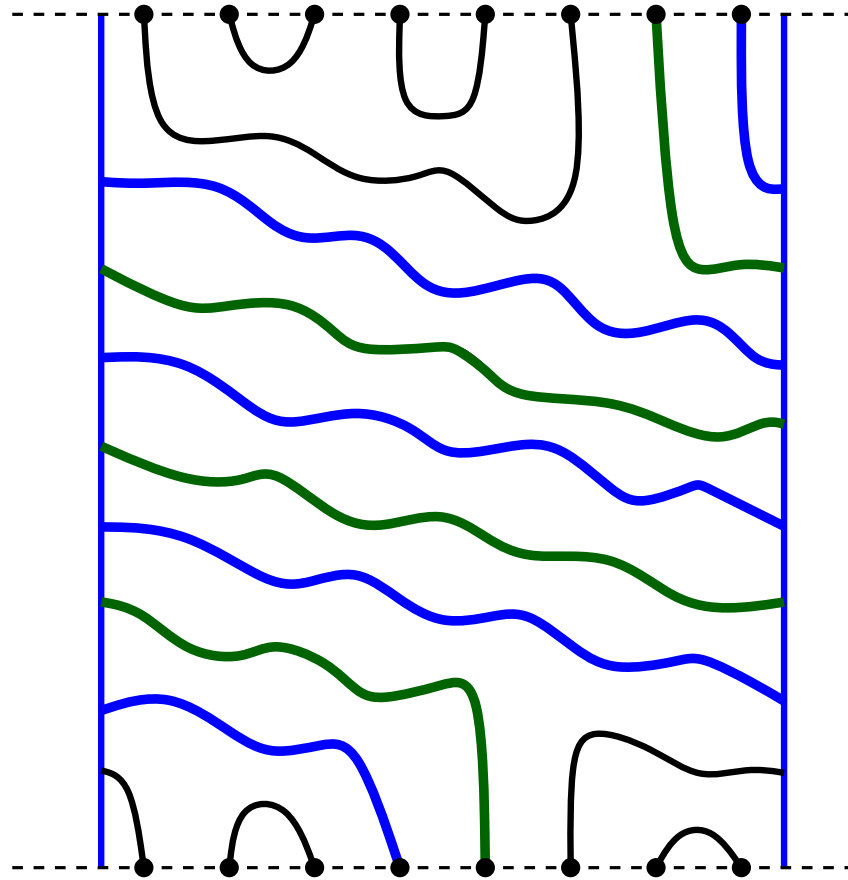
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



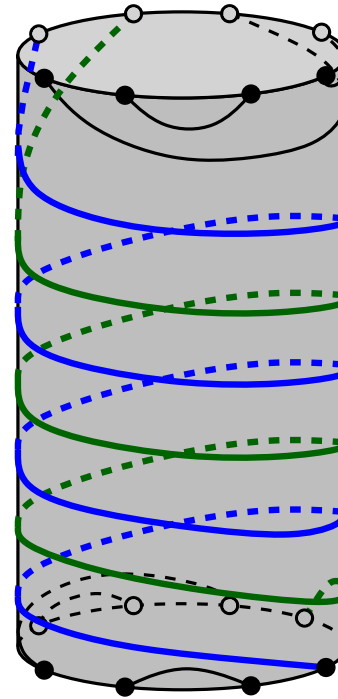
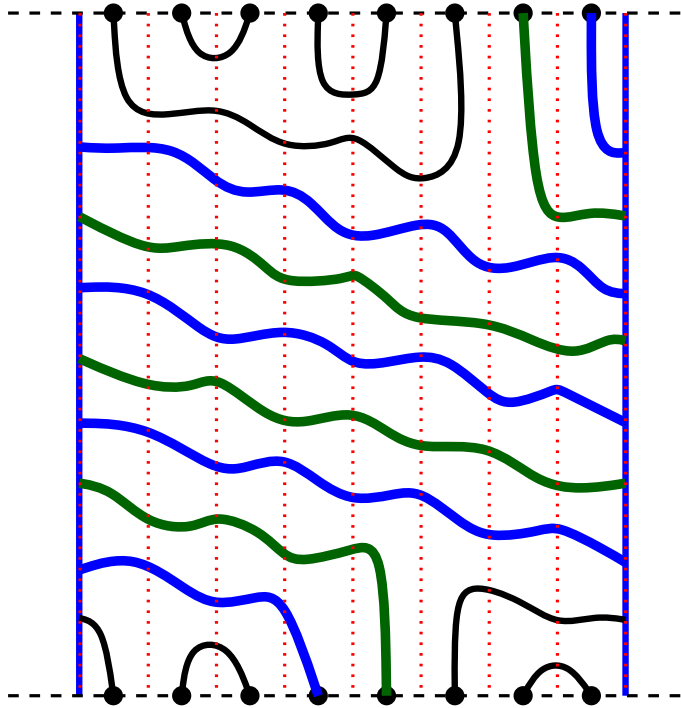
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



