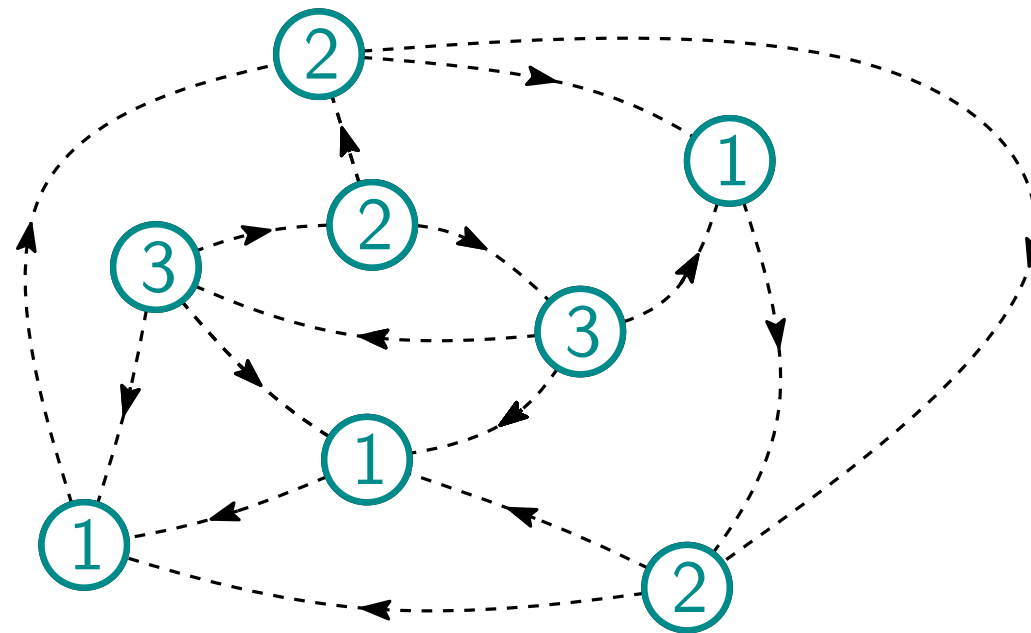


INTRODUCTION AUX ORIENTATIONS DE CARTES ET QUELQUES APPLICATIONS BIJECTIVES

Journées ALEA 2014
Mini-cours – Première séance



Marie Albenque (CNRS, LIX, École Polytechnique)

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Ce soir : séances d'exercices

Autour des triangulations simples.

Plan

Maintenant : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Prérequis : cartes, formule d'Euler, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Ce soir : séances d'exercices

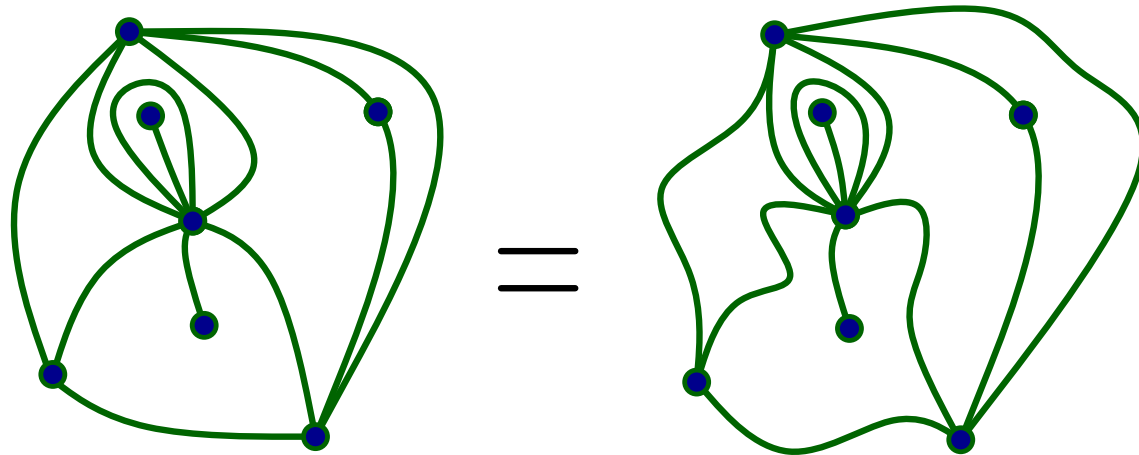
Autour des triangulations simples.

Demain : Application des orientations, dessins, couplages, bijections

- 1 - Schnyder woods et dessins.
- 2 - Génération d'arbres couvrants.
- 3 - Bijection avec arbres bourgeonnants

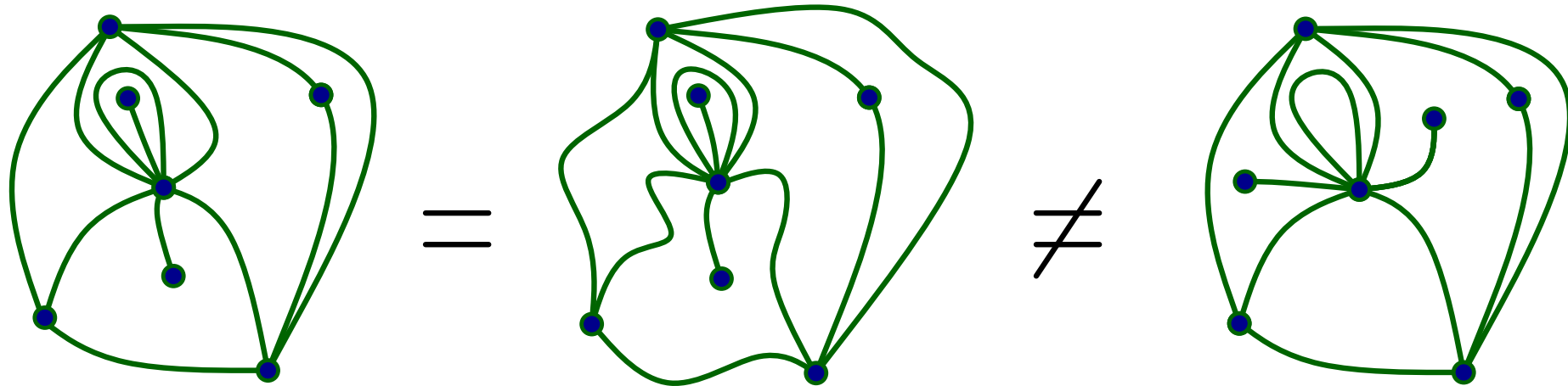
Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



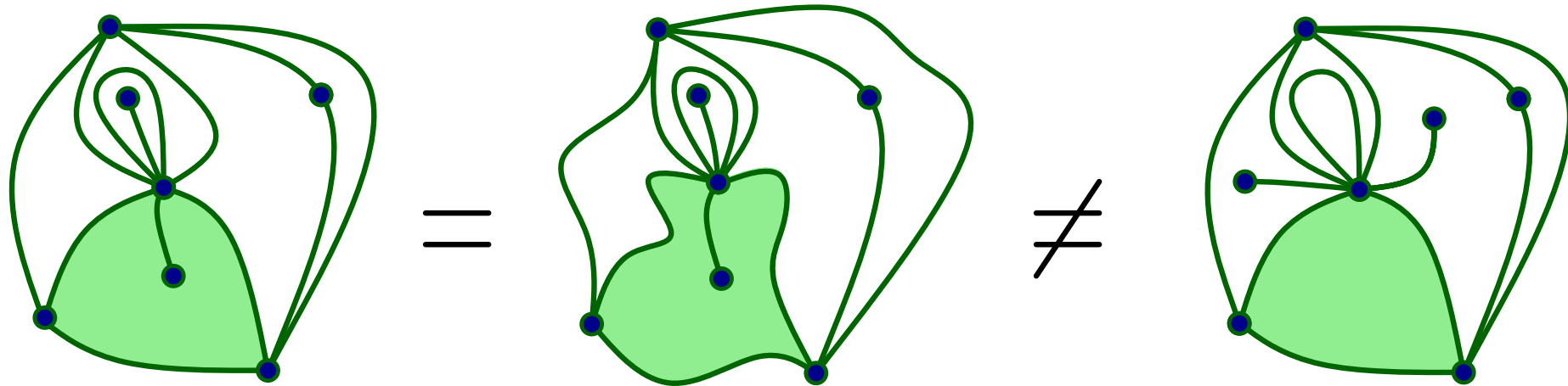
Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

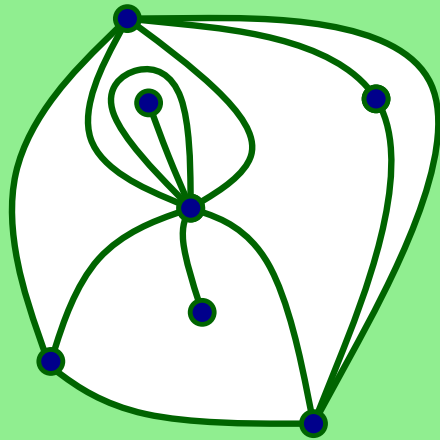
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

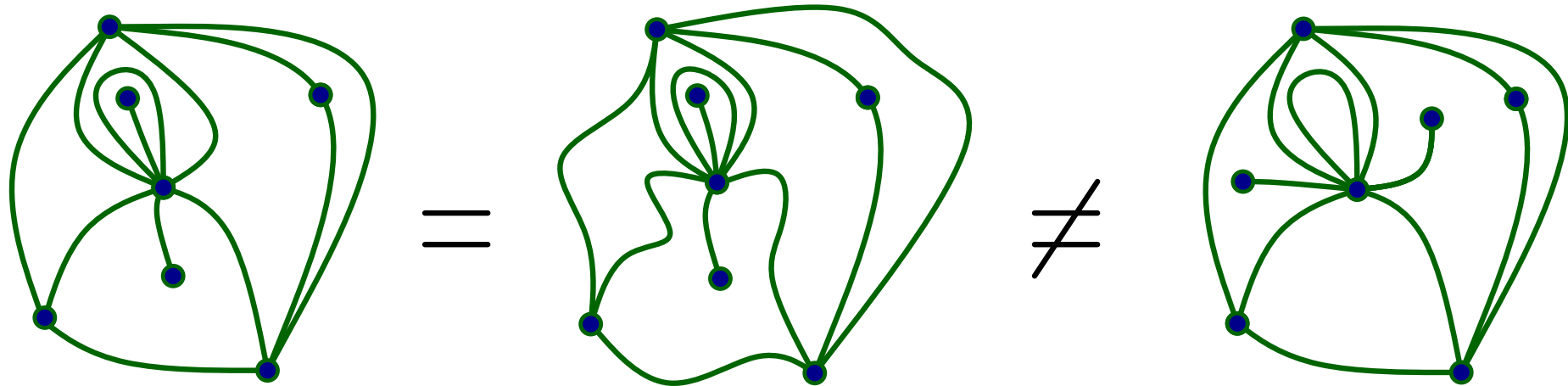
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



face = composante connexe du plan quand on efface les arêtes

Cartes planes - Définition

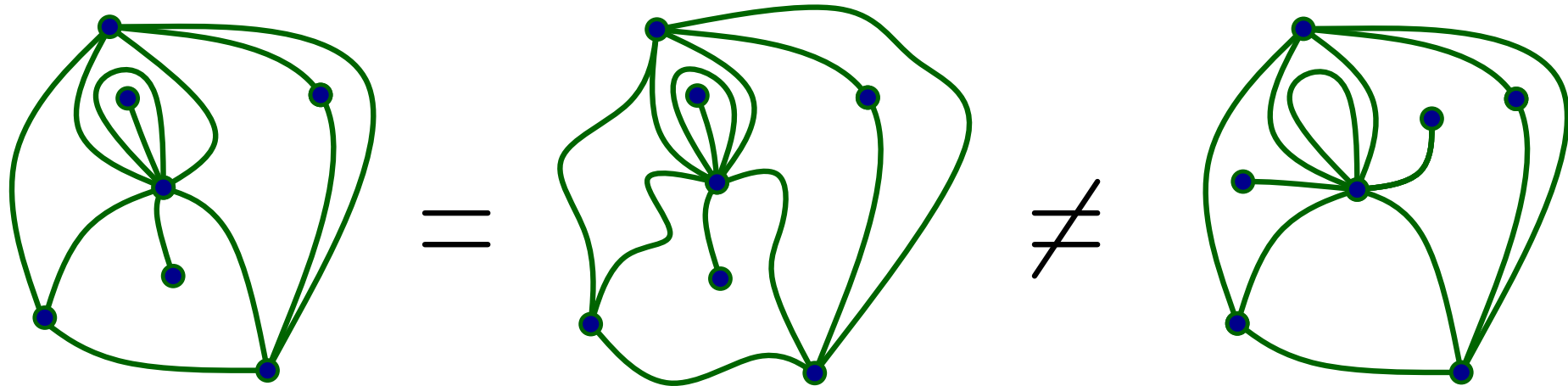
Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



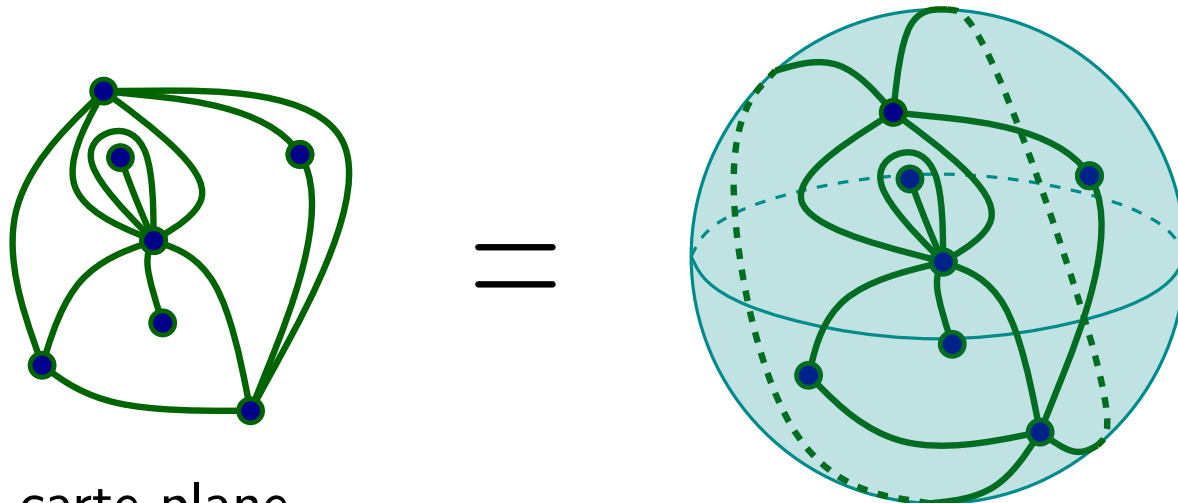
carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



carte plane \approx graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets



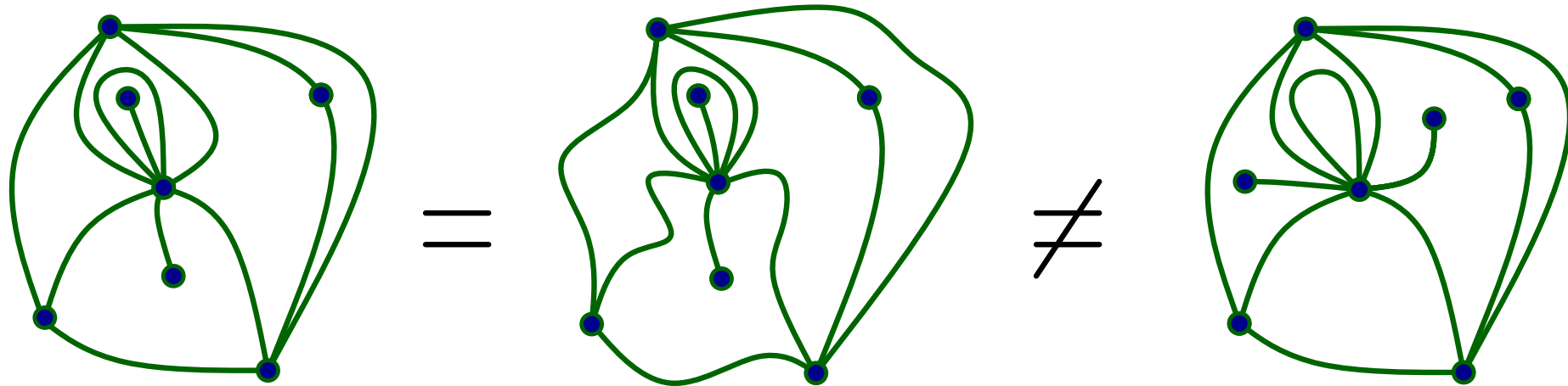
carte plane

carte planaire

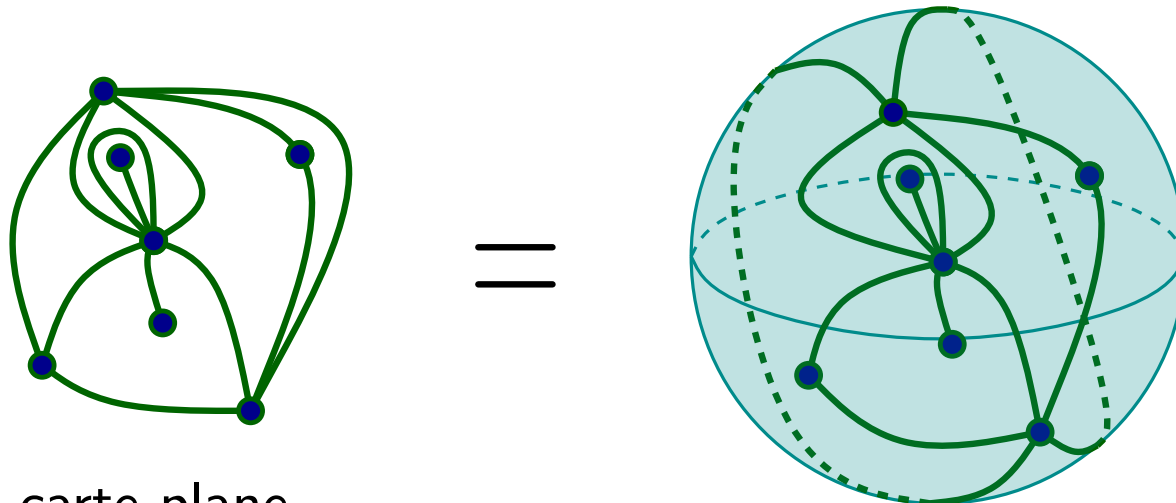
+ choix d'une face extérieure

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



**carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets
+ choix d'une face extérieure**



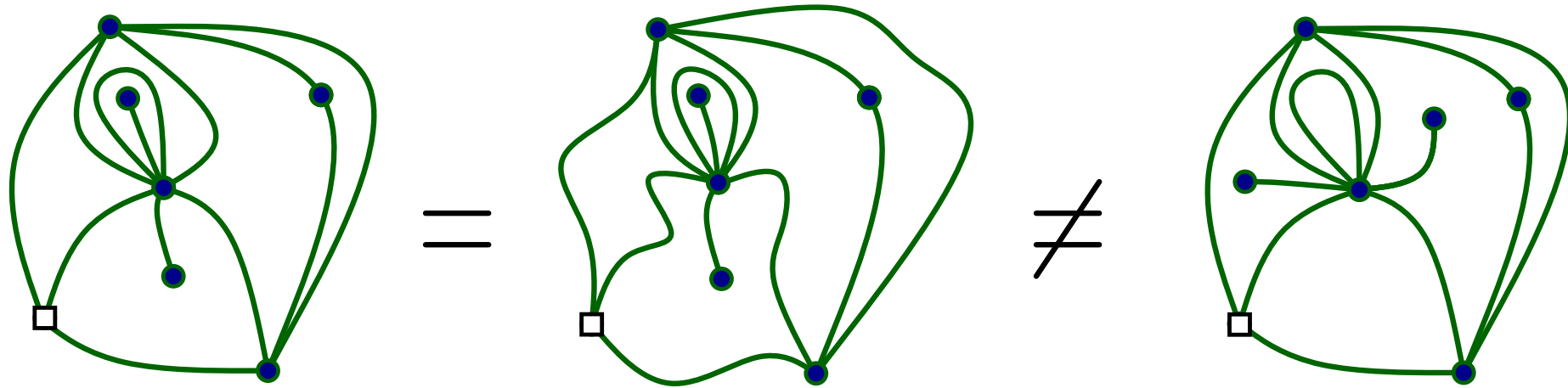
carte plane

carte planaire

+ choix d'une face extérieure

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).

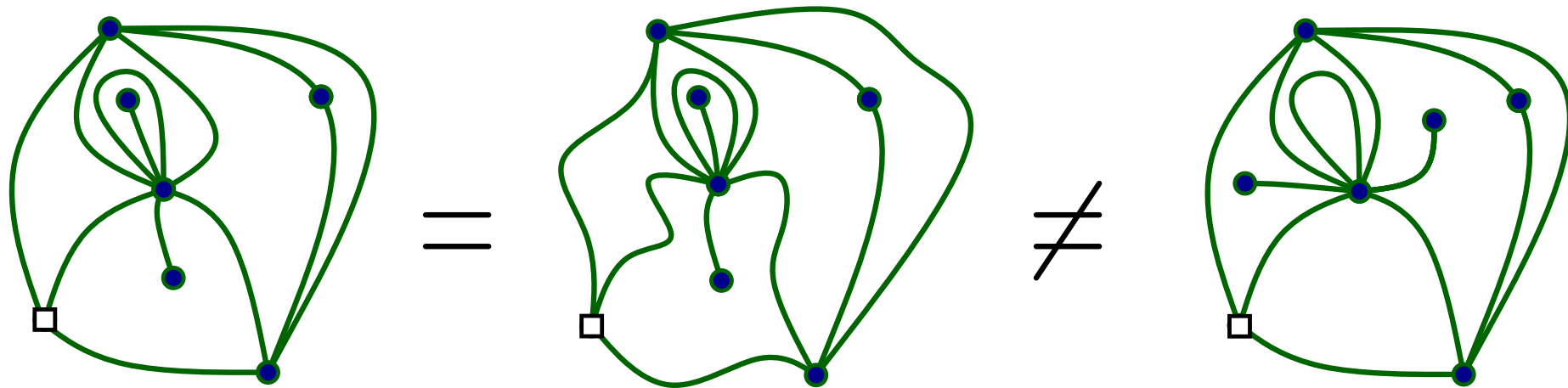


**carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets
+ choix d'une face extérieure**

carte plane **enracinée** = sommet marqué \square (incident à la face extérieure)

Cartes planes - Définition

Une **carte plane** (ou **graphe plan**) est le plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan (vu à déformations continues près).



