

Lois limites d'algorithmes de rejet anticipé

Axel Bacher Andrea Sportiello

19 mars 2014

Sommaire

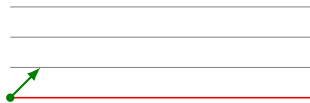
- 1 Introduction
 - Algorithmes de rejet anticipé
- 2 Loi limite
 - Loi de Darling-Mandelbrot
 - Densité
- 3 Applications
 - Animaux dirigés
 - Arbres unaires-binaires
 - Autres marches aléatoires

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



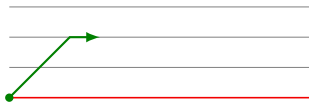
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



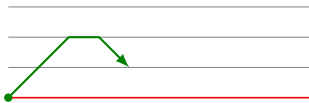
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



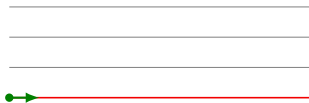
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



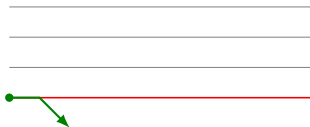
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



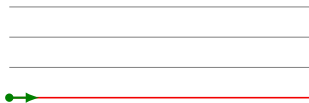
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



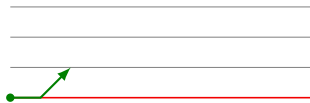
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



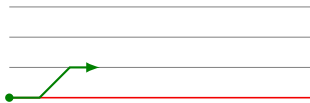
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



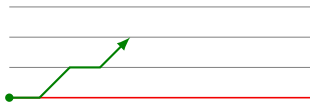
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



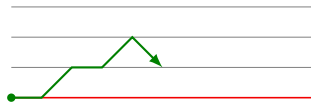
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



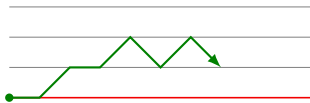
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



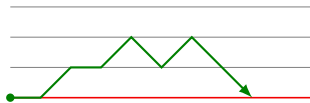
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



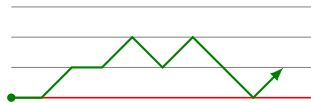
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



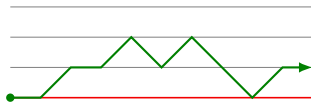
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



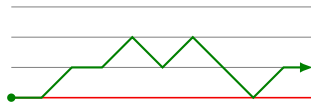
- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

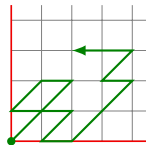
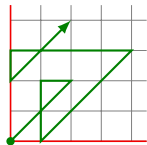


- L'algorithme engendre des **préfixes de Motzkin** par **rejet anticipé**. [Barucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]
- En moyenne, $\sim \sqrt{\pi N/3}$ essais ratés de coût $\sim \sqrt{3N/\pi}$.
- Espérance et variance de la complexité:

$$\mathbb{E} \sim 2N, \quad \mathbb{V} \sim \frac{4}{3}N^2.$$

- Existence d'une **loi limite**. [Louchard 1999]

Chemins de Kreweras et de Gessel



- Nombre d'essais $\sim cN^{3/4}$.
- Coût d'un essai $\sim 3c^{-1}N^{1/4}$.
- Complexité $\sim 4N$.

- Nombre d'essais $\sim cN^{2/3}$.
- Coût d'un essai $\sim 2c^{-1}N^{1/3}$.
- Complexité $\sim 3N$.

[Bousquet-Mélou 2005, Bostan, Kauers 2010...]

Loi limite de l'algorithme de rejet anticipé

Théorème

Supposons que la **probabilité de survie** après N pas vérifie:

$$s(N) \sim cN^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Le coût des essais ratés est **linéaire** et admet une **loi limite** de transformée de Laplace:

$$\phi(z) = \frac{z^{-\alpha}}{-\alpha\gamma(-\alpha, z)}, \quad \gamma(s, z) = \int_0^z x^{s-1} e^{-x} dx.$$

- Cette loi est la loi de **Darling-Mandelbrot**. [Darling 1952, Lew 1994]
- Si $\alpha \geq 1$, l'algorithme est **surlinéaire** de loi limite **exponentielle**.