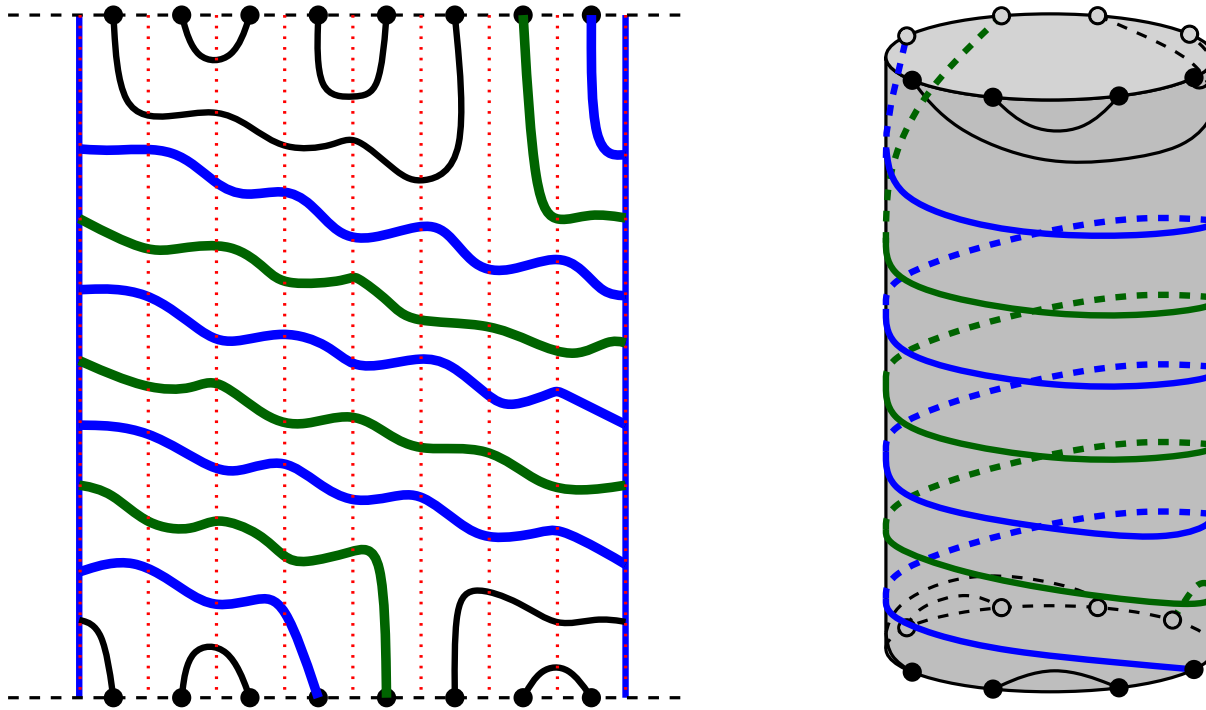
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