**carte plane = graphe planaire + ordre cyclique autour des sommets
+ choix d'une face extérieure**

carte plane **enracinée** = sommet marqué \square (incident à la face extérieure)

Notation : $V(M) = \{\text{sommets de } M\}$

$E(M) = \{\text{arêtes de } M\}$

$F(M) = \{\text{faces de } M\}$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

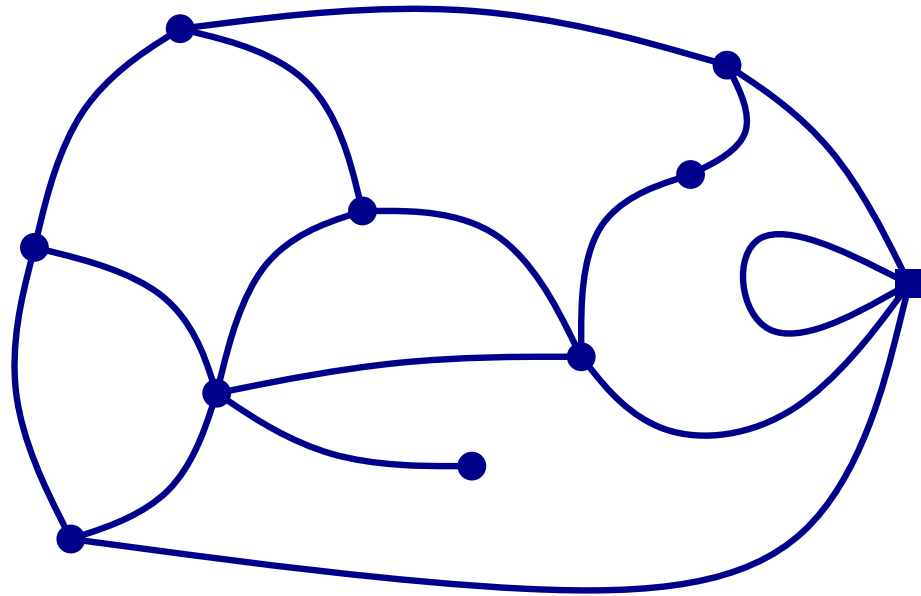
Preuve :

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



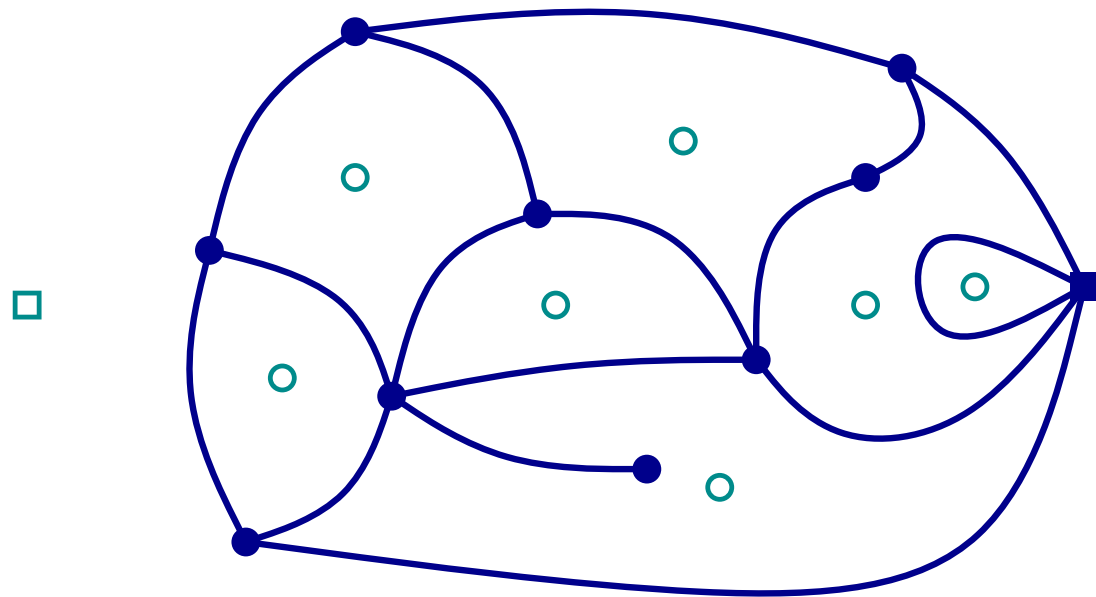
M carte plane enracinée

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

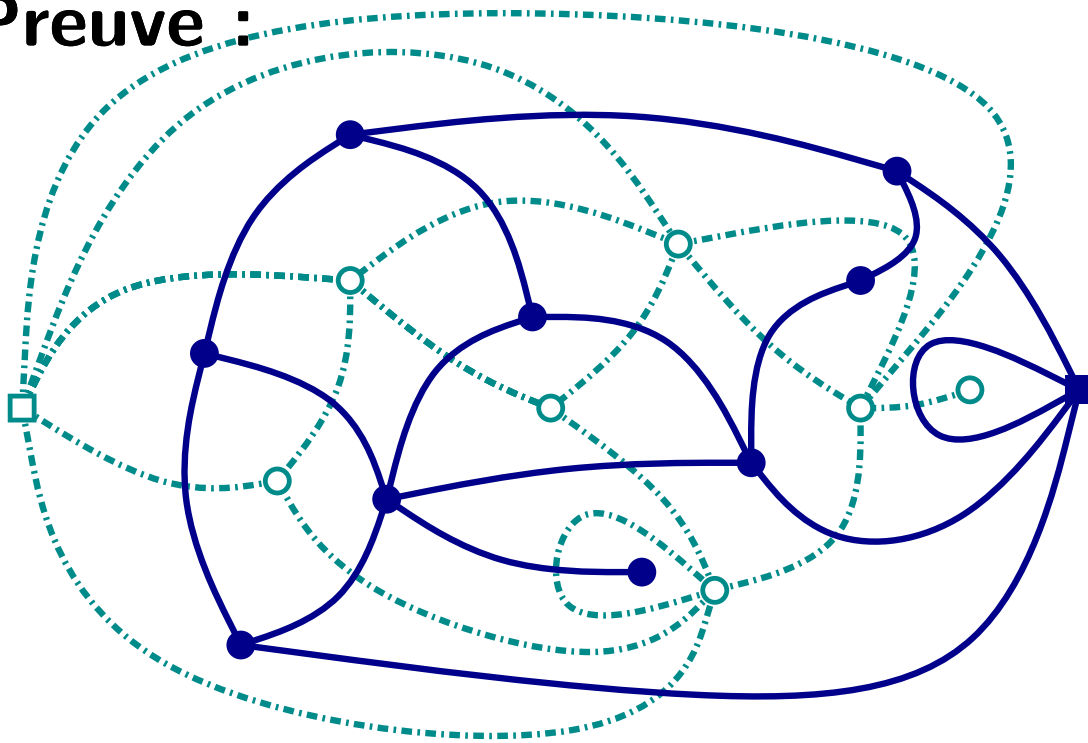
M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

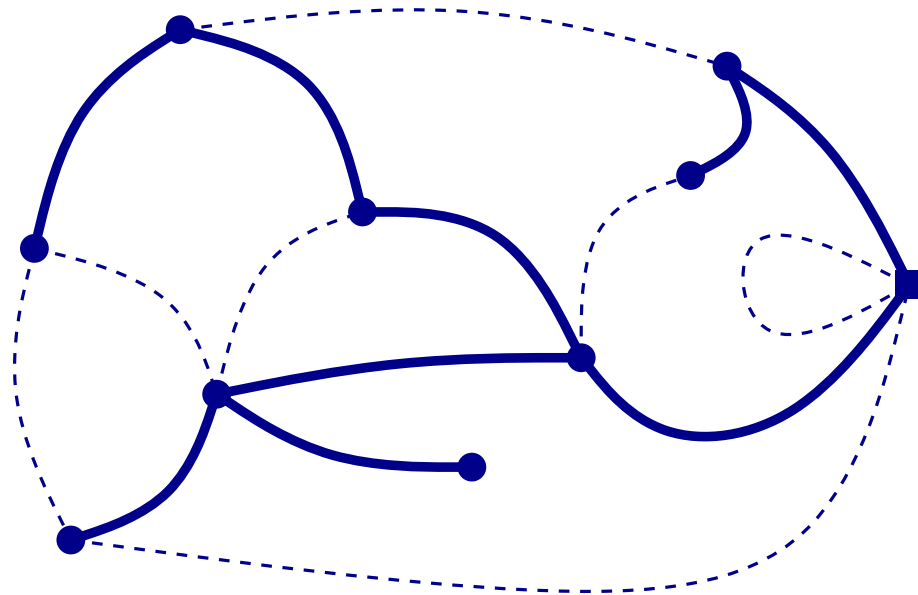
M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

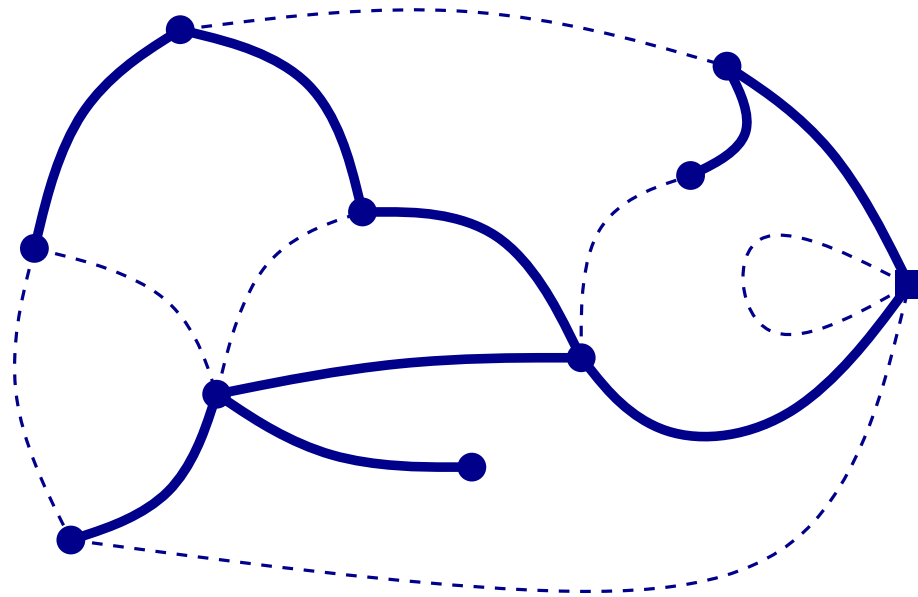
M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

$$M^* \text{ carte duale } |V(M^*)| = |F(M)|$$

Convention :

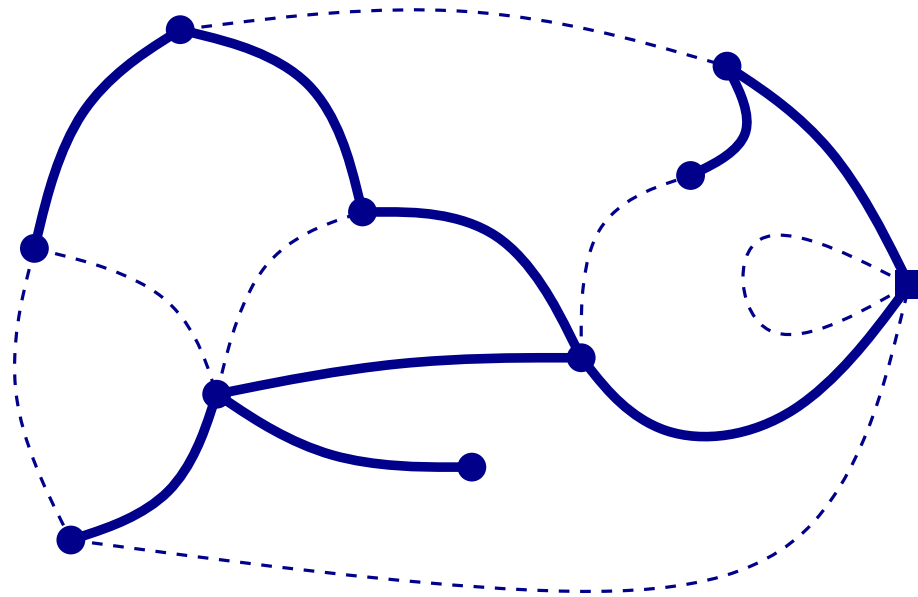


Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

$$M^* \text{ carte duale } |V(M^*)| = |F(M)|$$

Convention :

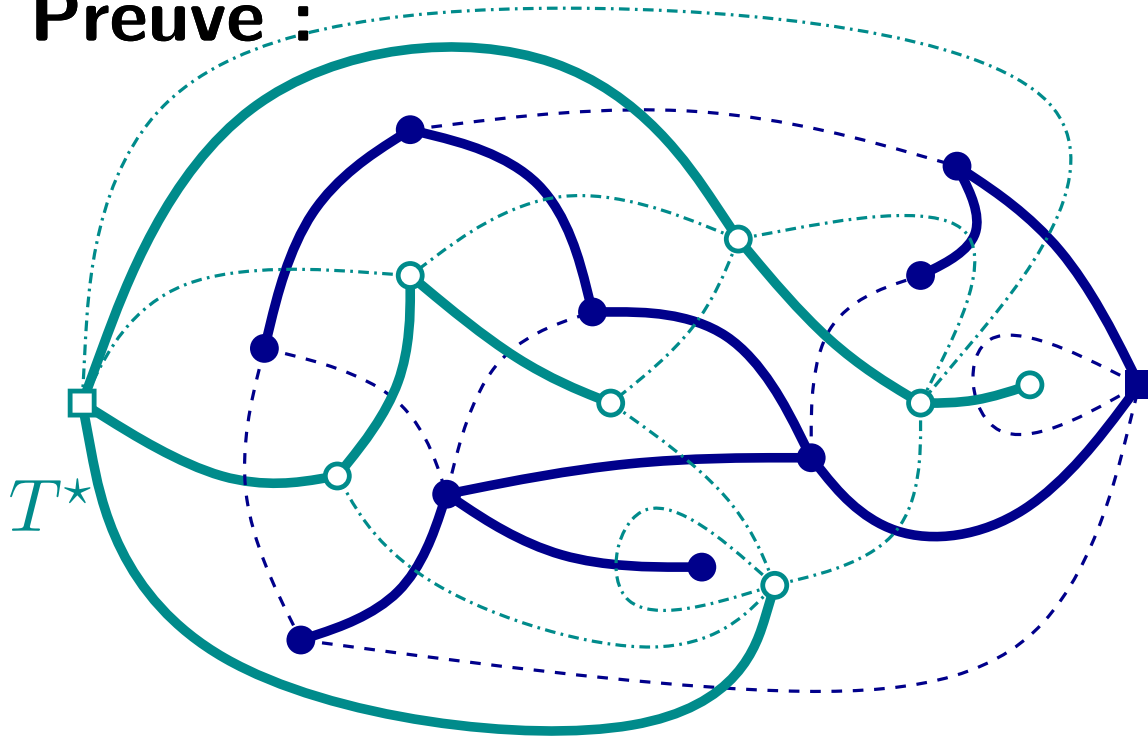


Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :




M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

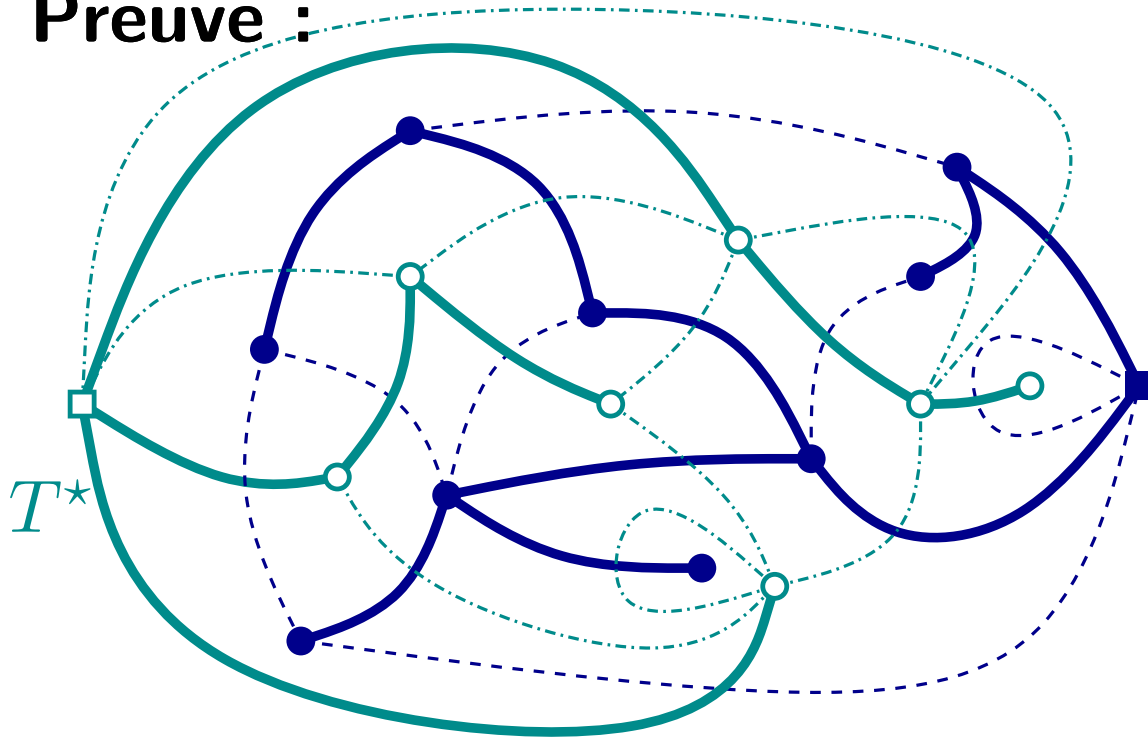
Convention :  $\implies T^* = \text{arbre couvrant de } M^*$

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

$$|V(T^*)| = |F(M)|,$$

$$|E(T^*)| = |F(M)| - 1$$

Convention :



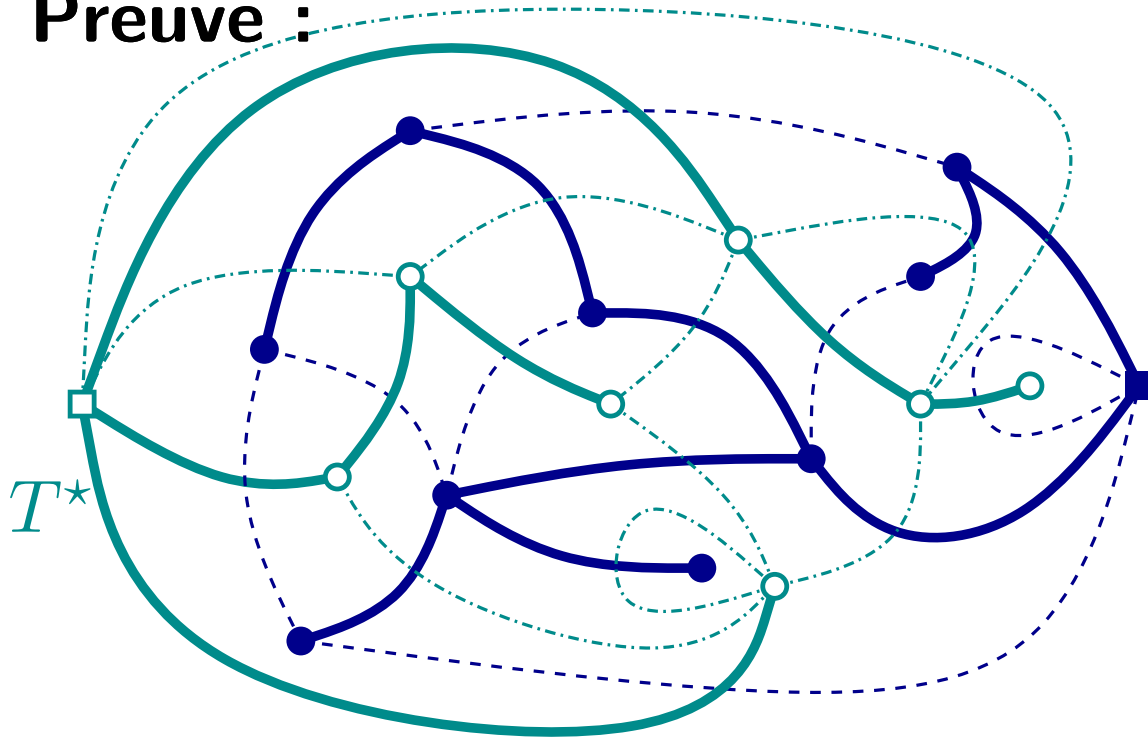
$\implies T^* =$ arbre couvrant de M^*

Aparté : Formule d'Euler

Formule d'Euler

$$|V(M)| + |F(M)| = 2 + |E(M)|$$

Preuve :



M carte plane enracinée

T arbre couvrant de M

$$|V(T)| = |V(M)|,$$

$$|E(T)| = |V(M)| - 1$$

M^* carte duale $|V(M^*)| = |F(M)|$

$$|V(T^*)| = |F(M)|,$$

$$|E(T^*)| = |F(M)| - 1$$

Convention :

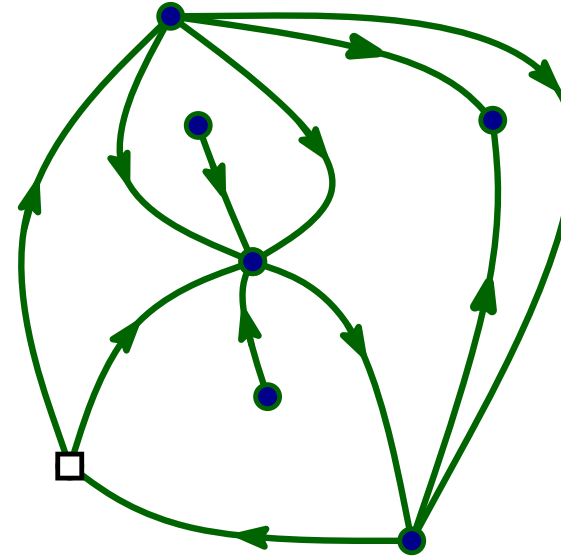


$$\implies |E(M)| = |E(T)| + |E(T^*)|$$

□

α -Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.



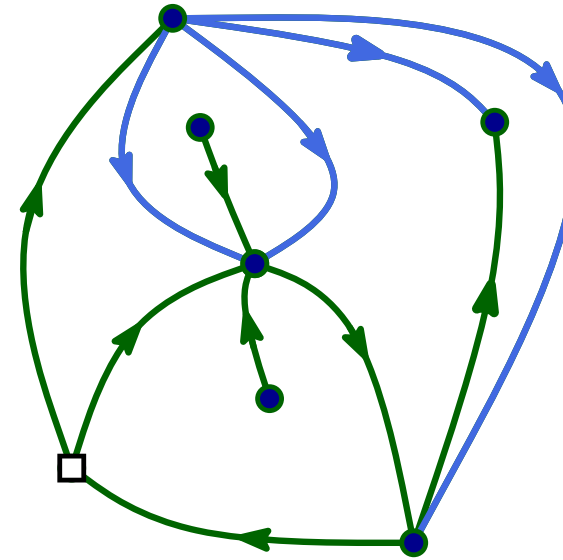
α -Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.

On caractérise une orientation par le degré sortant de ses sommets.

$$\text{out}(v) = \text{degré sortant de } v$$

$$\text{out}(v) = 4$$



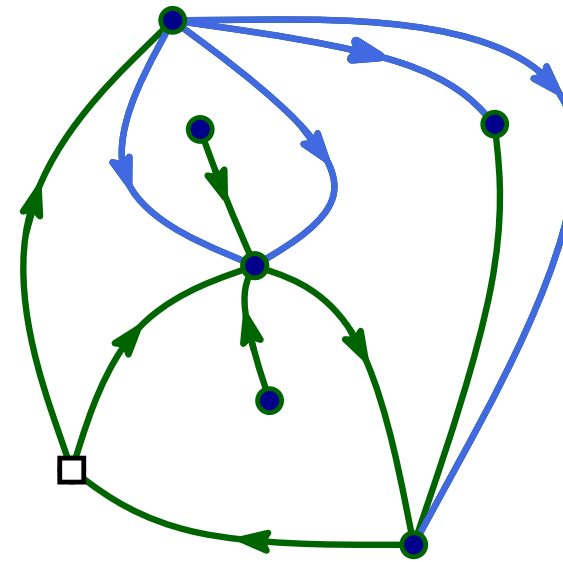
α -Orientations - Définition

Une **orientation** d'une carte plane est le choix d'une orientation pour chacune de ses arêtes.