Idée de la preuve

- Le nombre d'essais ratés étant **géométriquement distribué**, on a :

$$\phi_N(z) = \frac{s(N)}{1 - \psi_N(z)},$$

où $\psi_N(z)$ est la transformée d'un **essai raté**.

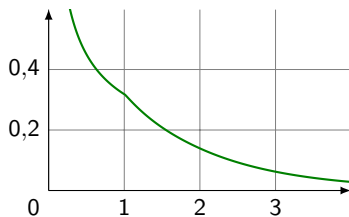
- La transformée (= **série exponentielle alternée des moments**) $\psi_N(z)$ vaut :

$$\psi_N(z) \sim 1 - s(N) + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{n - \alpha} c N^{n-\alpha} \frac{(-z)^n}{n!}.$$

- On en **déduit** :

$$\phi_N(z/N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{n - \alpha} \frac{(-z)^n}{n!} \right)^{-1}.$$

Forme de la densité



- La densité **prend la forme**:

$$g(x) = \sum_{k \geq 0} g_k(x),$$

où $g_k(x)$ est **définie et analytique pour $x > k$** .

- **Tous les entiers** sont des singularités de $g(x)$.

Expressions de la densité

Théorème

- ① Les fonctions g_k sont définies par un **produit de convolution**:

$$g_k(x) = a * \underbrace{b * \cdots * b}_k(x),$$

k facteurs

avec:

$$a(x) = C_0 x^{\alpha-1}, \quad b(x) = -C_0 \frac{(x-1)^\alpha}{x} \mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

- ② Leur développement en **série entière en $x = k$** vaut:

$$g_k(x) = C_k (x-k)^{\beta_k} \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} \frac{(1+\alpha)_{n_1} \cdots (1+\alpha)_{n_k}}{(1+\beta_k)_{n_1+\dots+n_k}} (k-x)^{n_1+\dots+n_k},$$

où:

$$\beta_k = \alpha - 1 + k(1 + \alpha).$$

Idée de la preuve

- On calcule la **transformée de Laplace** de $g(x)$ en utilisant le fait que $\gamma(-\alpha, z) = \Gamma(-\alpha) - \Gamma(-\alpha, z)$:

$$\phi(z) = \frac{z^{-\alpha}}{-\alpha\gamma(-\alpha, z)} = \frac{A(z)}{1 - B(z)},$$

avec:

$$A(z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad B(z) = \frac{\Gamma(-\alpha, z)}{\Gamma(-\alpha)}.$$

- On effectue une **transformée inverse**.

Équations différentielles

Théorème

- ① La densité $g(x)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire:

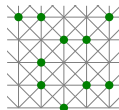
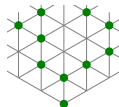
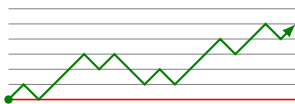
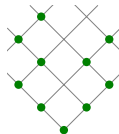
$$(1 - \alpha)g(x) + xg'(x) = -\alpha g * g(x - 1).$$

- ② Soit D_k et E_k les opérateurs différentiels linéaires:

$$D_k = (x - k) \frac{d}{dx} + 1 - (k + 1)\alpha, \quad E_k = D_k \cdots D_0.$$

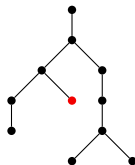
L'opérateur E_k annule les fonctions g_0, \dots, g_k .

Animaux dirigés



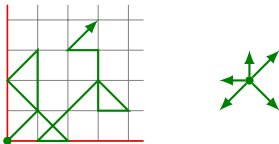
- Bijections entre **préfixes** de Motzkin/Dyck/Schröder et **animaux dirigés** sur réseau carré/triangulaire/du roi. [Gouyou-Beauchamps 1988, Bétréma, Penaud 1991, B. 2014]
- Dans les trois cas, le théorème s'applique avec $\alpha = 1/2$.

Arbres unaires-binaires



- L'algorithme engendre des arbres unaires-binaires **pointés**.
- À chaque étape, il effectue une **greffe** et un **repointage**.
- Le repointage peut **échouer**, d'où un **rejet anticipé**.
- La **probabilité de survie** satisfait $s(N) \sim cN^{-1/2}$.
[B., Bodini, Jacquot 2014]

Autres marches aléatoires



Autres modèles avec $s(N) \sim cN^{-\alpha}$:

- marches dans le **quart de plan**;
- marches dans un **secteur angulaire**;
- *vicious walkers*;
- ...