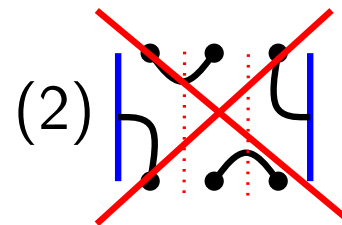
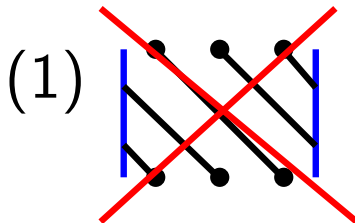
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



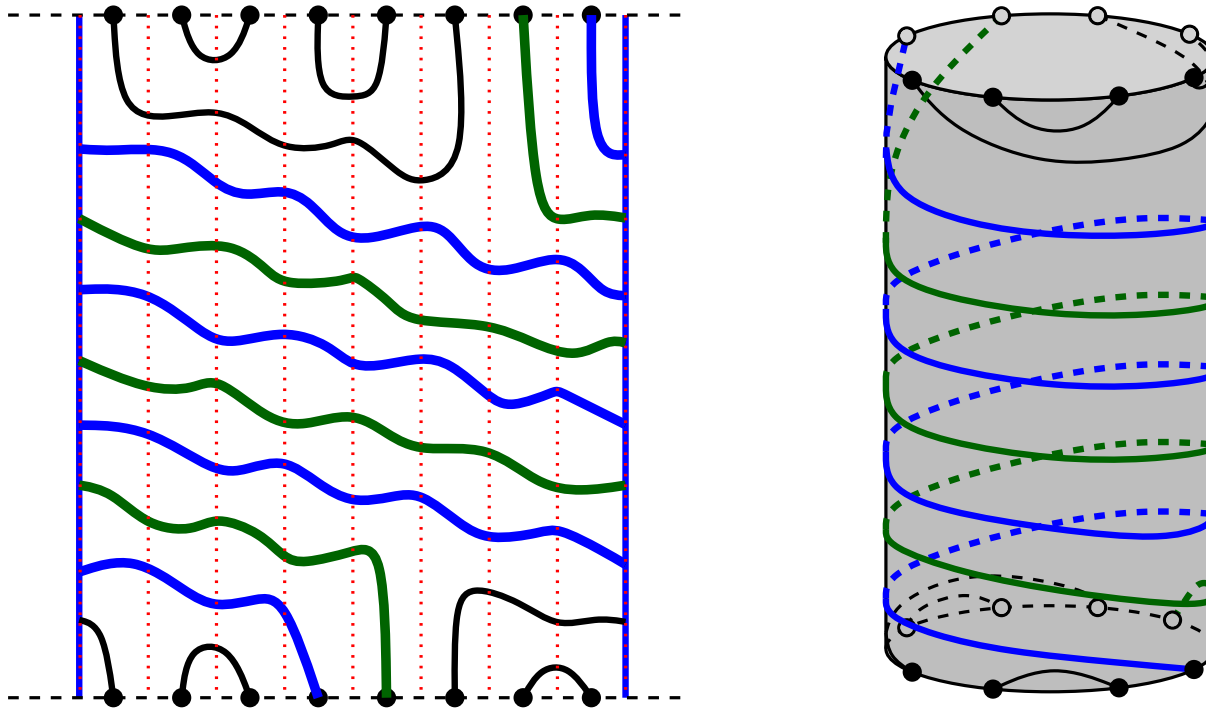
Conséquence: Un diagramme est admissible ssi

(1) D non trivial $\Rightarrow D$ contient un lien horizontal.

(2) Chaque colonne pointillée coupe un nombre *pair* de liens.



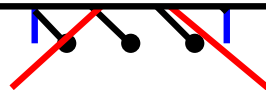
Empilements affines \longrightarrow Diagrammes



Conséquence: Un diagramme est admissible ssi

- (1) D non trivial $\Rightarrow D$ contient un lien horizontal.
- (2) Chaque colonne pointillée coupe un nombre *pair* de liens.

\Rightarrow Nouvelle preuve du résultat de Fan et Greene.



Énumération

Définition La **croissance** de l'algèbre \widetilde{TL}_n est la fonction $\ell \mapsto G^{(n)}(\ell)$ donnant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les produits d'au plus ℓ générateurs.