On caractérise une orientation par le degré sortant de ses sommets.

$$\text{out}(v) = \text{degré sortant de } v$$

$$\text{out}(v) = 4$$



Soit $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$, une **α -orientation** est une orientation telle que :

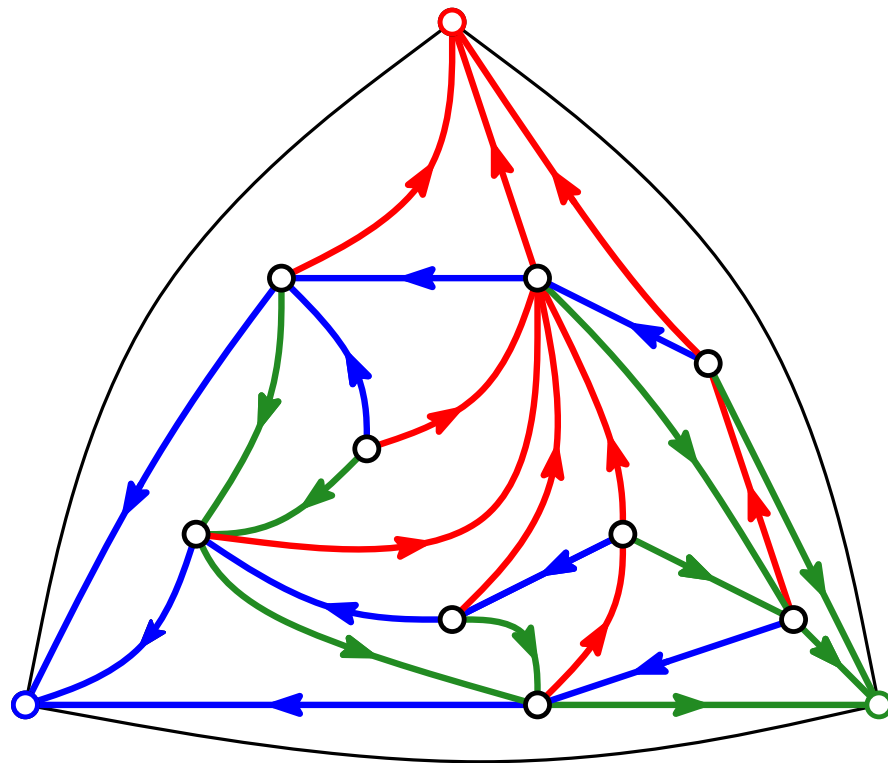
$$\text{out}(v) = \alpha(v), \text{ pour tout } v$$

[Propp '93], [Ossona de Mendez '94], [Felsner '04]

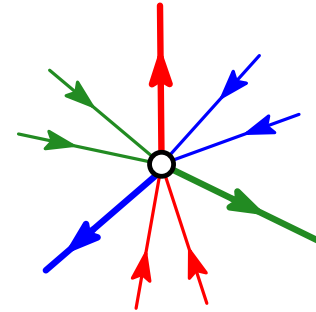
Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Schnyder woods [Schnyder '89] : motivation initiale.

Plus de détails : ce soir et demain.



Orientation et coloriage des arêtes d'une triangulation simple tels qu'autour de chaque sommet interne :

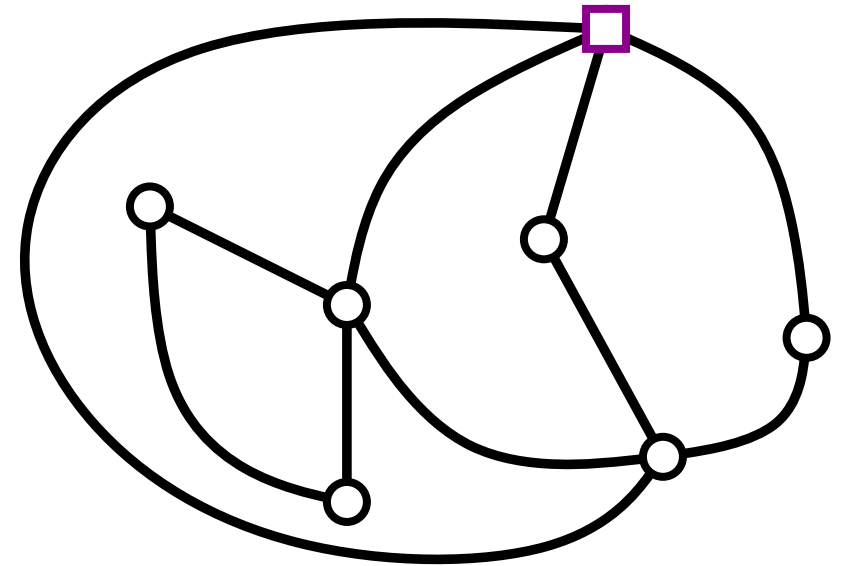


En particulier $\text{out}(v) = 3$ pour tout sommet interne v .

Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

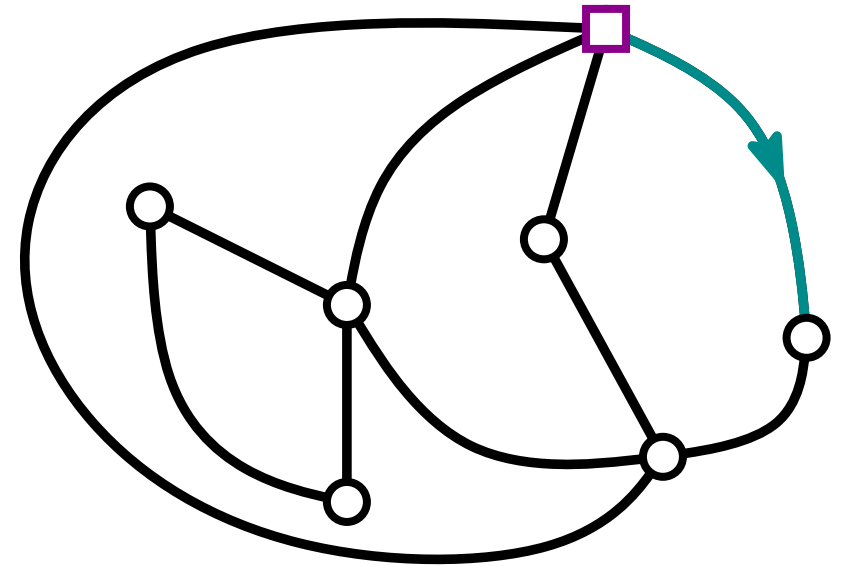
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

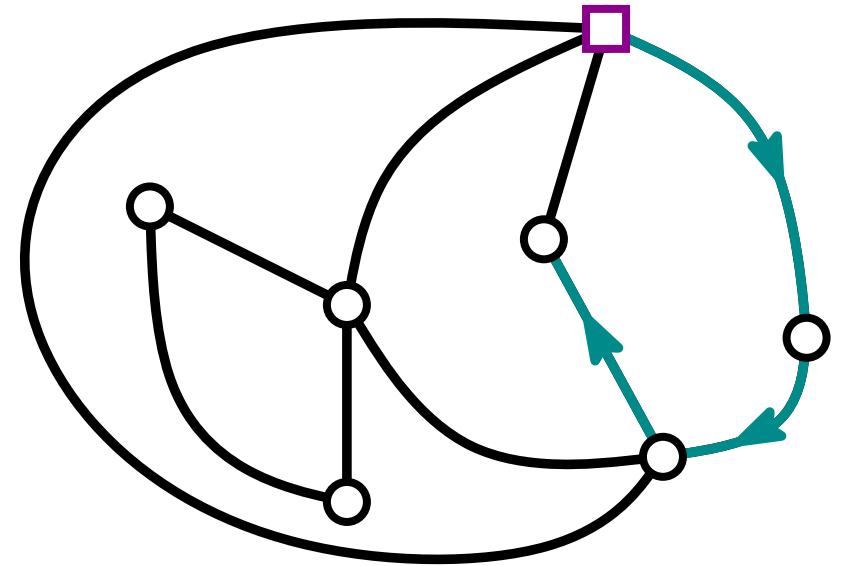
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

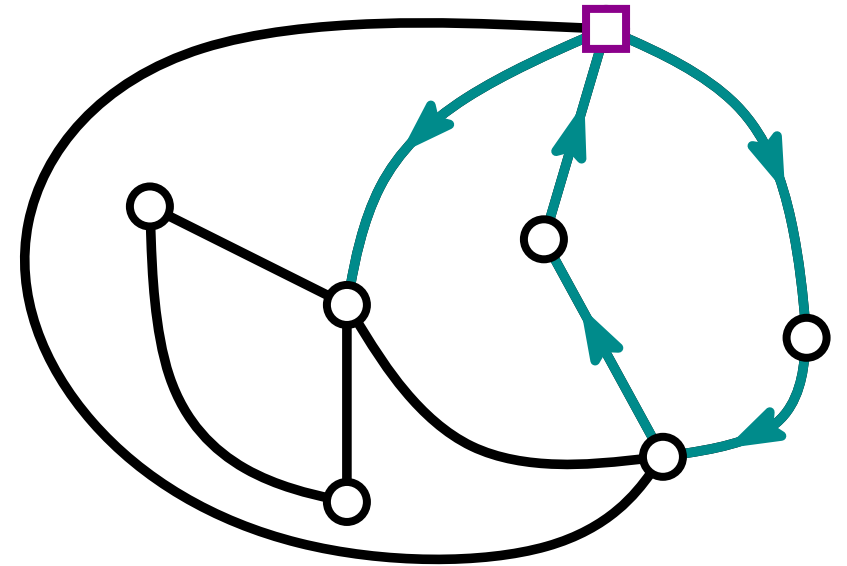
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

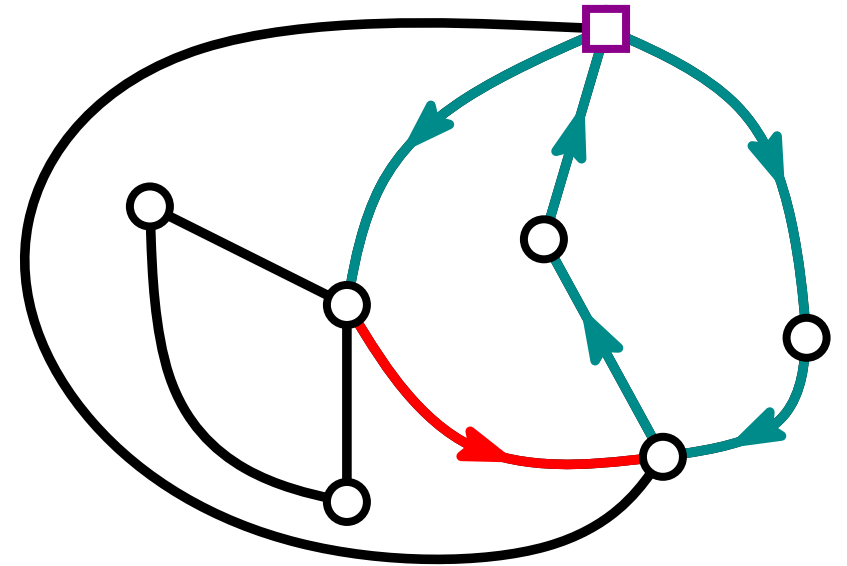
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

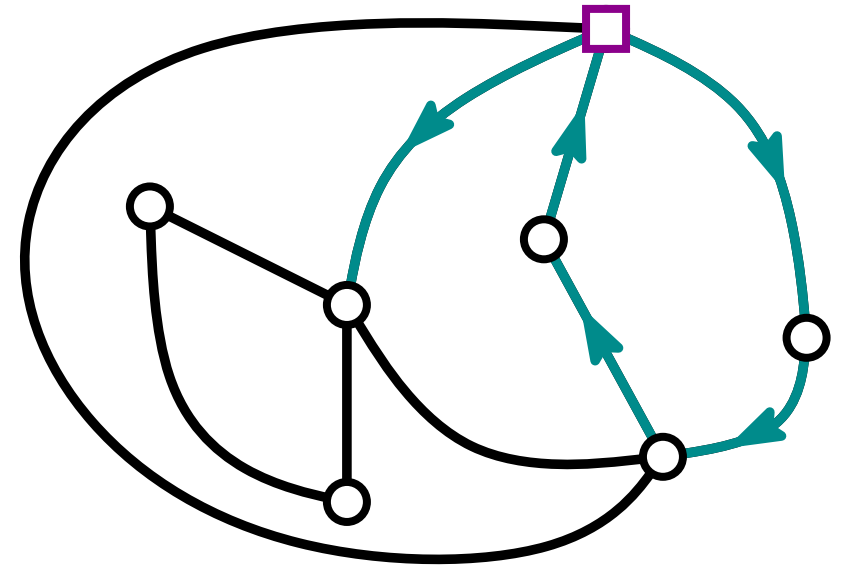
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

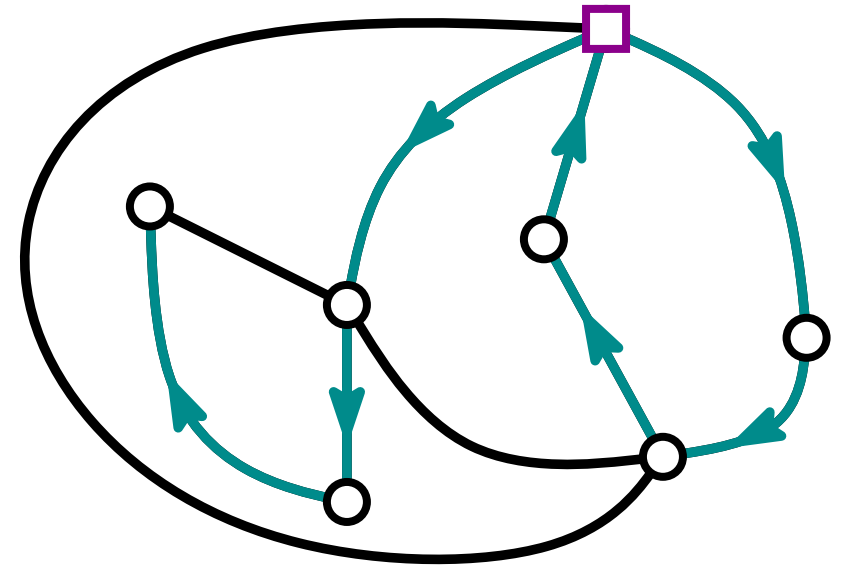
Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.



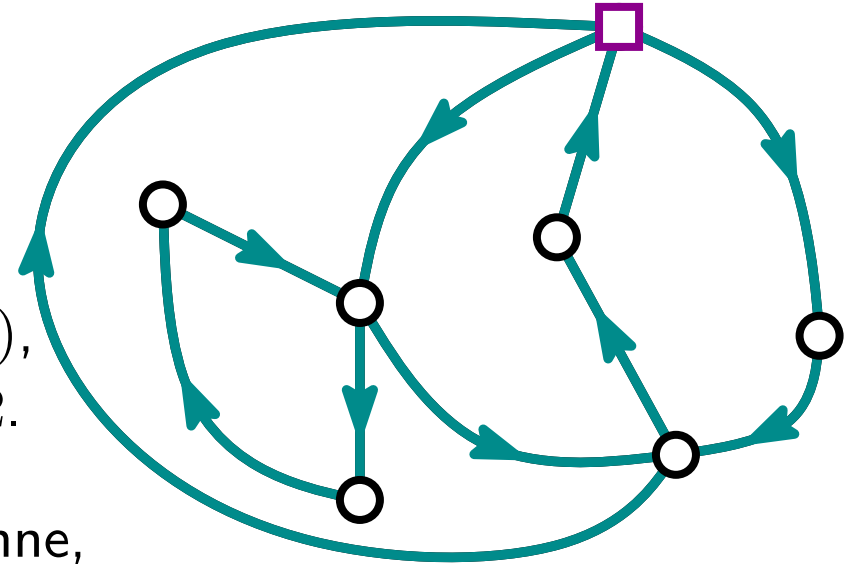
Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.

Orientations eulérienne : pour tout sommet v , $\text{in}(v) = \text{out}(v)$,
i.e. $\text{out}(v) = \text{deg}(v)/2$.

Chaque parcours définit naturellement une orientation eulérienne, obtenue en orientant les arêtes dans leur sens de parcours.



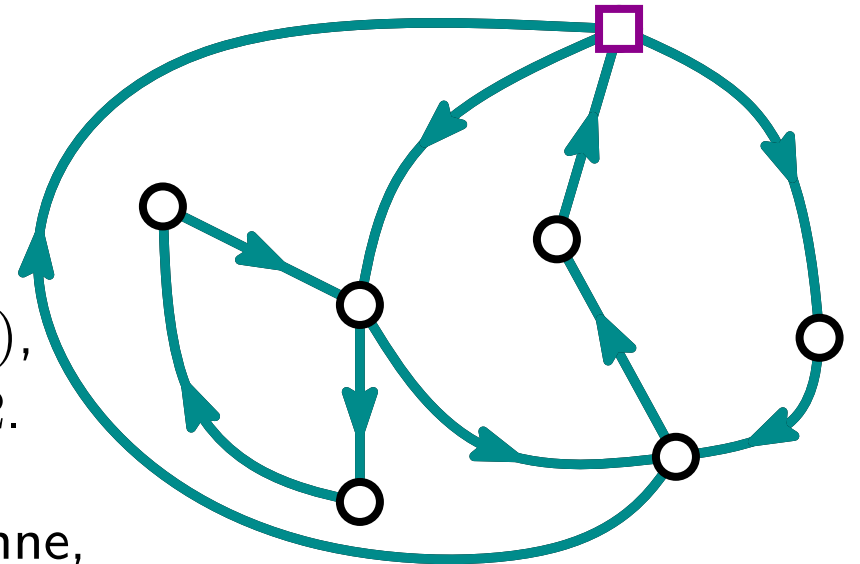
Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Orientations eulériennes :

Parcours d'un graphe : chemin qui visite chaque arête du graphe une fois et revient à son point de départ.

Orientation eulérienne : pour tout sommet v , $\text{in}(v) = \text{out}(v)$,
i.e. $\text{out}(v) = \text{deg}(v)/2$.

Chaque parcours définit naturellement une orientation eulérienne, obtenue en orientant les arêtes dans leur sens de parcours.



Théorème : Euler (1759), Hierholzer (1873)

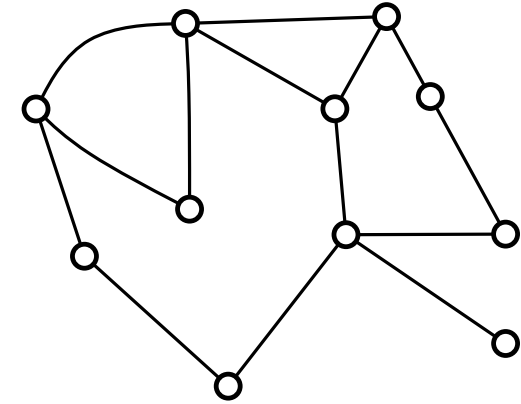
Un graphe connexe admet un parcours ssi il est eulérien (= degré pair $\forall v$).

\Rightarrow Un graphe admet une orientation eulérienne ssi il est eulérien.

Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

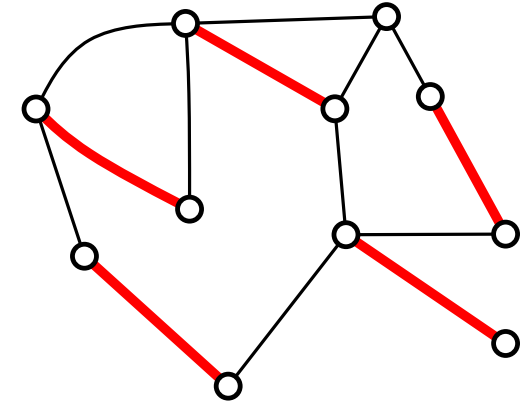
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

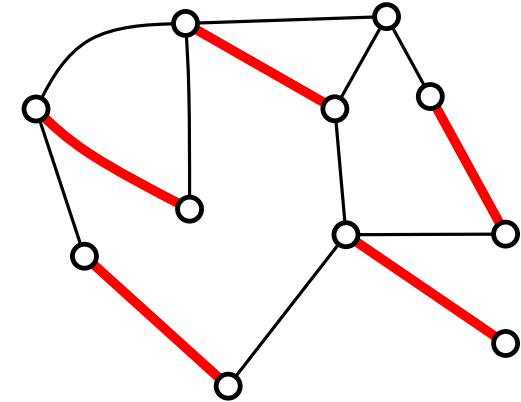


Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

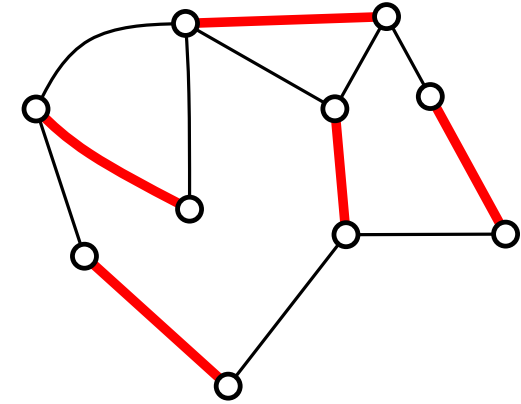


Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.



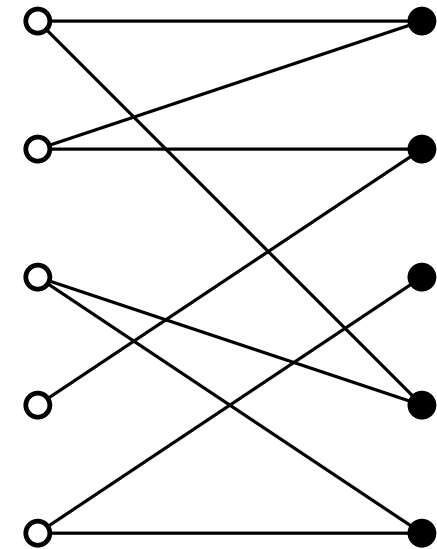
Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 




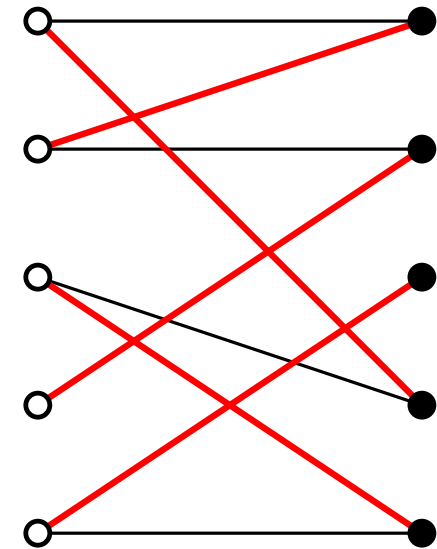
Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

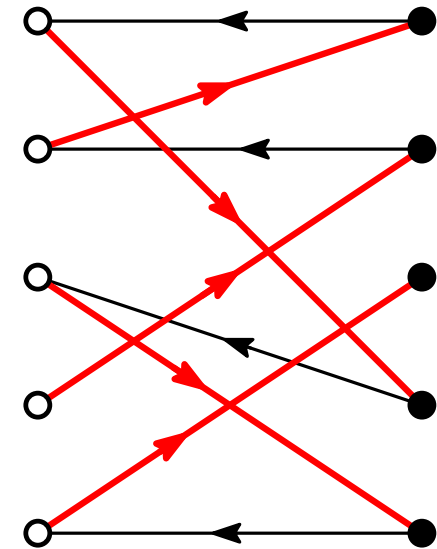
Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$\alpha(\bullet) = \deg - 1$ } Les couplages parfaits d'un graphe biparti et
 $\alpha(\circ) = 1$ } ses α -orientations sont en bijection.




Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

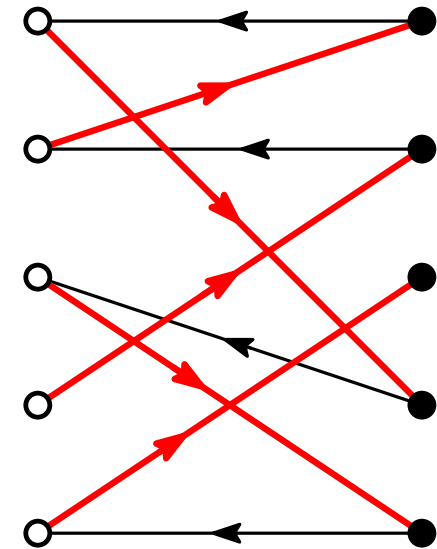
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$\alpha(\bullet) = \deg - 1$ } Les couplages parfaits d'un graphe biparti et
 $\alpha(\circ) = 1$ } ses α -orientations sont en bijection.

Peut-on garantir l'existence
d'un couplage parfait ?



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

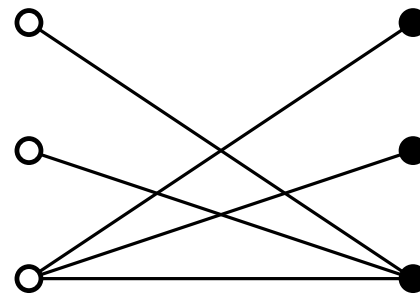
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

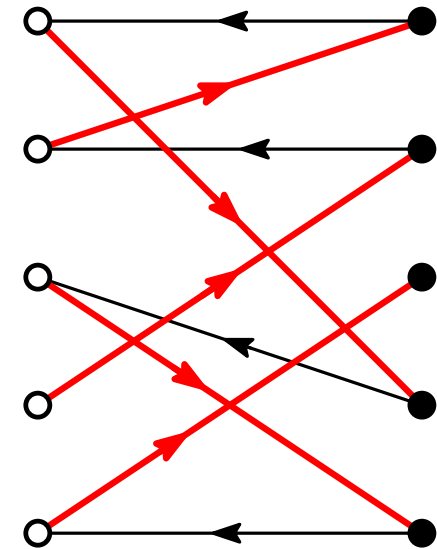
Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$\alpha(\bullet) = \deg - 1$ } Les couplages parfaits d'un graphe biparti et
 $\alpha(\circ) = 1$ } ses α -orientations sont en bijection.

Peut-on garantir l'existence d'un couplage parfait ?



Couplage parfait ?



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

Couplage parfait dans les graphes bipartis :

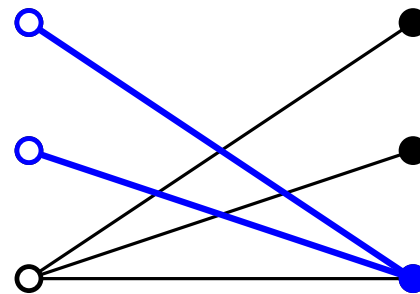
Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

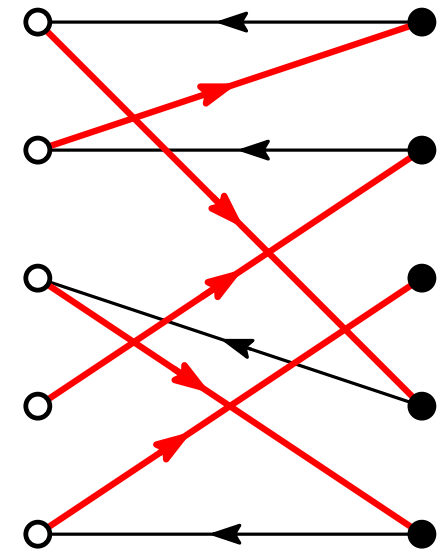
Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$\alpha(\bullet) = \text{deg} - 1$ } Les couplages parfaits d'un graphe biparti et
 $\alpha(\circ) = 1$ } ses α -orientations sont en bijection.

Peut-on garantir l'existence d'un couplage parfait ?



Couplage parfait ?
NON



Pourquoi les α -orientations ? Quelques motivations.

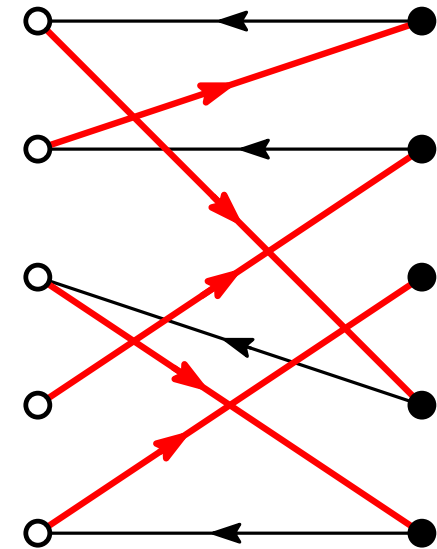
Couplage parfait dans les graphes bipartis :

Couplage dans un graphe : ensemble d'arêtes tel que chaque sommet appartient au plus à une arête.

Couplage parfait : chaque sommet appartient exactement à une arête.

Graphe biparti : sommets noirs et sommets blancs tels que 

$\alpha(\bullet) = \deg - 1$ } Les couplages parfaits d'un graphe biparti et
 $\alpha(\circ) = 1$ } ses α -orientations sont en bijection.



Théorème : Hall (1935)

Un graphe biparti admet un couplage parfait ssi $\forall W =$ sous-ensemble de sommets blancs, $|W| \leq \left| \cup_{w \in W} \{ \text{voisins de } w \} \right|$

II

Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$ \longrightarrow α est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

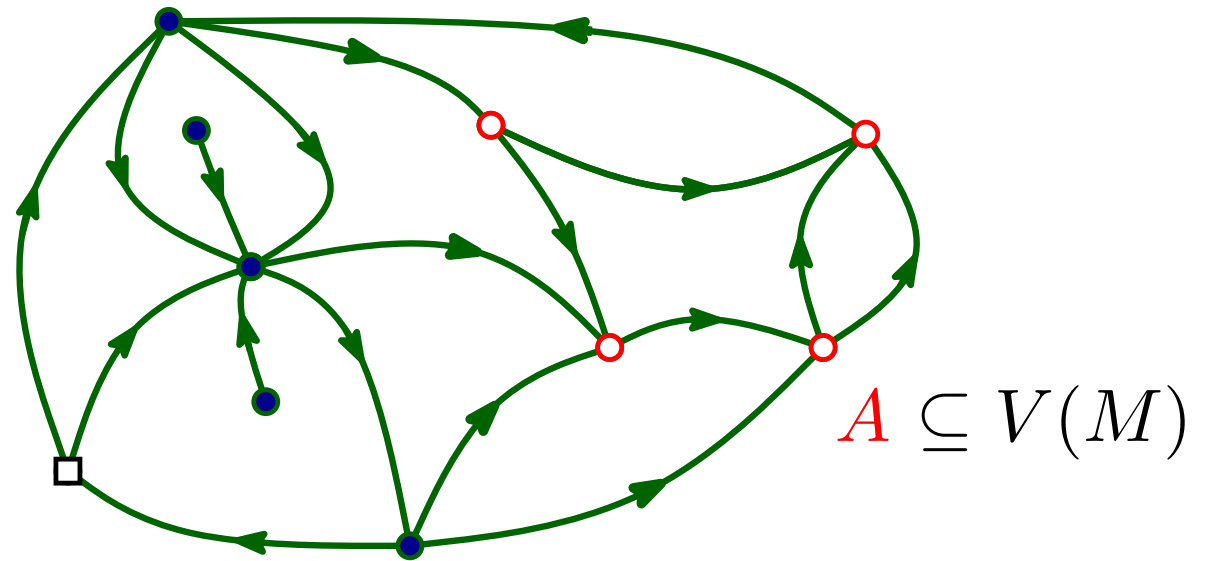
$$1 - \sum_v \alpha(v) = |E(M)|$$

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$ \longrightarrow α est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

$$1 - \sum_v \alpha(v) = |E(M)|$$



II Existence d'orientations : conditions nécessaires

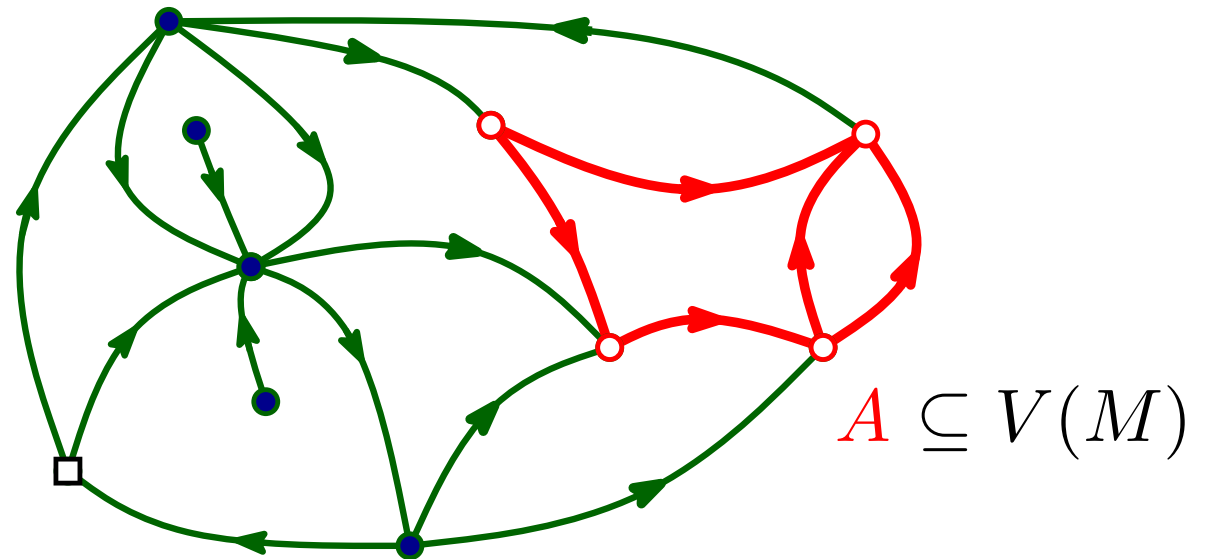
M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$ \longrightarrow α est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

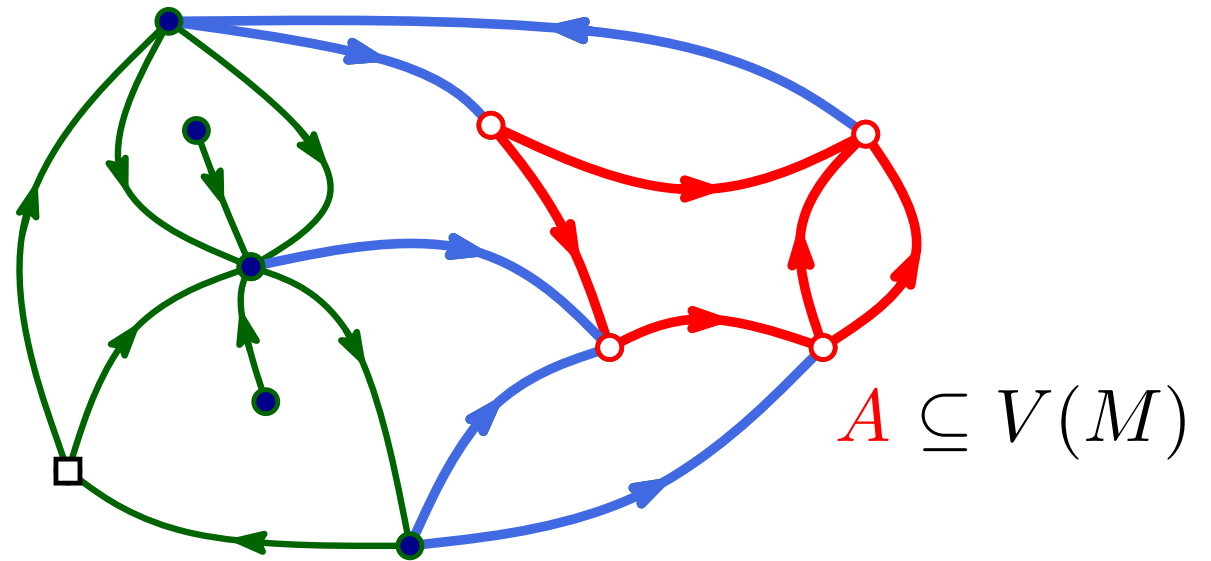
M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

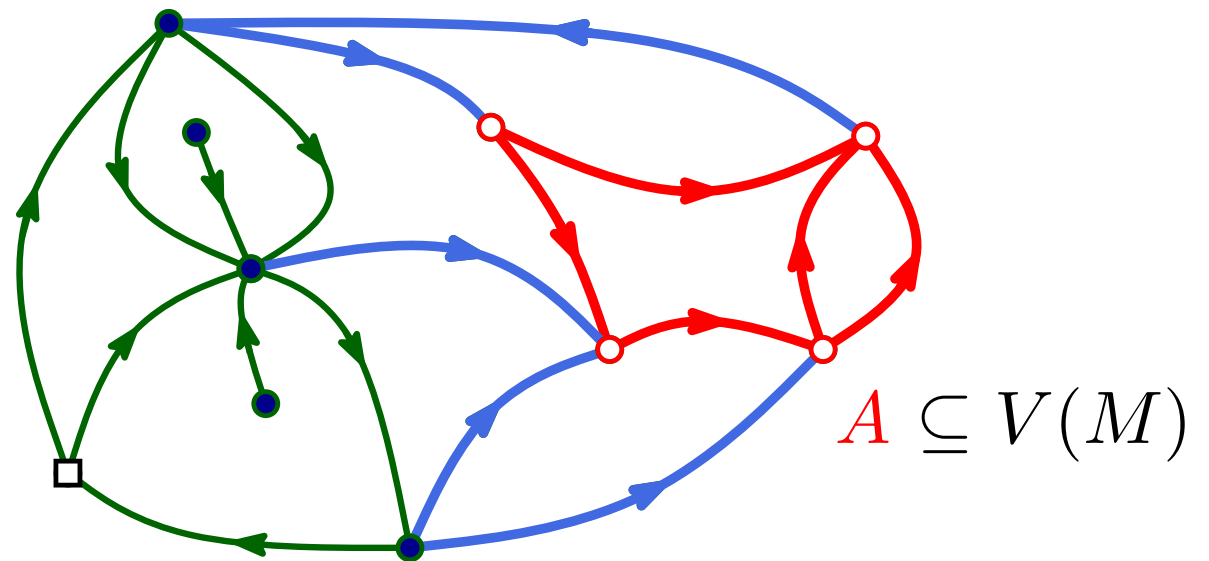
1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi
 il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

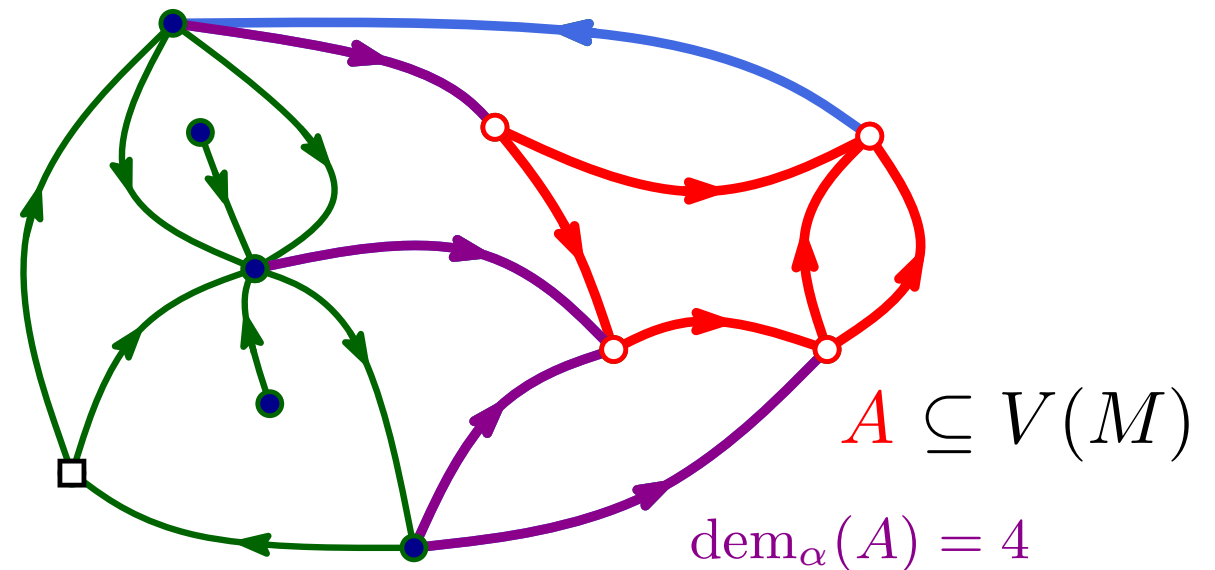
$$1 - \sum_v \alpha(v) = |E(M)|$$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

$$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planeaire α est **faisable** (= "feasible") ssi
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow$ il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

$$1 - \sum_v \alpha(v) = |E(M)|$$

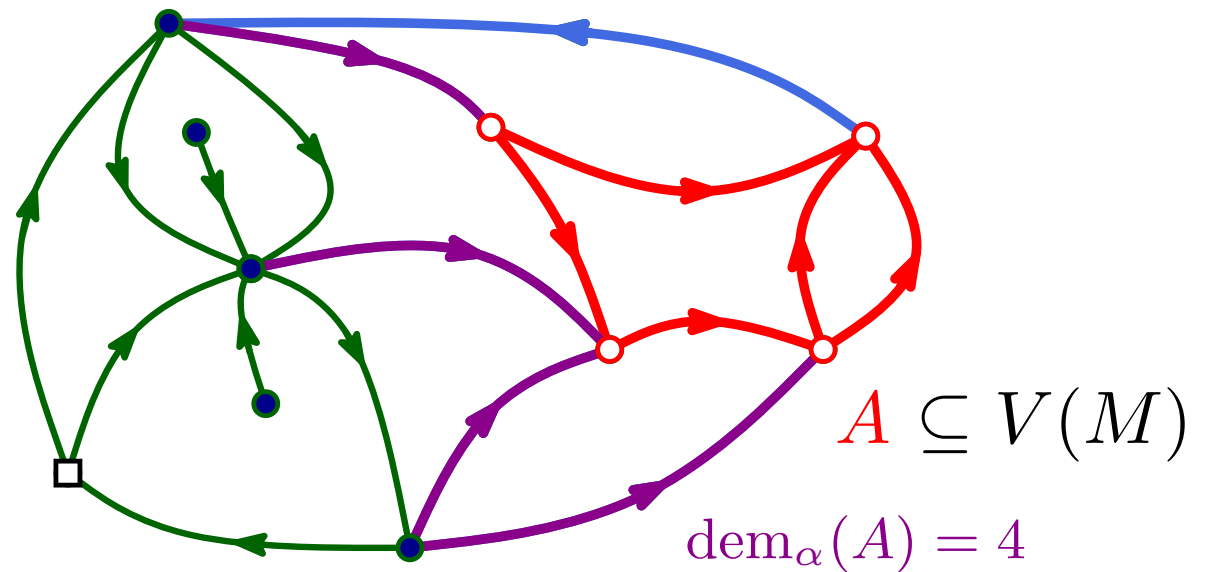
2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \geq |E[A]|$$

et

$$\sum_{v \in A} \alpha(v) \leq |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]|$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$
 demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

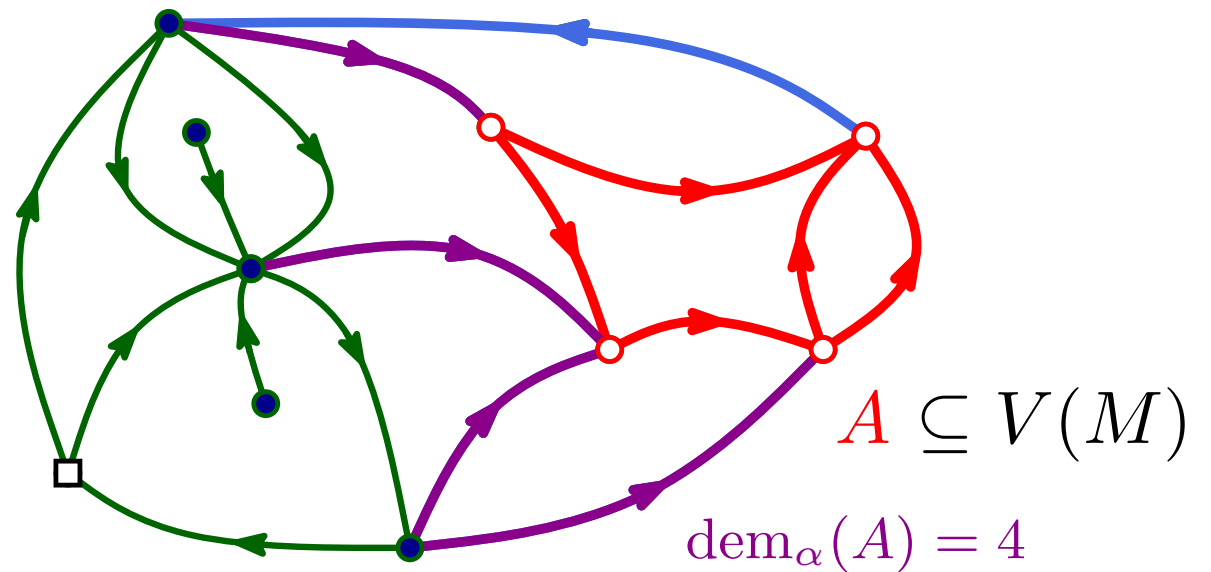
M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

$$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

II Existence d'orientations : conditions nécessaires

M carte planeaire
 $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ est **faisable** (= "feasible") ssi
il existe une α -orientation de M

Conditions nécessaires :

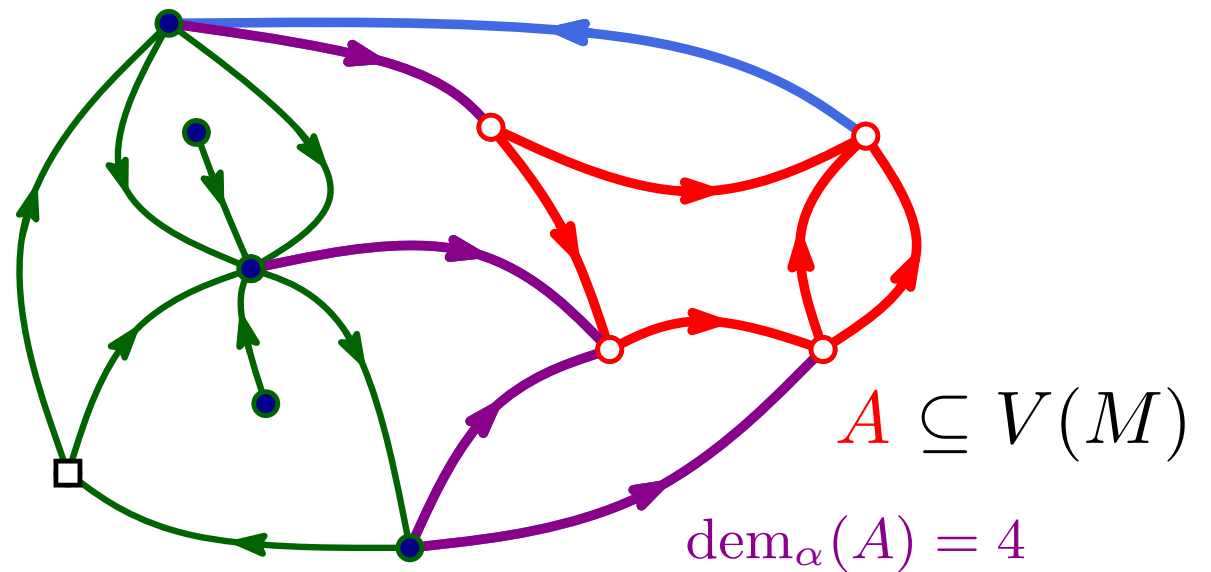
1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$

2 - Pour tout $A \subseteq V(M)$,

$0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$

Théorème :

Ces conditions sont suffisantes.



$E[A]$ = arêtes entre des sommets de A

$E_{\text{cut}}[A]$ = arêtes avec **une seule** extrémité dans A

$$\text{dem}_\alpha(A) = |E[A]| + |E_{\text{cut}}[A]| - \sum_{v \in A} \alpha(v)$$

demande de $A \approx$ nbre d'arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$ pointant vers A

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

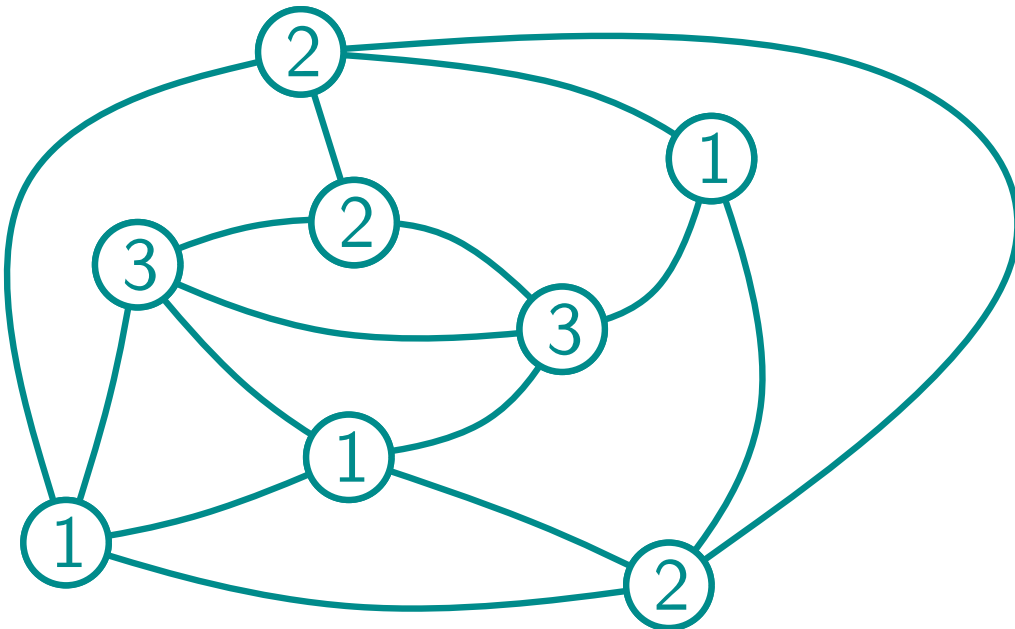
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

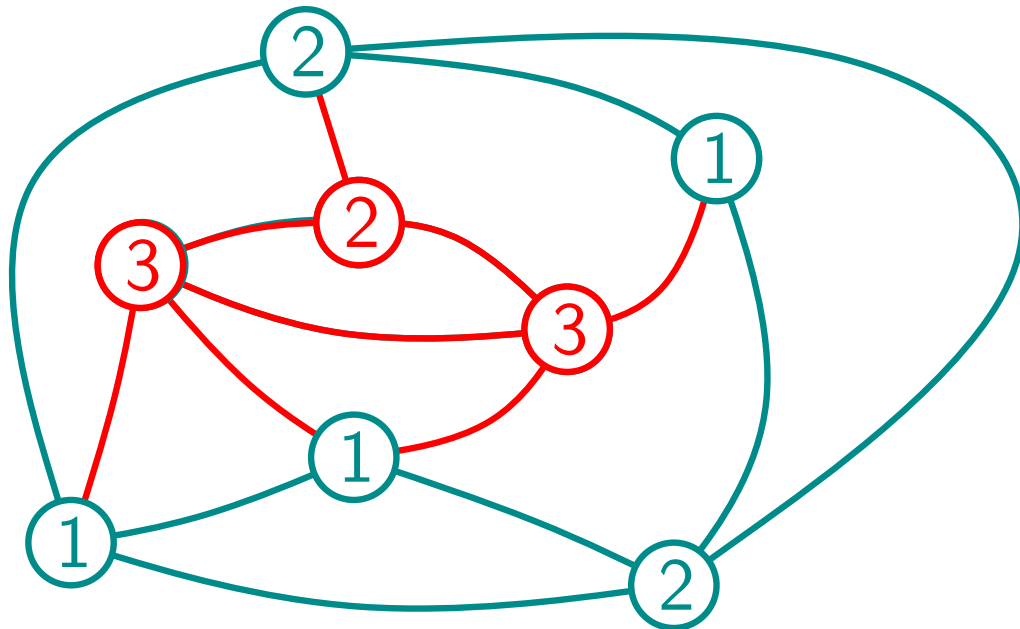
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

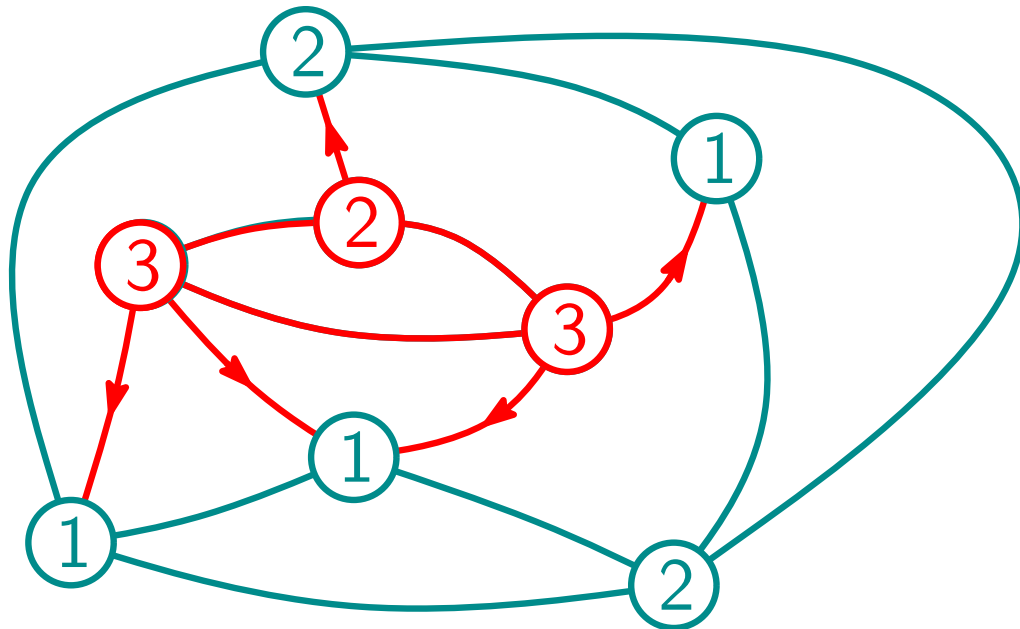
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

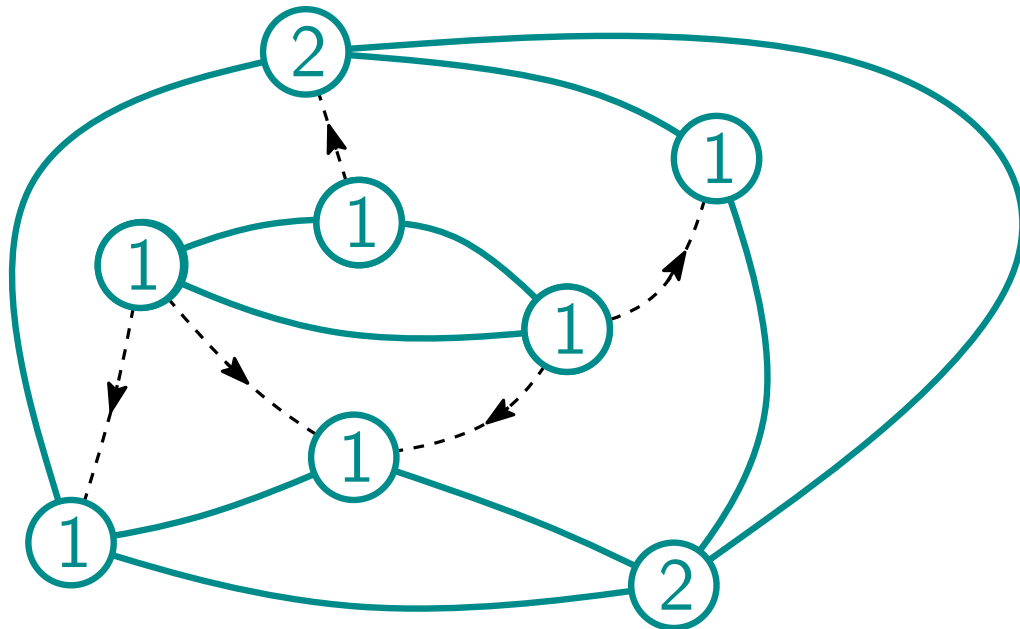
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

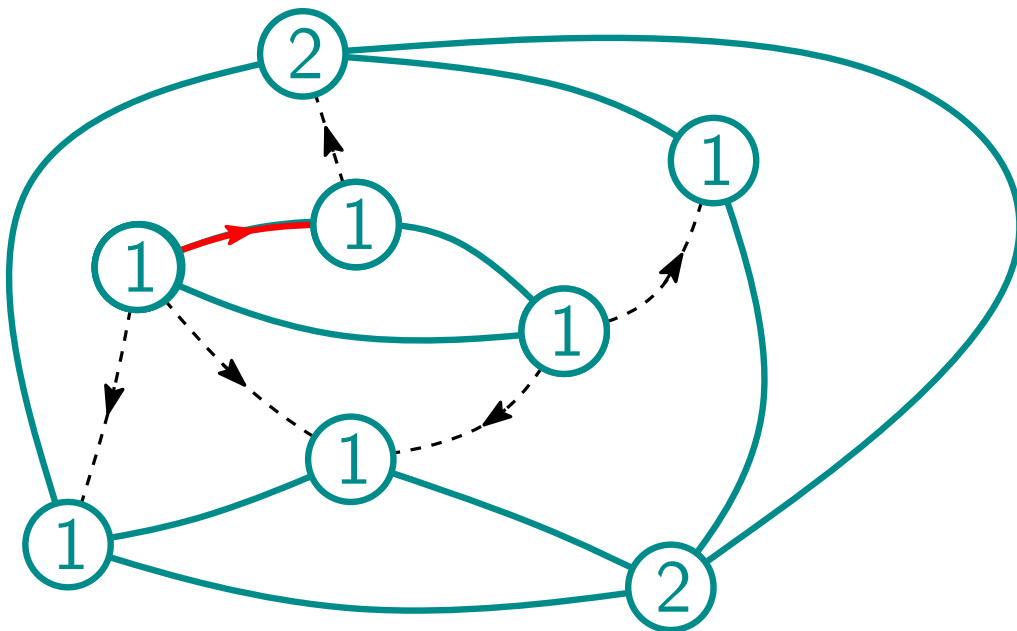
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

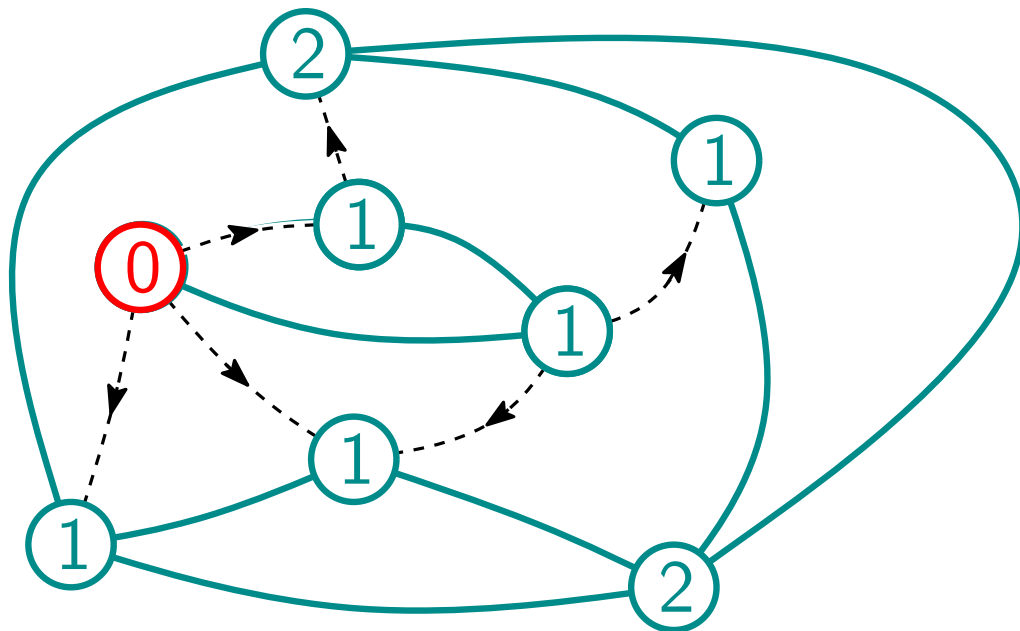
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement
+ actualiser α .

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

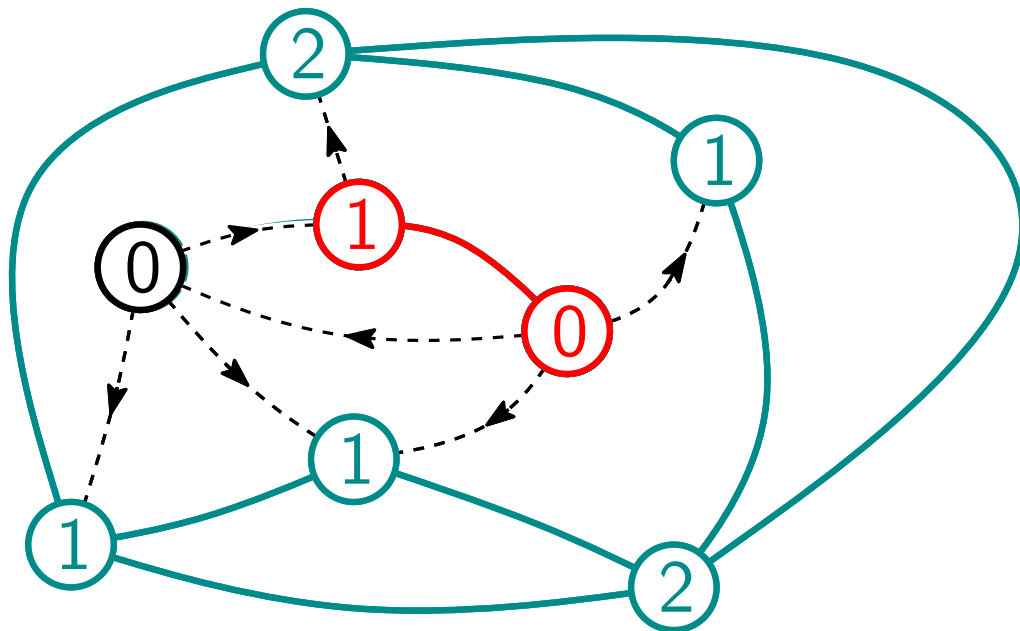
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement + actualiser α .

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

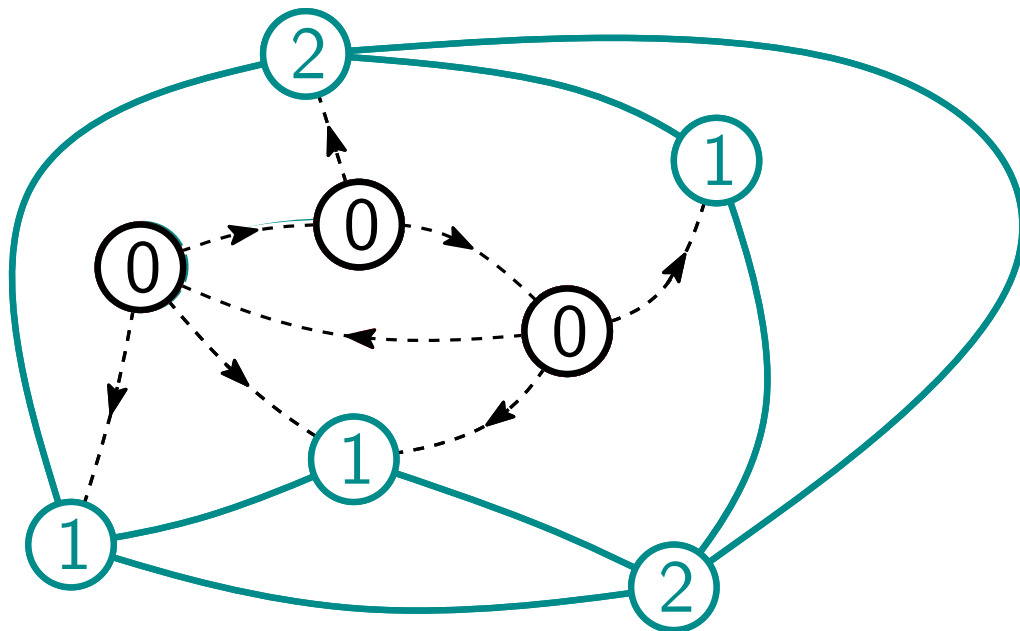
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement + actualiser α .

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

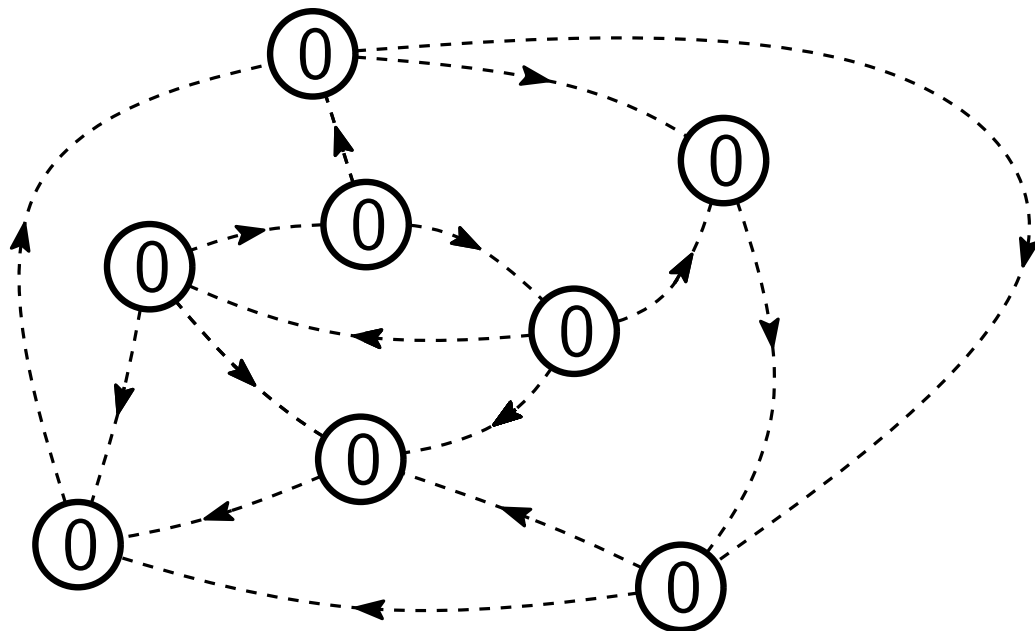
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement + actualiser α .

Existence d'orientations : conditions suffisantes

Théorème :

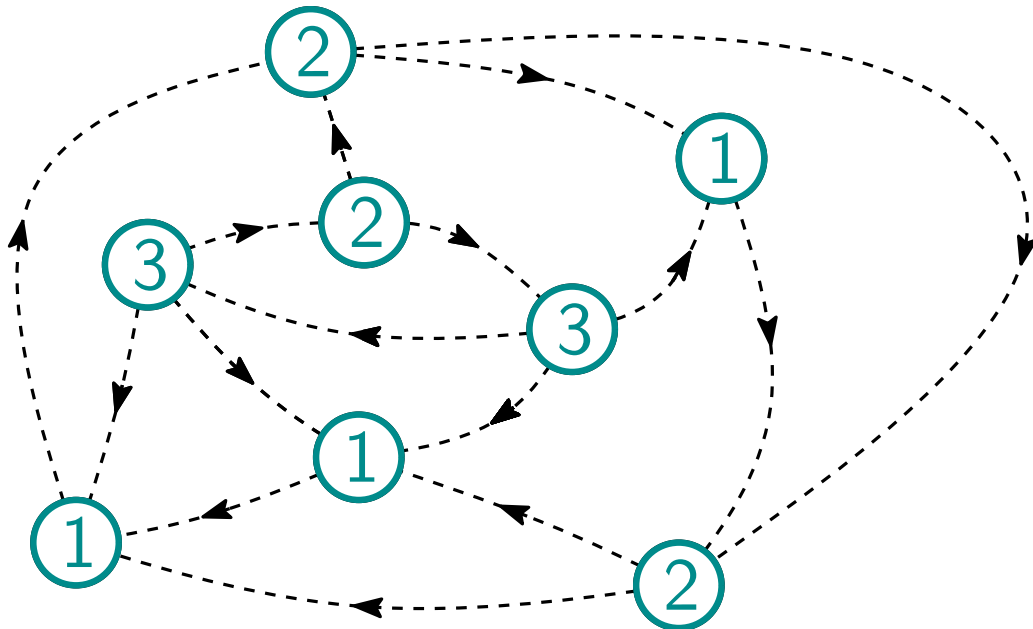
Soit M et α telles que :

1 - $\sum_v \alpha(v) = |E(M)|$, i.e. $\text{dem}_\alpha(V) = 0$.

2 - Pour tout $A \subsetneq V(M)$, $0 \leq \text{dem}_\alpha(A) \leq |E_{\text{cut}}[A]|$.

alors α est **faisable**.

Preuve (par l'exemple) :



Tant que ce n'est pas fini, faire :

- Tant qu' $\exists A$ tel que $\text{dem}_\alpha(A) = 0$,
 - a) orienter les arêtes de $E_{\text{cut}}[A]$,
 - b) actualiser α .
- Orienter une arête arbitrairement + actualiser α .

Ensemble des α -orientations

M carte plane }
 α faisable } Que peut-on dire des α -orientations ?