$G^{(n)}(\ell)$ est donc égal au nombre d'empilements avec au plus ℓ sommets:

$$G^{(n)}(\ell) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \dots + a_\ell^{(n)}.$$

Énumération

Définition La **croissance** de l'algèbre \widetilde{TL}_n est la fonction $\ell \mapsto G^{(n)}(\ell)$ donnant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les produits d'au plus ℓ générateurs.

$G^{(n)}(\ell)$ est donc égal au nombre d'empilements avec au plus ℓ sommets:

$$G^{(n)}(\ell) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \dots + a_\ell^{(n)}.$$

Facile de montrer que $(a_\ell^{(n)})_{\ell \geq 0}$ est une suite ultimement périodique de période n ([Hanusa-Jones '09]).

→ On déduit que \widetilde{TL}_n a une croissance linéaire.

Énumération

Définition La **croissance** de l'algèbre \widetilde{TL}_n est la fonction $\ell \mapsto G^{(n)}(\ell)$ donnant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les produits d'au plus ℓ générateurs.

$G^{(n)}(\ell)$ est donc égal au nombre d'empilements avec au plus ℓ sommets:

$$G^{(n)}(\ell) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \dots + a_\ell^{(n)}.$$

Facile de montrer que $(a_\ell^{(n)})_{\ell \geq 0}$ est une suite ultimement périodique de période n ([Hanusa-Jones '09]).

→ On déduit que \widetilde{TL}_n a une croissance linéaire.

• Dans [Biagioli, Jouhet, N '13], construction d'une bijection des empilements vers une classe de chemins.

→ Décompositions récursives permettant de calculer $a_\ell^{(n)}$.

Problème Calculer la plus petite période pour cette suite ?

Périodicité

Définissons $\tilde{A}^{(n)}(q) = \sum_{\ell \geq 0} a_{\ell}^{(n)} q^{\ell}$

$$\tilde{A}^{(3)}(q) = 1 + 3q + 6q^2 + 6q^3 + 6q^4 + \dots$$

$$\tilde{A}^{(4)}(q) = 1 + 4q + 10q^2 + 16q^3 + 18q^4 + 16q^5 + 18q^6 + \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(5)}(q) &= 1 + 5q + 15q^2 + 30q^3 + 45q^4 \\ &\quad + 50q^5 + 50q^6 + 50q^7 + 50q^8 + 50q^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(6)}(q) &= 1 + 6q + 21q^2 + 50q^3 + 90q^4 + 126q^5 + 146q^6 \\ &\quad + 150q^7 + 156q^8 + 152q^9 + 156q^{10} + 150q^{11} + 158q^{12} \\ &\quad + 150q^{13} + 156q^{14} + 152q^{15} + 156q^{16} + 150q^{17} + 158q^{18} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Périodicité

Définissons $\tilde{A}^{(n)}(q) = \sum_{\ell \geq 0} a_{\ell}^{(n)} q^{\ell}$

$$\tilde{A}^{(3)}(q) = 1 + 3q + 6q^2 + 6q^3 + 6q^4 + \dots$$

$$\tilde{A}^{(4)}(q) = 1 + 4q + 10q^2 + 16q^3 + 18q^4 + 16q^5 + 18q^6 + \dots$$

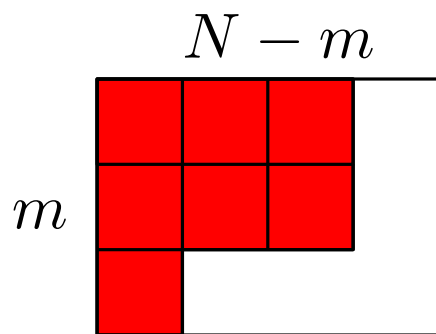
$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(5)}(q) &= 1 + 5q + 15q^2 + 30q^3 + 45q^4 \\ &\quad + 50q^5 + 50q^6 + 50q^7 + 50q^8 + 50q^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(6)}(q) &= 1 + 6q + 21q^2 + 50q^3 + 90q^4 + 126q^5 + 146q^6 \\ &\quad + 150q^7 + 156q^8 + 152q^9 + 156q^{10} + 150q^{11} + 158q^{12} \\ &\quad + 150q^{13} + 156q^{14} + 152q^{15} + 156q^{16} + 150q^{17} + 158q^{18} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Theorem [Jouhet, N.] La période minimale de $(a_{\ell}^{(n)})_{\ell \geq 0}$ est p^{k-1} si $n = p^k$, et n sinon.