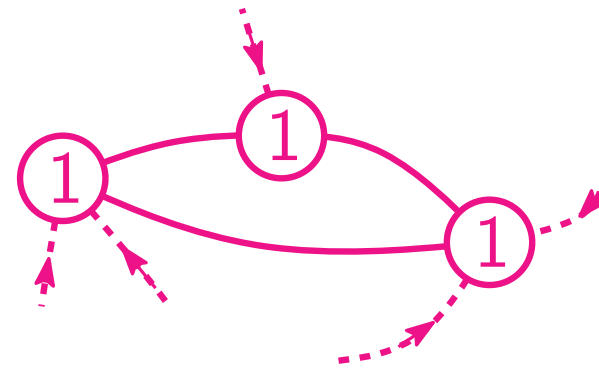
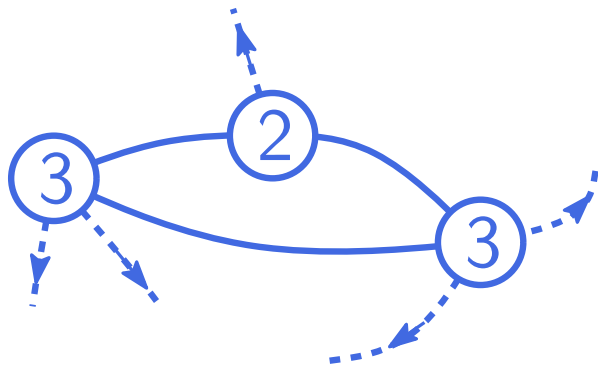
Ensemble des α -orientations

M carte plane } Que peut-on dire des α -orientations?
 α faisable

1 - Arêtes rigides

s'il existe A tel que ou $\begin{cases} \text{dem}_\alpha(A) = 0 \\ \text{dem}_\alpha(A) = |E_{\text{cut}}(A)| \end{cases}$

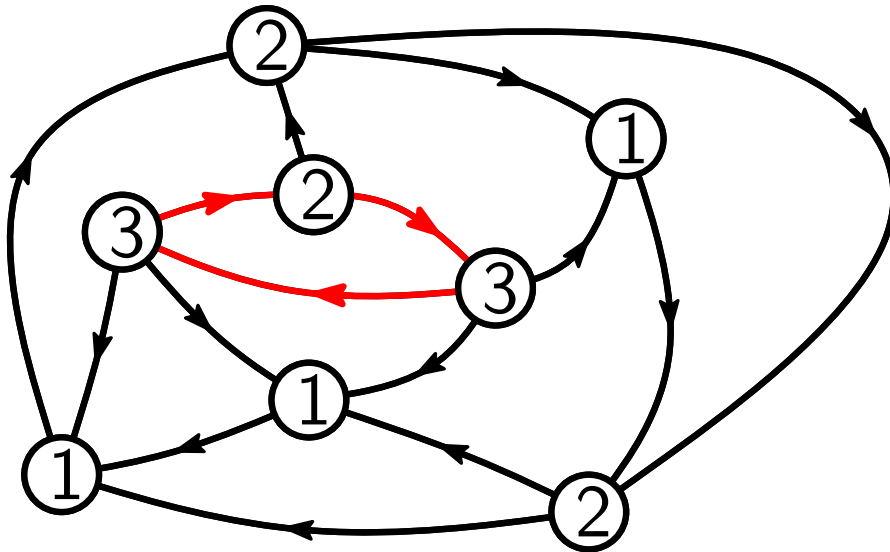
les arêtes de $E_{\text{cut}}(A)$ sont **rigides** (= pas de choix pour leur orientation)



Ensemble des α -orientations

M carte plane }
 α faisable } Que peut-on dire des α -orientations ?

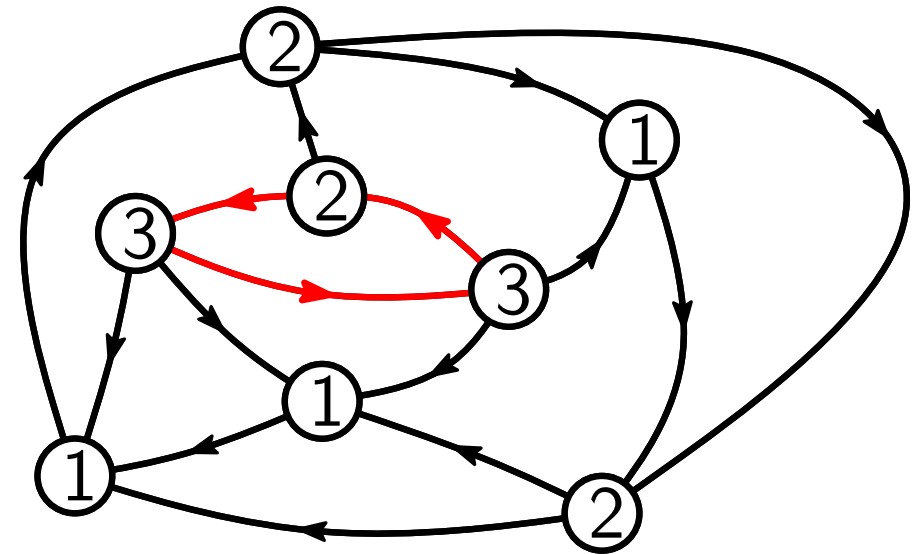
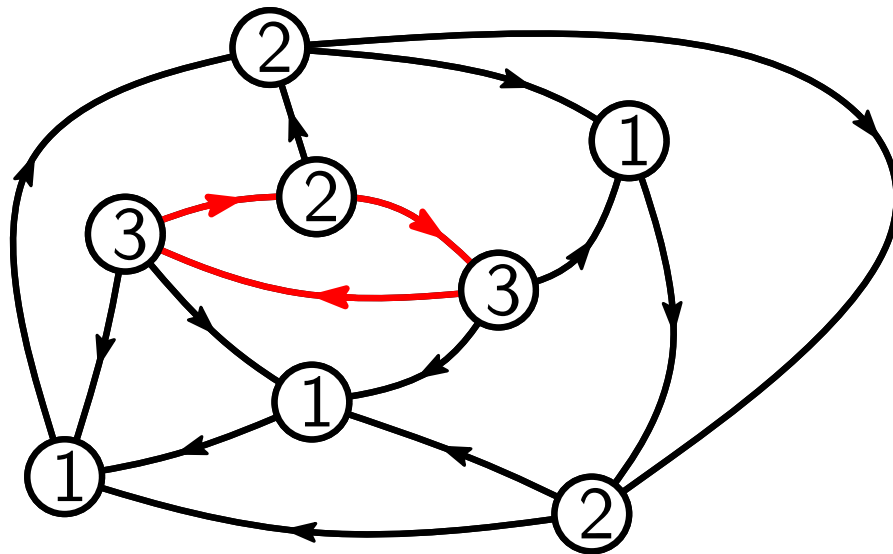
2 - Cycles



Ensemble des α -orientations

M carte plane }
 α faisable } Que peut-on dire des α -orientations ?

2 - Cycles

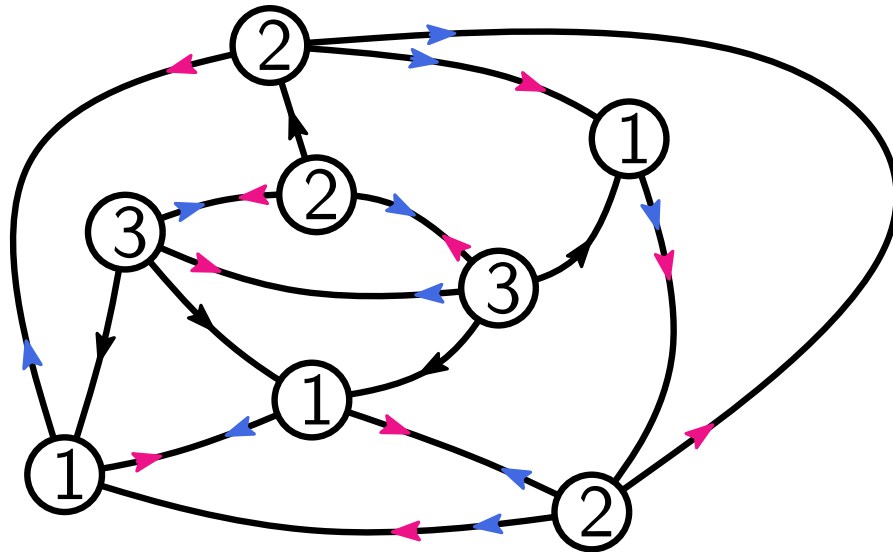


Le retournement d'un cycle produit une nouvelle α -orientation.

Ensemble des α -orientations

M carte plane } Que peut-on dire des α -orientations ?
 α faisable

2 - Cycles



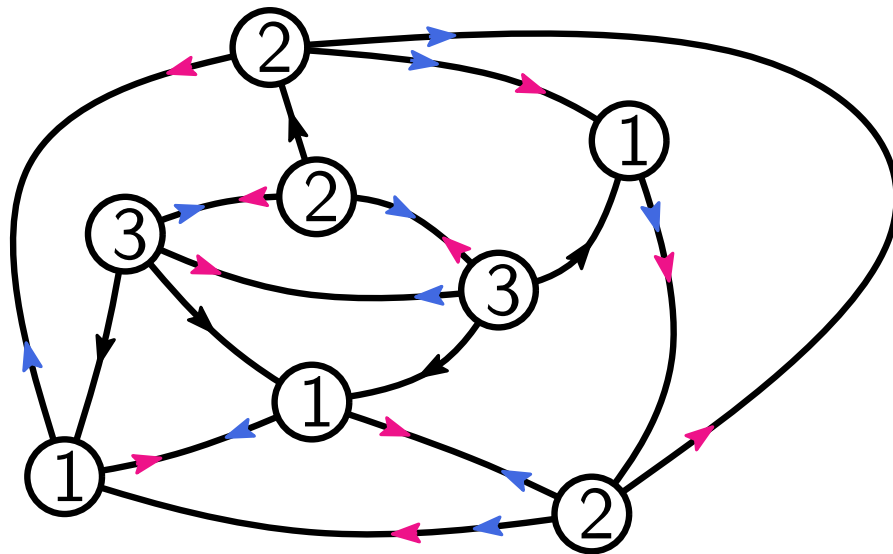
arêtes rigides

α -orientations : O_1 et O_2

Ensemble des α -orientations

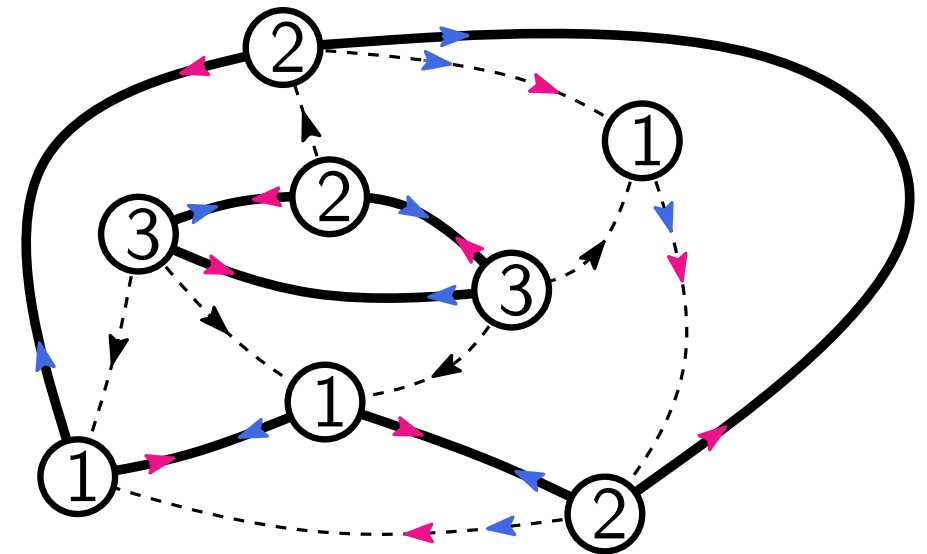
M carte plane } Que peut-on dire des α -orientations ?
 α faisable

2 - Cycles



arêtes rigides
 α -orientations : O_1 et O_2

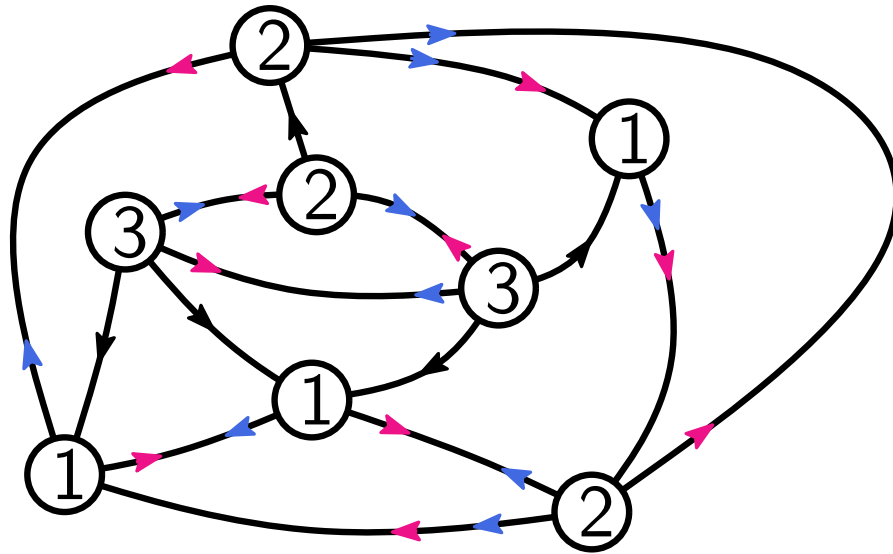
arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



Ensemble des α -orientations

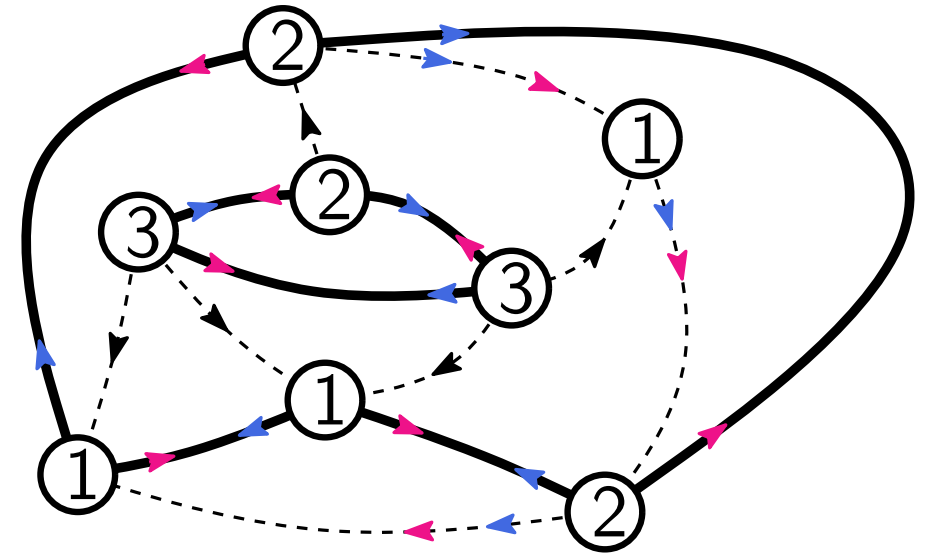
M carte plane } Que peut-on dire des α -orientations ?
 α faisable

2 - Cycles



arêtes rigides
 α -orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



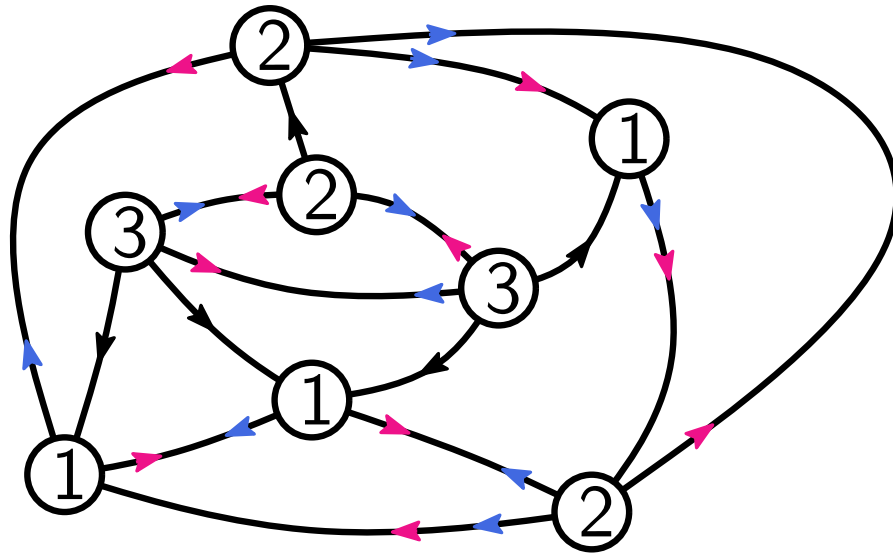
Propriété :

Tous les sommets ont degré pair.
(i.e. c'est une union de cycles)

Ensemble des α -orientations

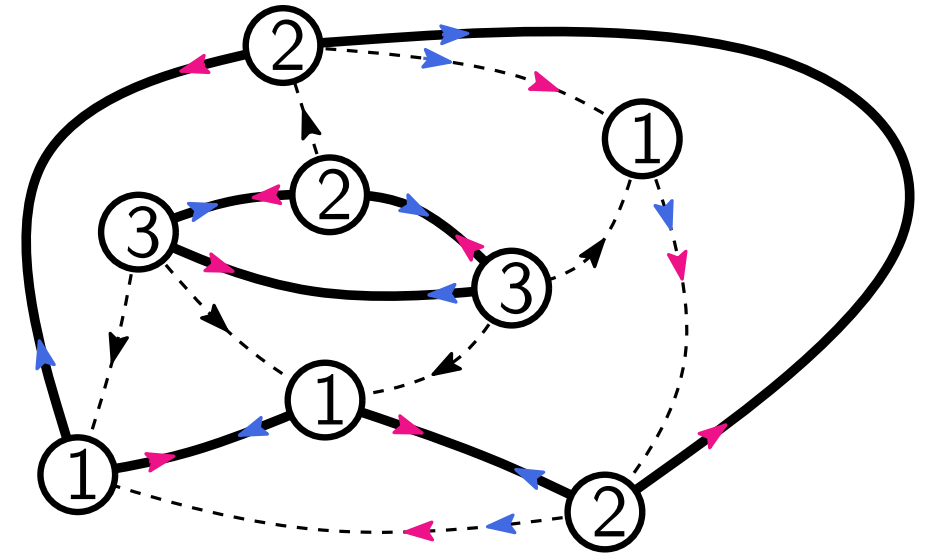
M carte plane
 α faisable } Que peut-on dire des α -orientations ?

2 - Cycles



arêtes rigides
 α -orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



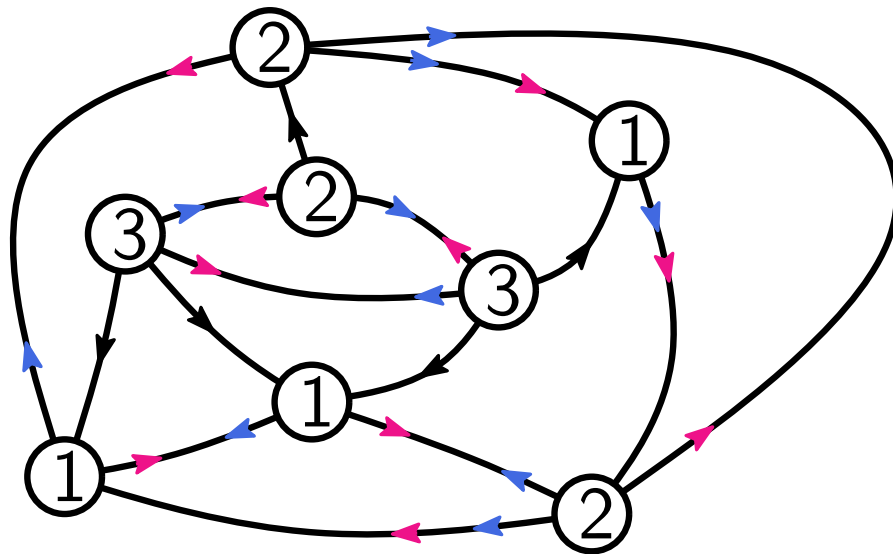
Théorème :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Ensemble des α -orientations

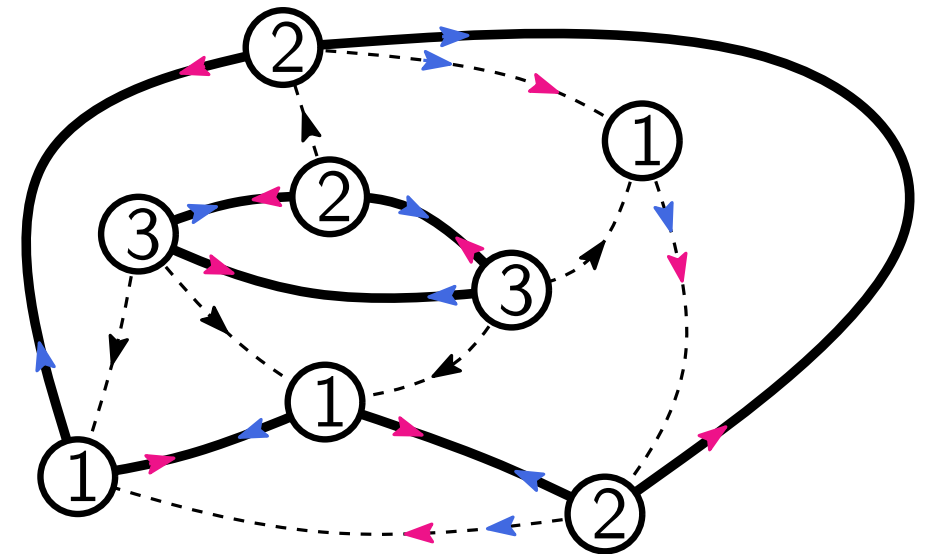
M carte plane } Que peut-on dire des α -orientations ?
 α faisable

2 - Cycles



arêtes rigides
 α -orientations : O_1 et O_2

arêtes pour lesquelles $O_1 \neq O_2$



Théorème :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

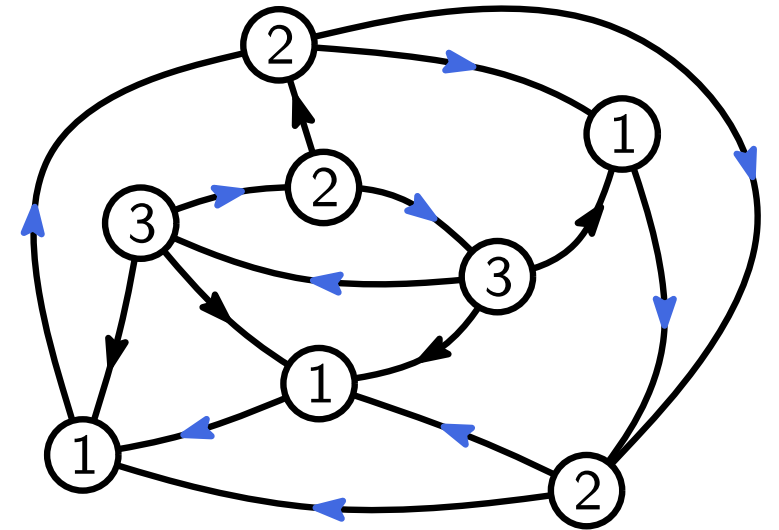
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



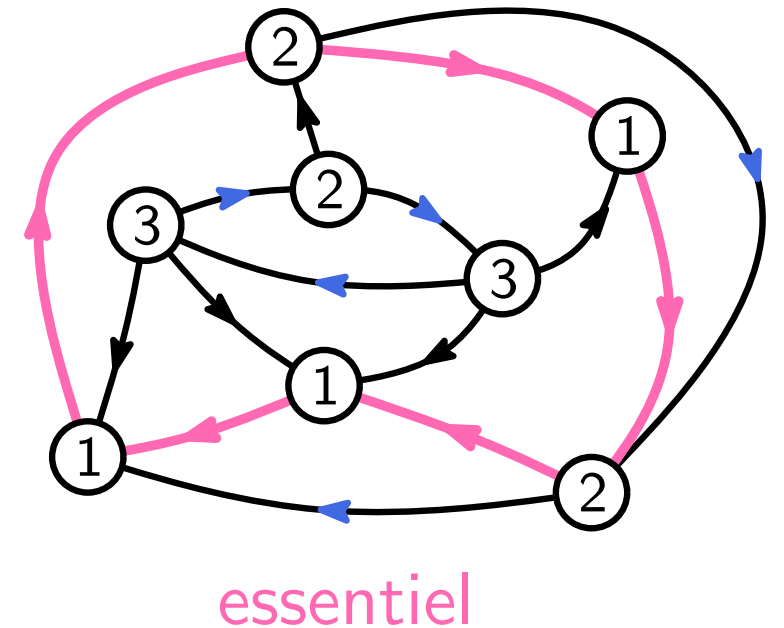
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



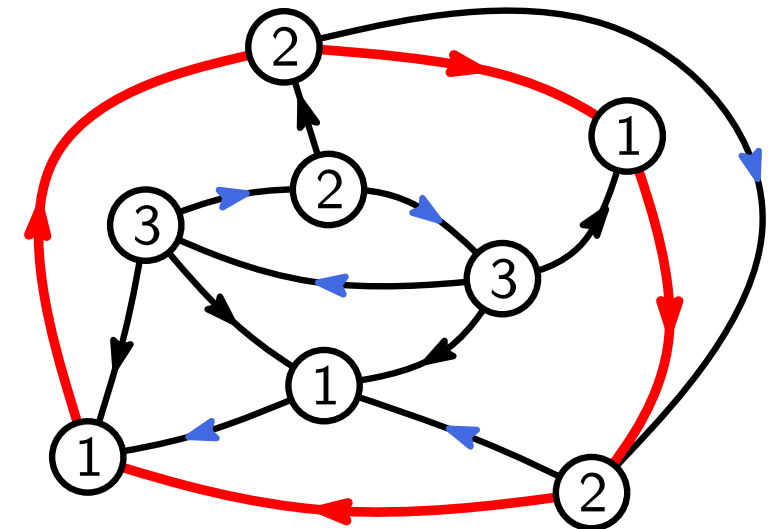
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles orientés.

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



non-essentiel

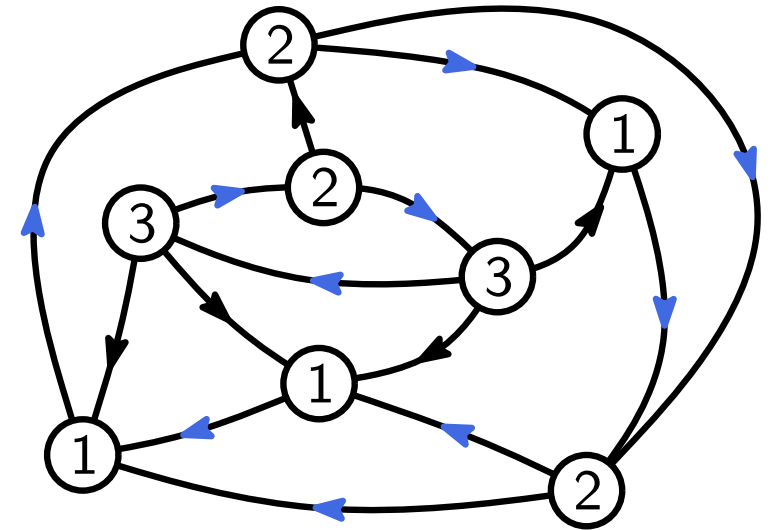
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



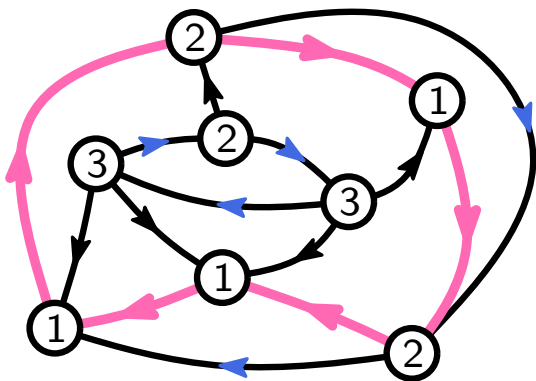
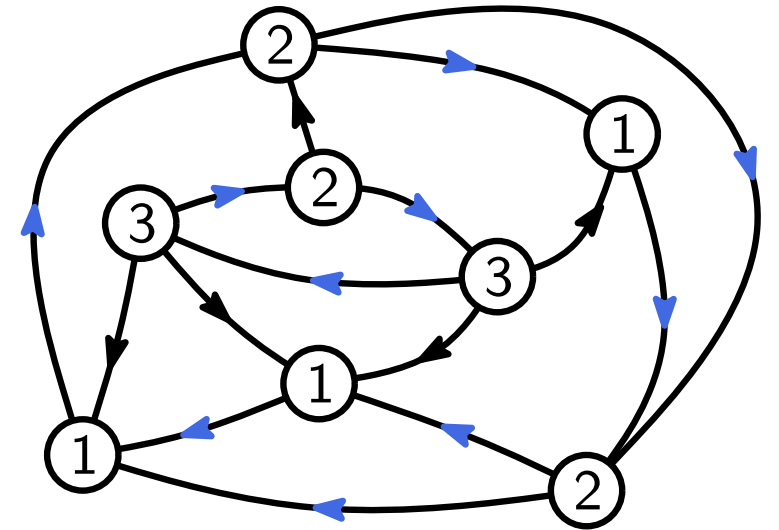
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

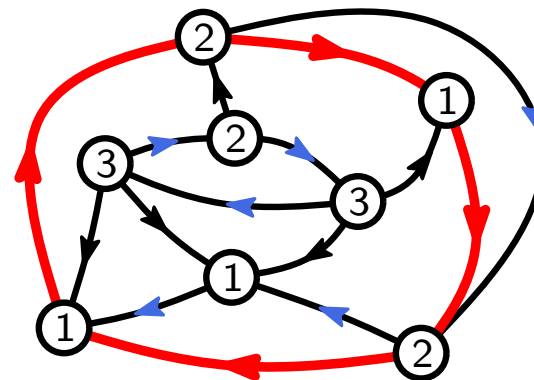
On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

Un cycle C est **essentiel** ssi :

- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



essentiel



non-essentiel

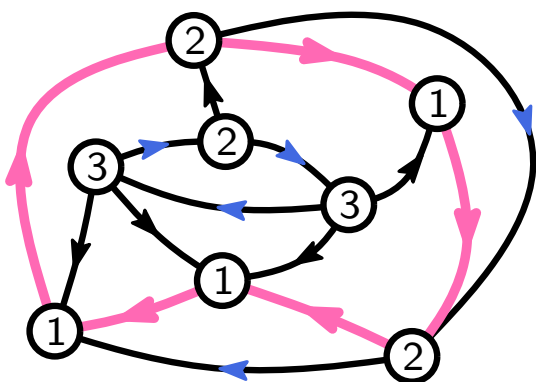
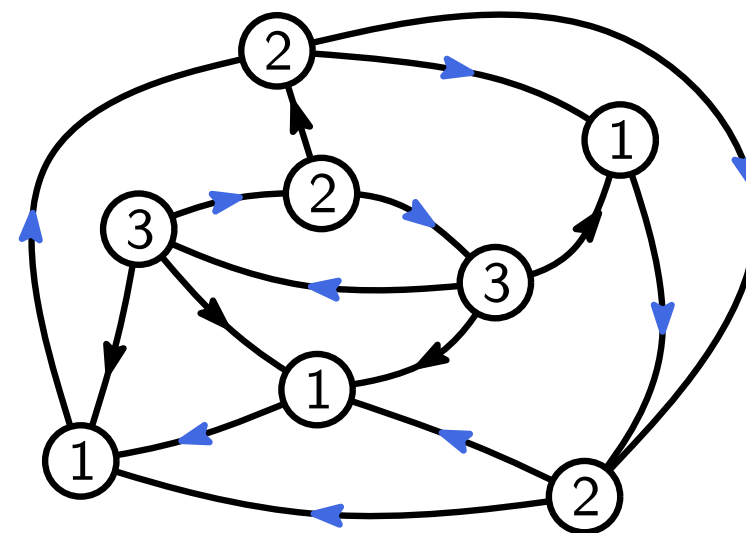
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

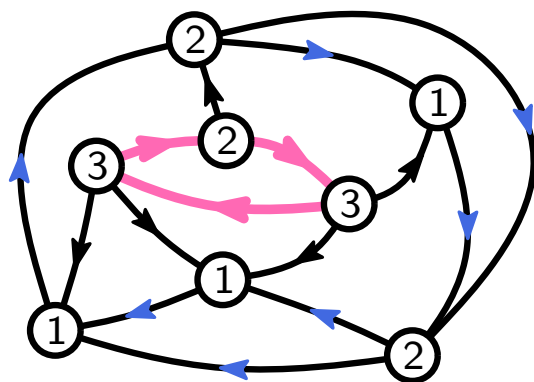
On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

Un cycle C est **essentiel** ssi :

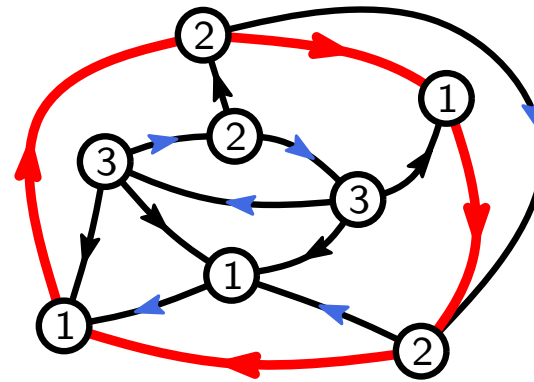
- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



essentiel



essentiel



non-essentiel

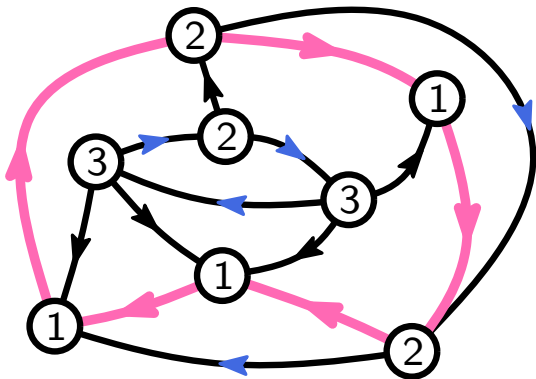
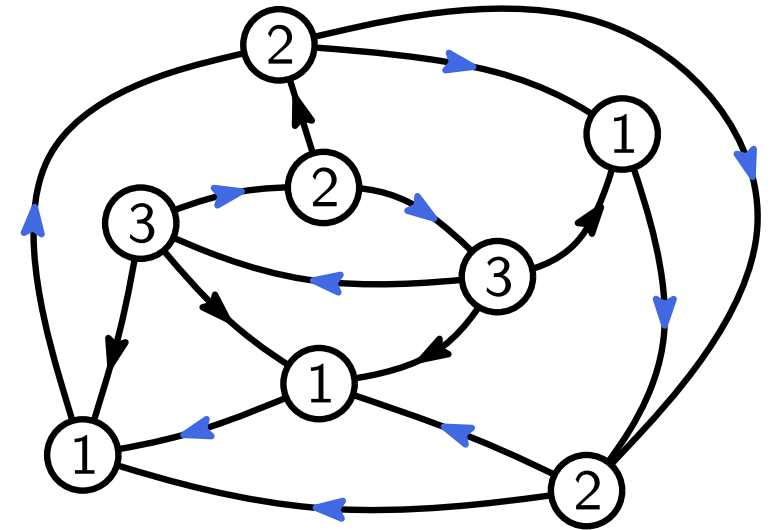
Cycles essentiels

Théorème (Felsner '04) :

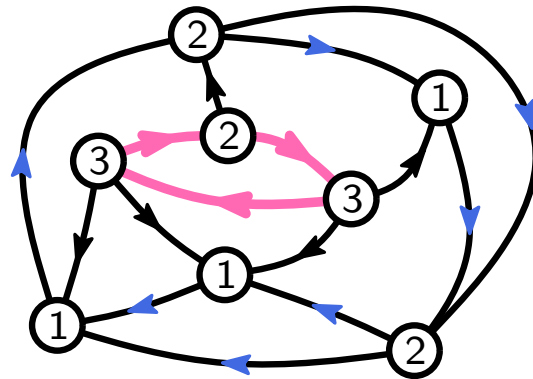
On peut passer d'une α -orientation à une autre par retournement de cycles **essentiels** orientés (= **flips/flops**).

Un cycle C est **essentiel** ssi :

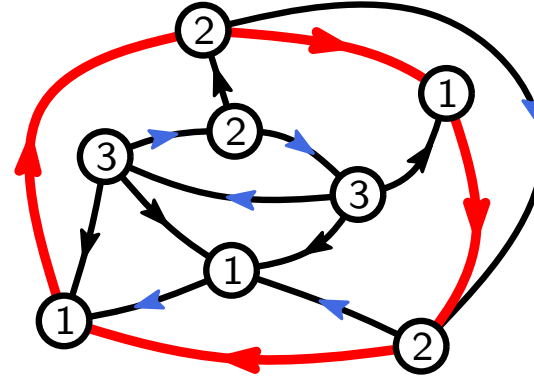
- C est simple et sans corde
- si $E_{\text{cut}}[I_C]$ est rigide ($I_C = \text{intérieur de } C$)
- il existe une α -orientation dans laquelle C est un cycle dirigé.



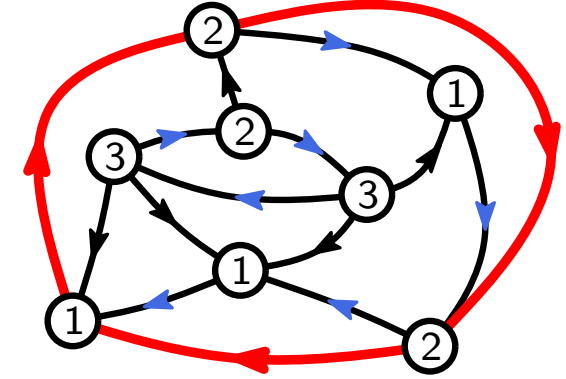
essentiel



essentiel

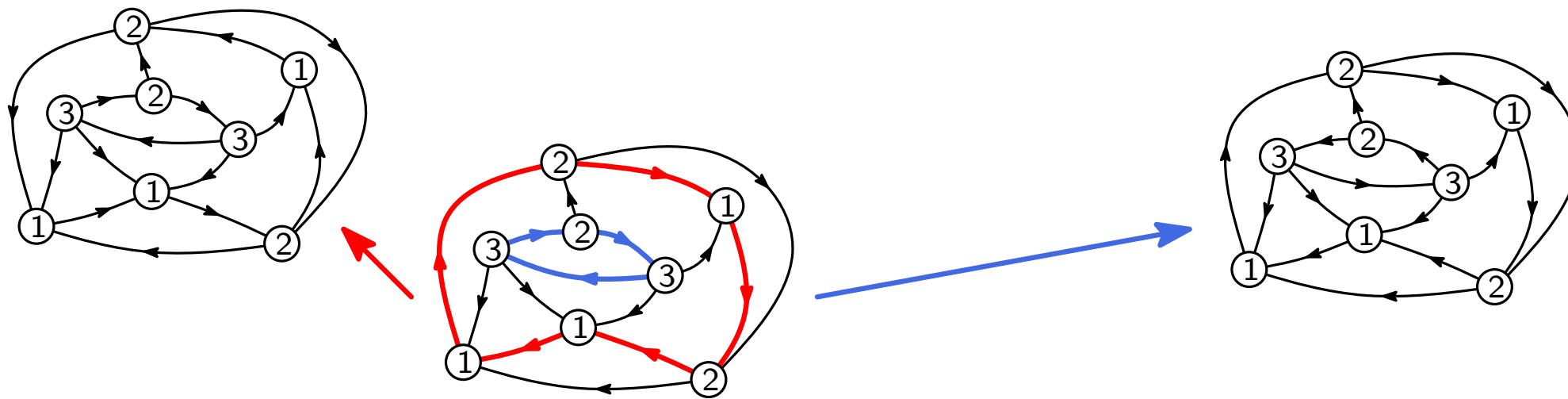


non-essentiel

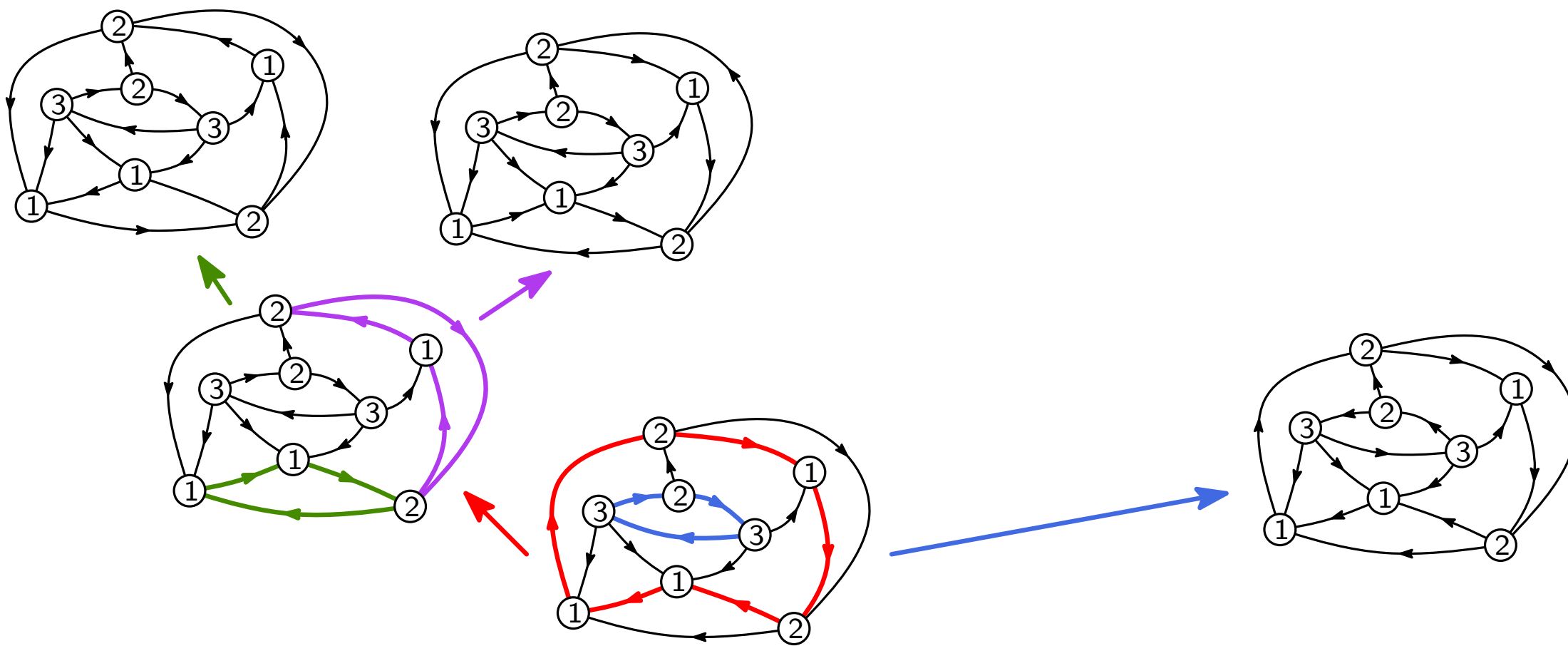


non-essentiel

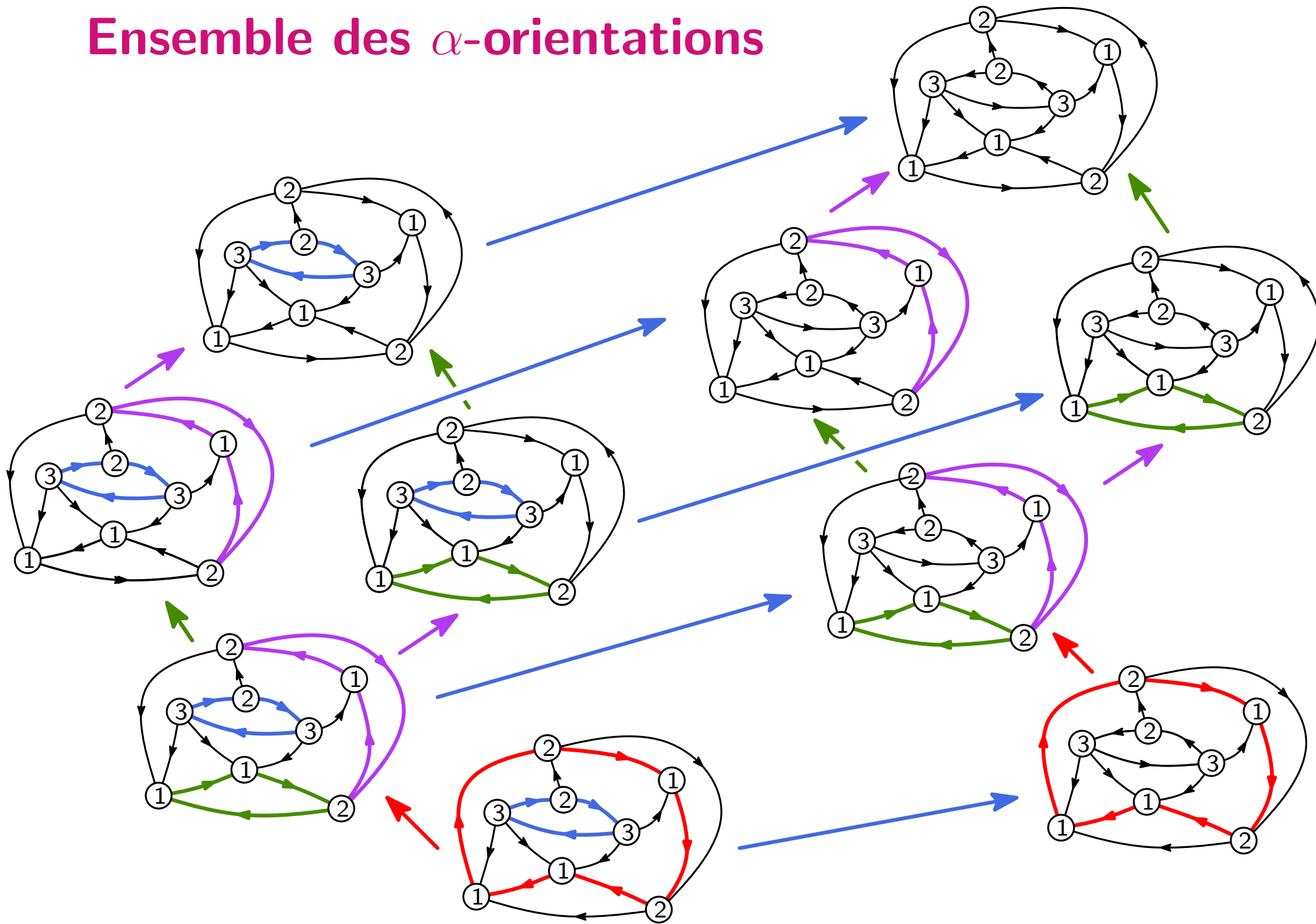
Ensemble des α -orientations



Ensemble des α -orientations



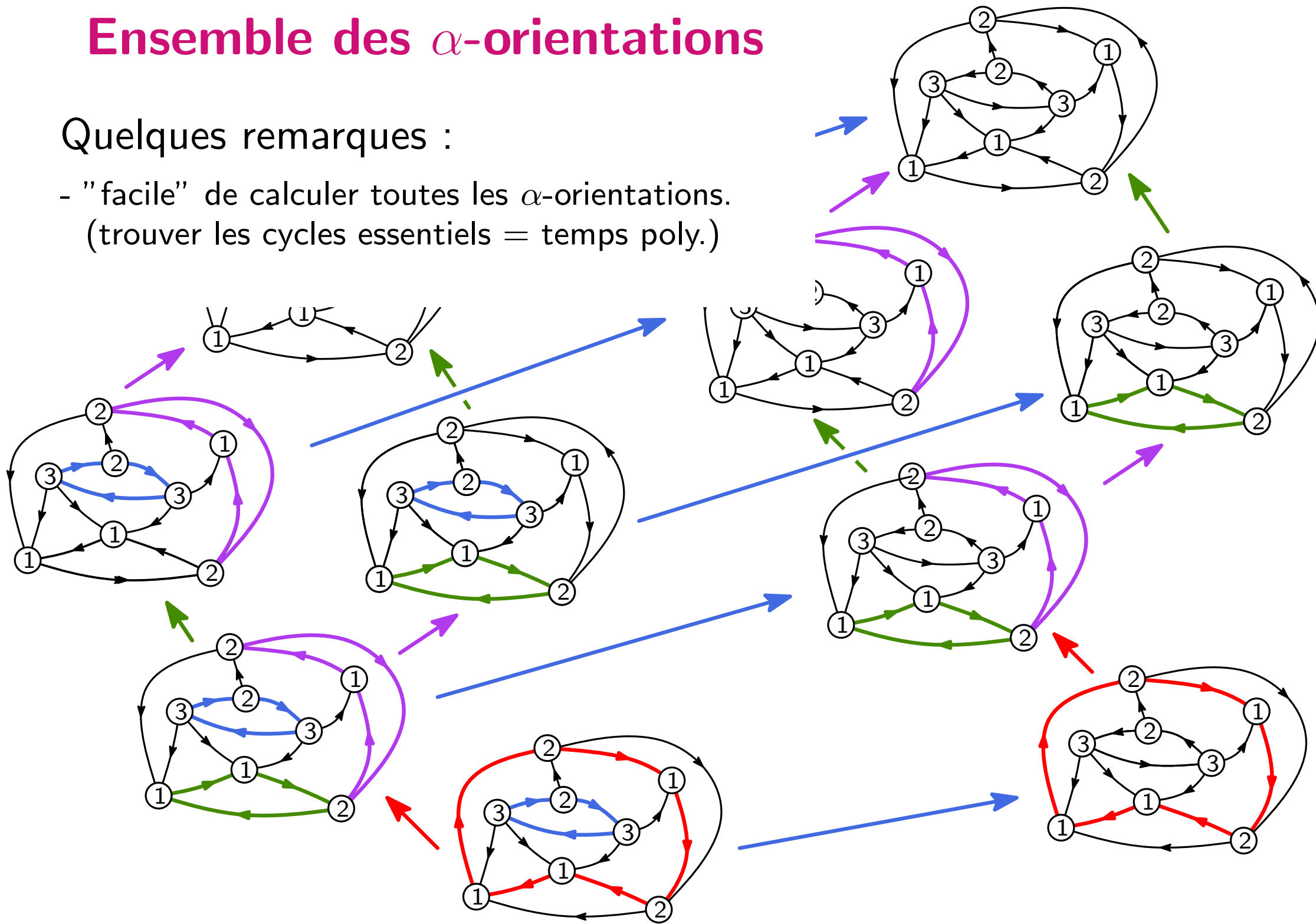
Ensemble des α -orientations



Ensemble des α -orientations

Quelques remarques :