Idée: nouvelle décomposition des empilements

Proposition [JN'13] $\tilde{A}^{(n)}(q) = \frac{\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - 2}{1 - q^n} + \text{polynôme}$

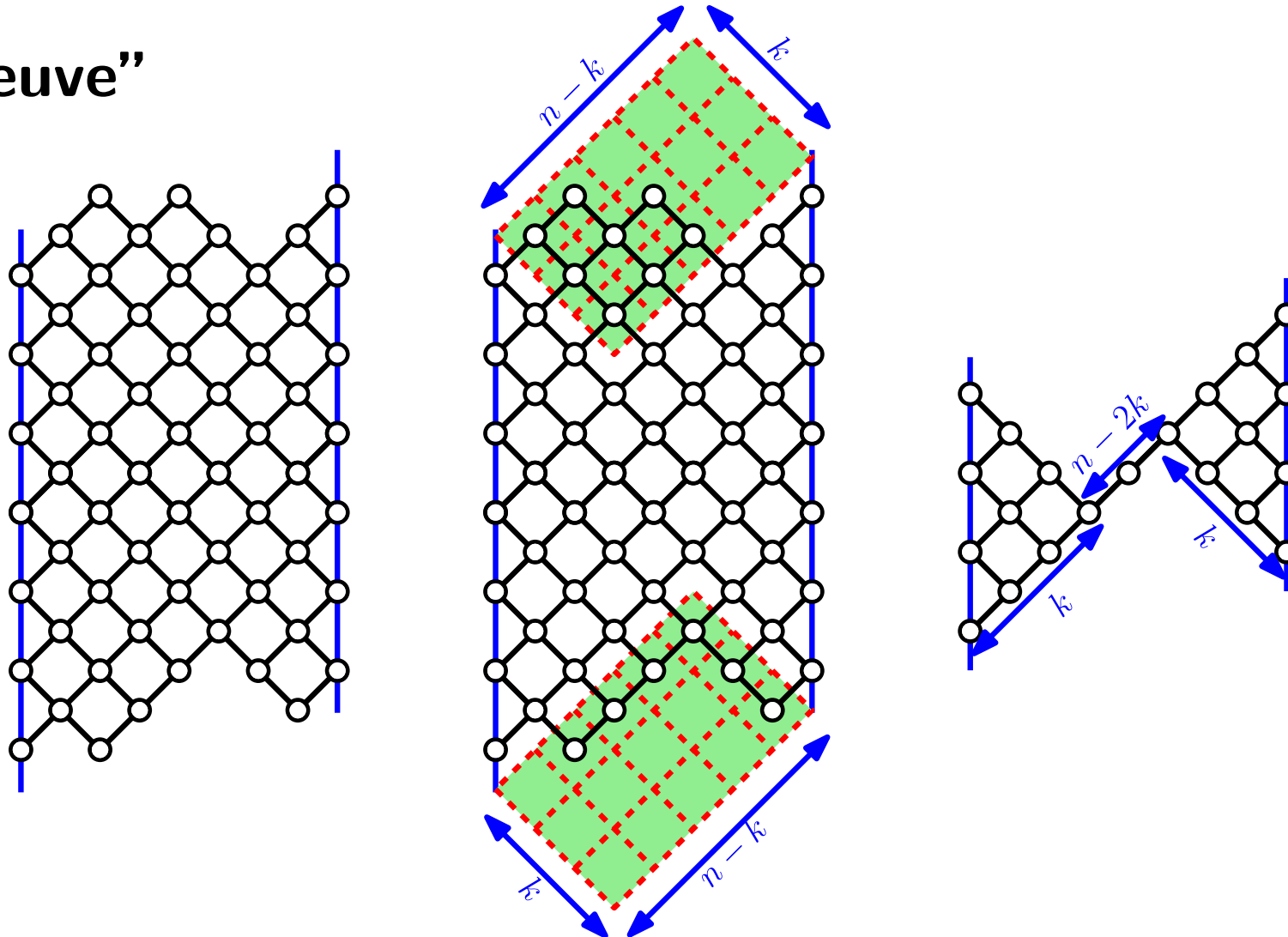


$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}_q \in \mathbb{N}[q]$ énumère les partitions dans une boîte $(N - m) \times m$ selon leur nombre de cases.

Idée: nouvelle décomposition des empilements

Proposition [JN'13] $\tilde{A}^{(n)}(q) = \frac{\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - 2}{1 - q^n} + \text{polynôme}$

“Preuve”



Pour terminer

Pour trouver la période minimale, il suffit ensuite de faire une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente.

- Cela revient à calculer la série de Fourier de la suite ultimement périodique $(a_\ell^{(n)})_{\ell \geq 0}$.

- Nécessite l'évaluation $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_{q=\exp \frac{2im\pi}{n}} = \binom{2 \operatorname{pgcd}(n,m)}{\operatorname{pgcd}(n,m)}$.

Pour terminer

Pour trouver la période minimale, il suffit ensuite de faire une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente.

- Cela revient à calculer la série de Fourier de la suite ultimement périodique $(a_\ell^{(n)})_{\ell \geq 0}$.

- Nécessite l'évaluation $\left[\begin{matrix} 2n \\ n \end{matrix} \right]_{q=\exp \frac{2im\pi}{n}} = \binom{2 \operatorname{pgcd}(n,m)}{\operatorname{pgcd}(n,m)}$.

Les algèbres de Temperley-Lieb peuvent être définies pour tout système de Coxeter.

Pour tout groupe de Coxeter affine, nous pouvons généraliser les résultats énumératifs présentés + Travail en cours sur les représentations diagrammatiques de ces algèbres.

Permutations

The **affine symmetric group** is the set of permutations σ of \mathbb{Z} satisfying $\sigma(i + n) = \sigma(i) + n$, and $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i$.

..., 17, -12, | -14, -1, 17, -8, | **-10, 3, 21, -4**, | 6, 7, 25, 0, | 2, 11, 29, 4, ...
 $\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \sigma(4)$

It is generated by the transpositions τ_i for $i = 0, \dots, n - 1$ which exchange $i + k$ and $i + 1 + k$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

Permutations

The **affine symmetric group** is the set of permutations σ of \mathbb{Z} satisfying $\sigma(i + n) = \sigma(i) + n$, and $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i$.

..., 17, -12, | -14, -1, 17, -8, | **-10, 3, 21, -4**, | 6, 7, 25, 0, | 2, 11, 29, 4, ...
 $\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \sigma(4)$

It is generated by the transpositions τ_i for $i = 0, \dots, n - 1$ which exchange $i + k$ and $i + 1 + k$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

Now take a word in the e'_i representing an affine heap, and replace them by the τ'_i s: which permutations do we obtain ?

Permutations

The **affine symmetric group** is the set of permutations σ of \mathbb{Z} satisfying $\sigma(i + n) = \sigma(i) + n$, and $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i$.

..., 17, -12, | -14, -1, 17, -8, | -10, 3, 21, -4, | -6, 7, 25, 0, | -2, 11, 29, 4, ...
 $\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \sigma(4)$

It is generated by the transpositions τ_i for $i = 0, \dots, n - 1$ which exchange $i + k$ and $i + 1 + k$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

Now take a word in the e'_i representing an affine heap, and replace them by the τ'_i s: which permutations do we obtain ?

Theorem [Green '01] Affine heaps are in bijection with 321-avoiding permutations.

The number of vertices of a heap correspond to the “affine inversions” of the corresponding permutations.