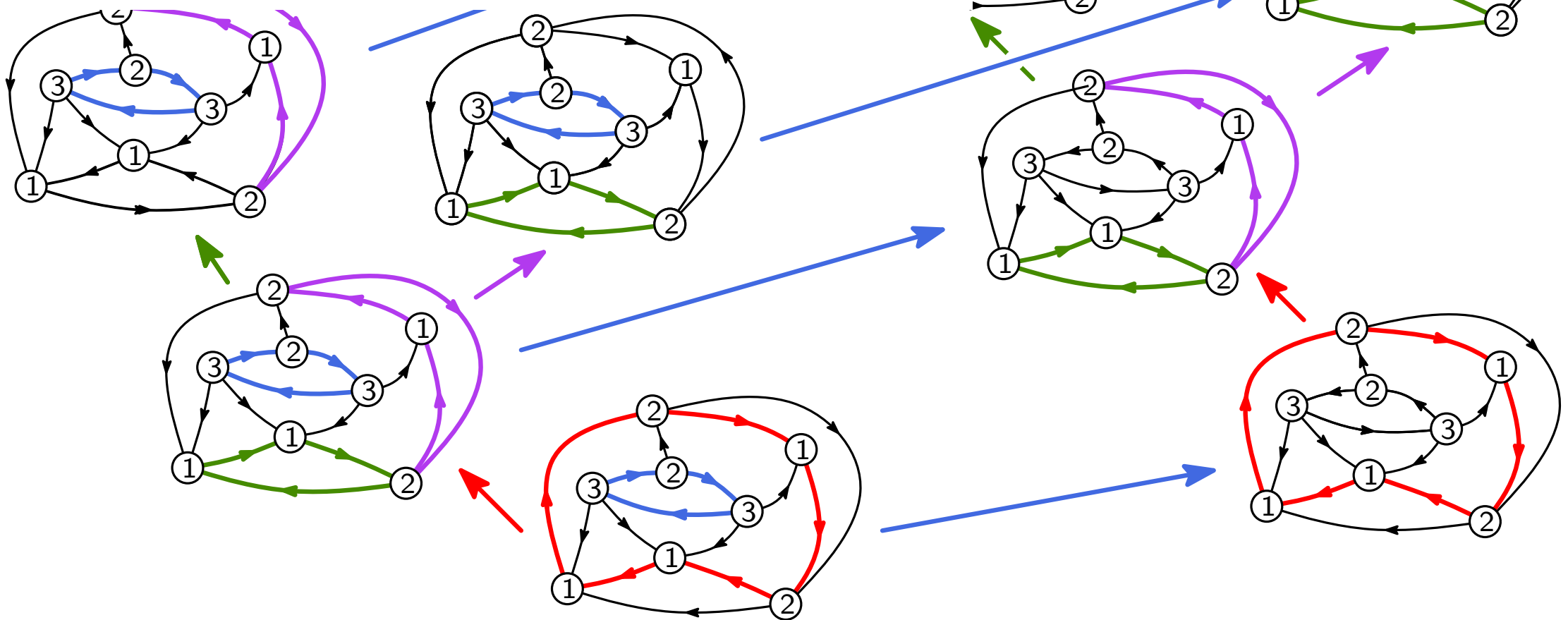
- "facile" de calculer toutes les α -orientations.
(trouver les cycles essentiels = temps poly.)



Ensemble des α -orientations

Quelques remarques :

- "facile" de calculer toutes les α -orientations.
(trouver les cycles essentiels = temps poly.)
- le retournement d'un cycle essentiel horaire en un cycle antihoraire induit une **relation d'ordre**.

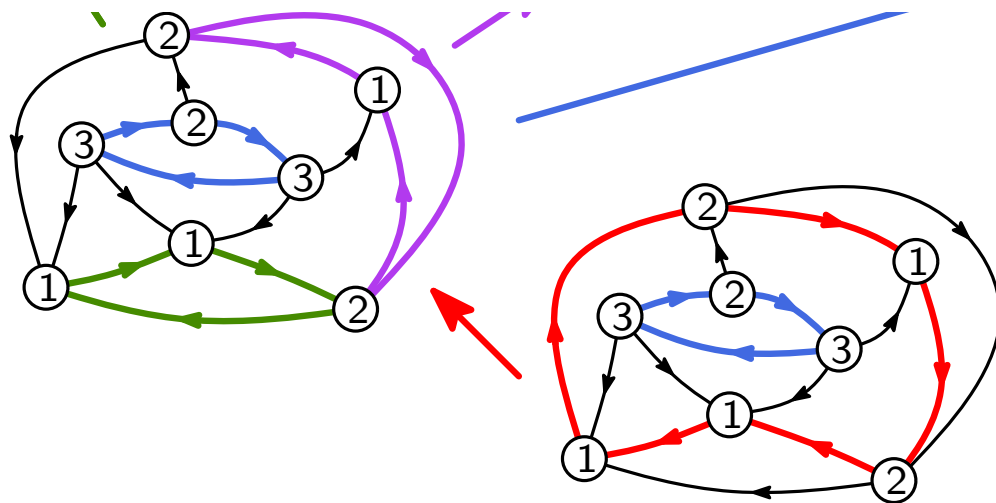
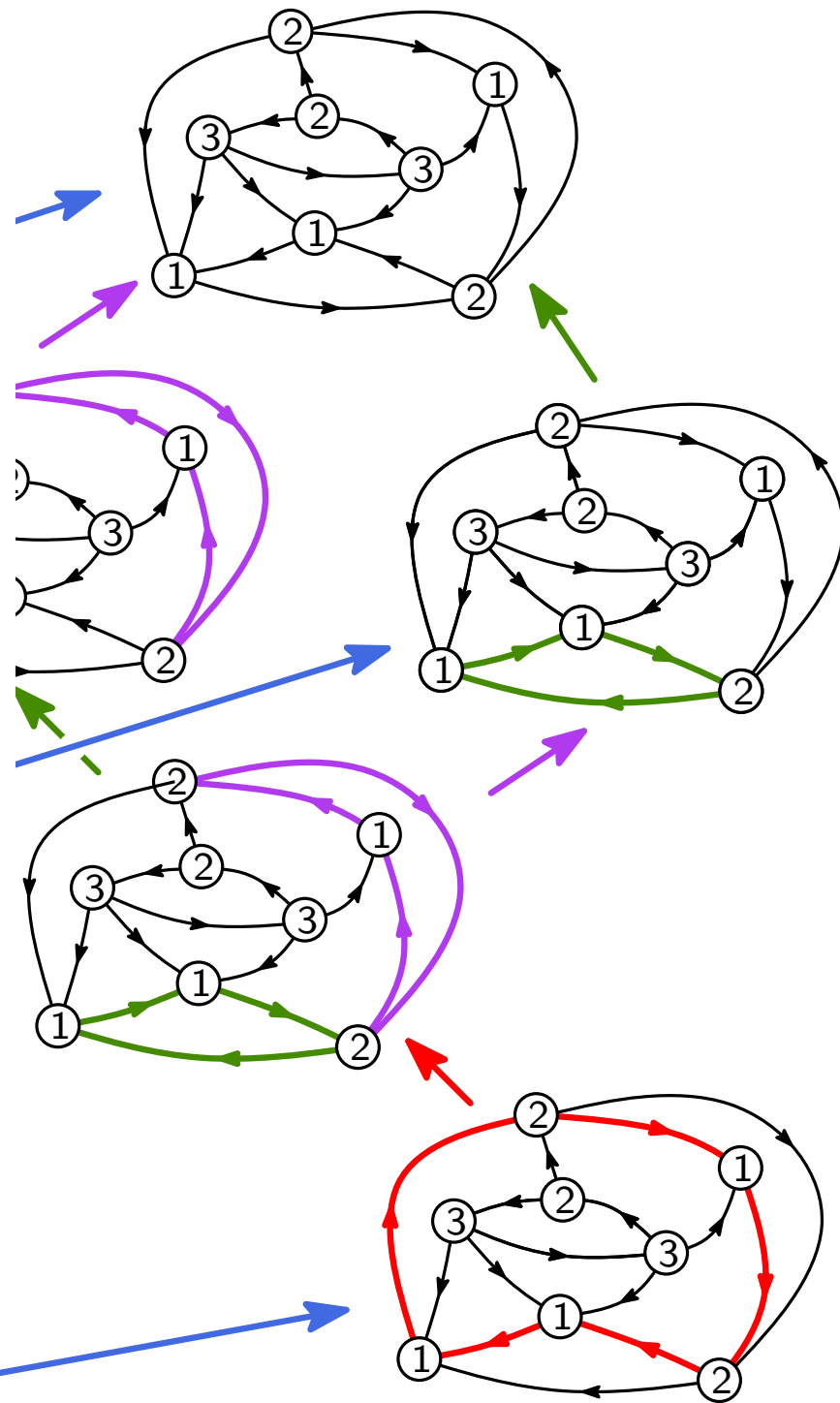
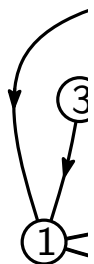


Ensemble des α -orientations

Théorème : (Felsner '04)

Muni de cette relation d'ordre, les α -orientations forment un **treillis** i.e. toute paire d'éléments admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Corollaire : Il existe un unique élément minimal (resp. maximal) qui n'a pas de cycle antihoraire (resp. horaire).



Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**

Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

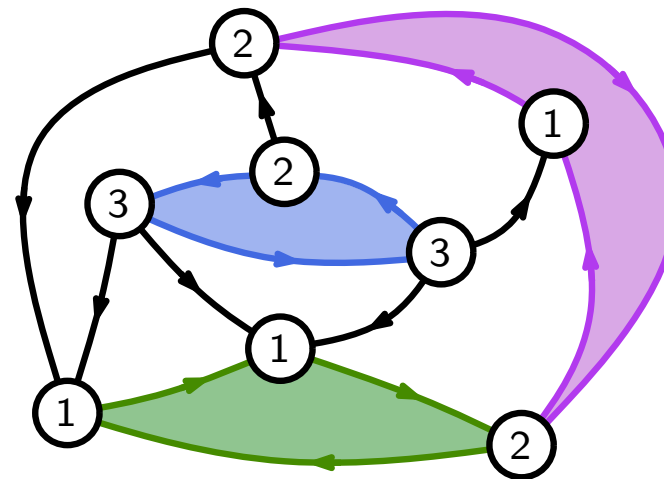
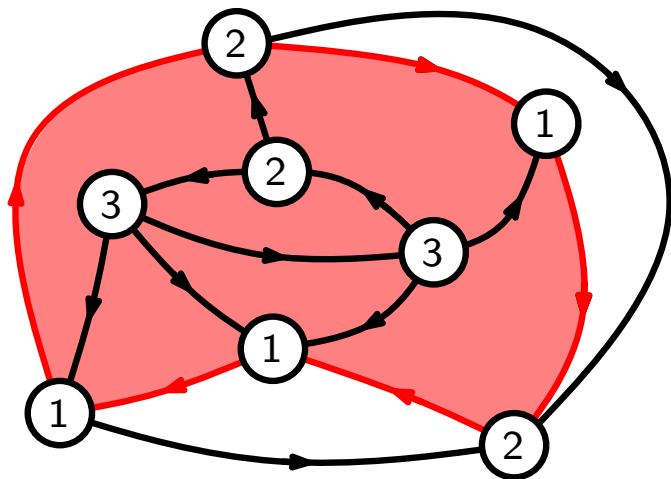
Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**

Propriété :

Une arête appartient au plus à deux cycles essentiels.
Les intérieurs de ces cycles sont disjoints.



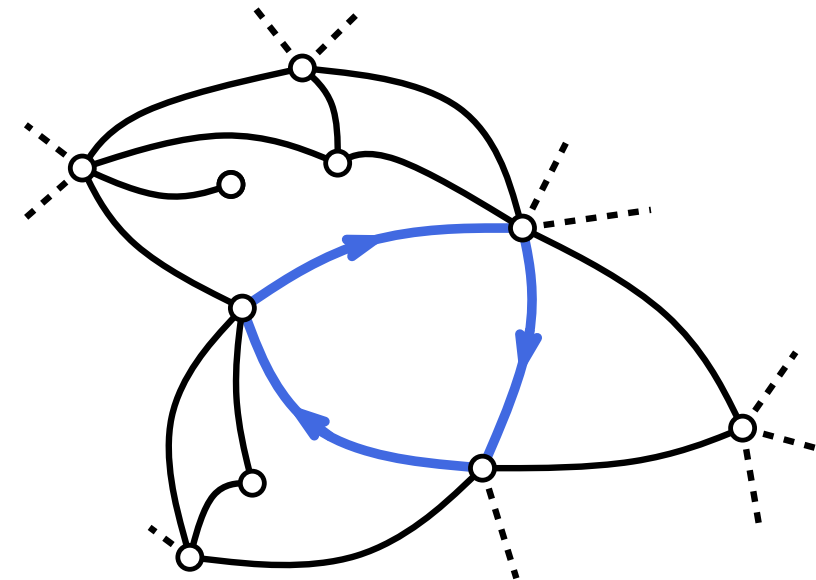
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



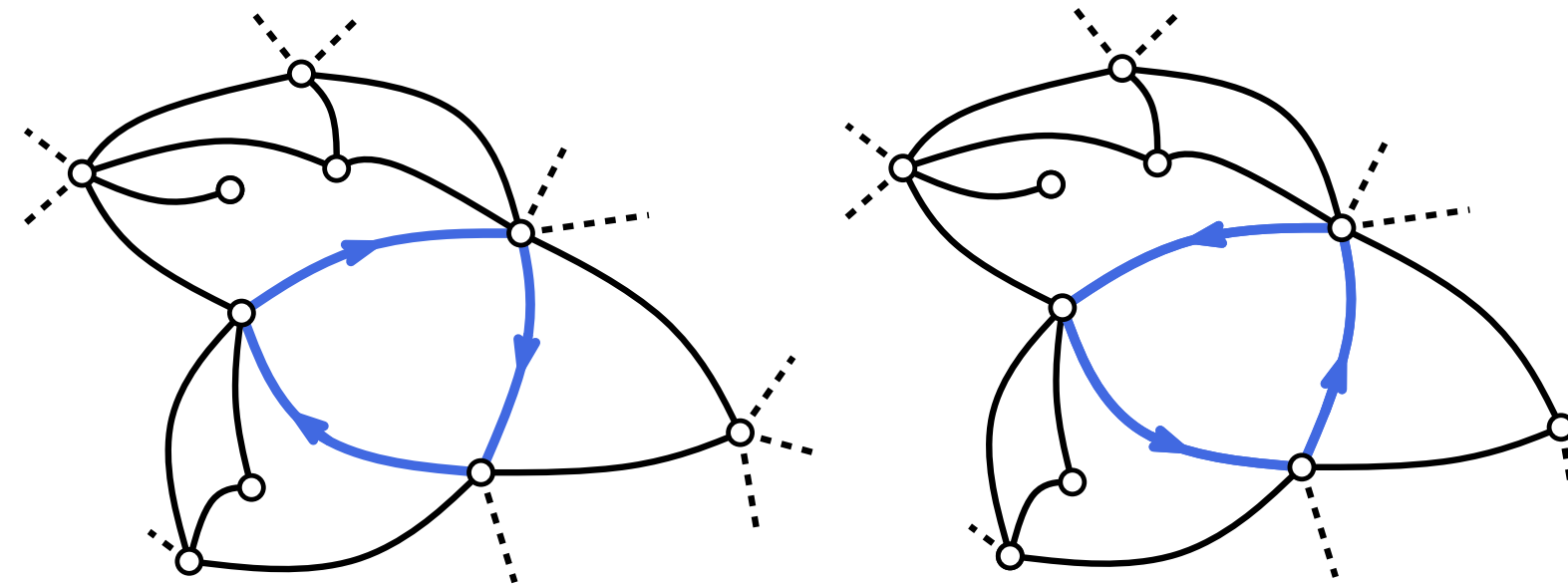
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



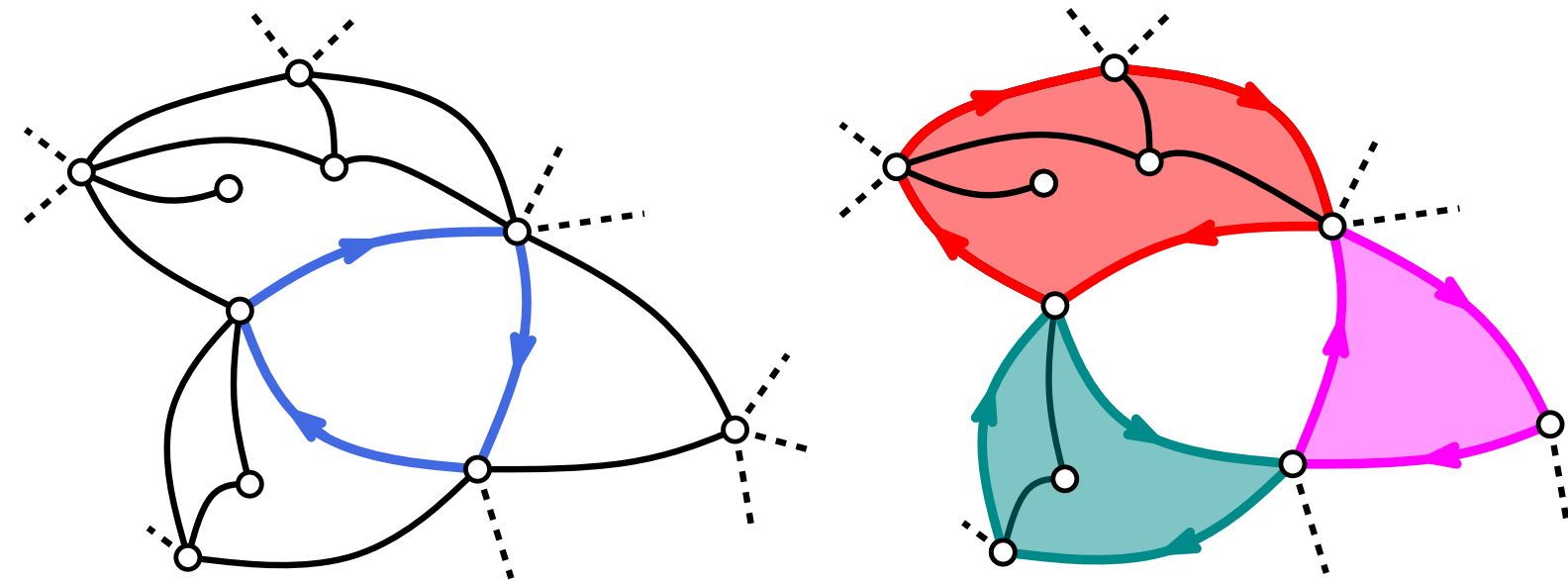
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes, il faut "flipper" chacune d'entre elles.

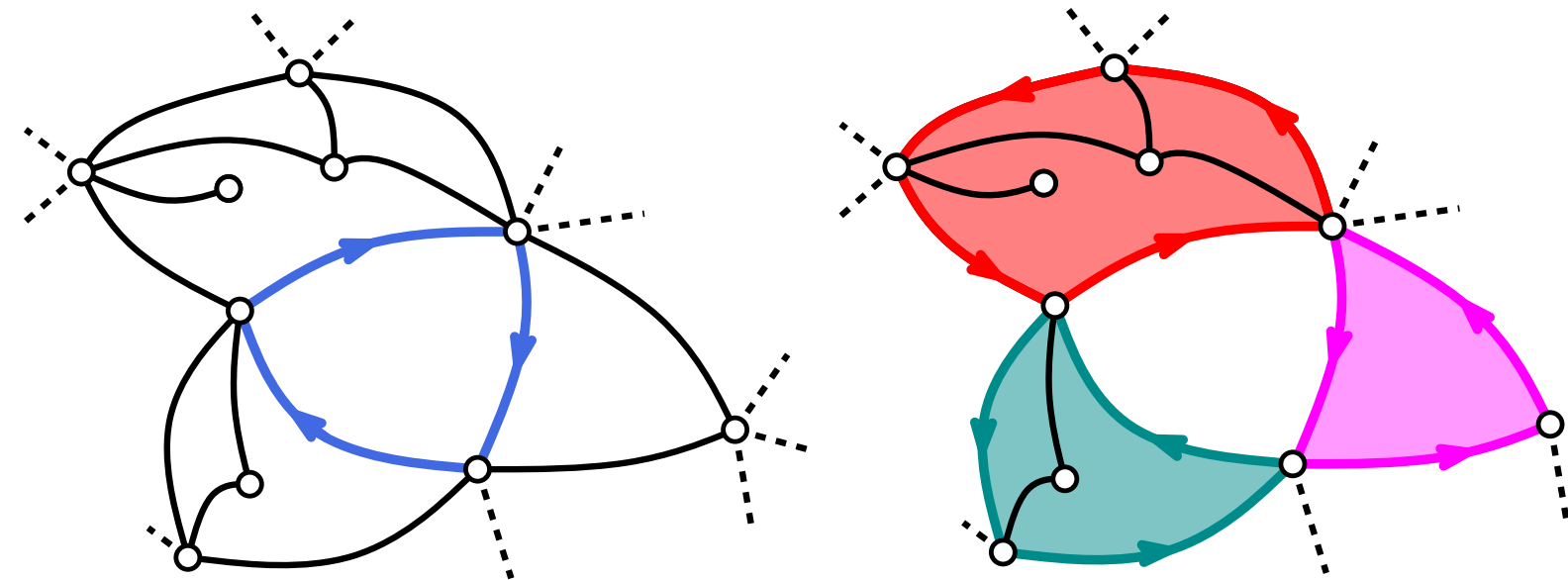
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes, il faut "flipper" chacune d'entre elles.

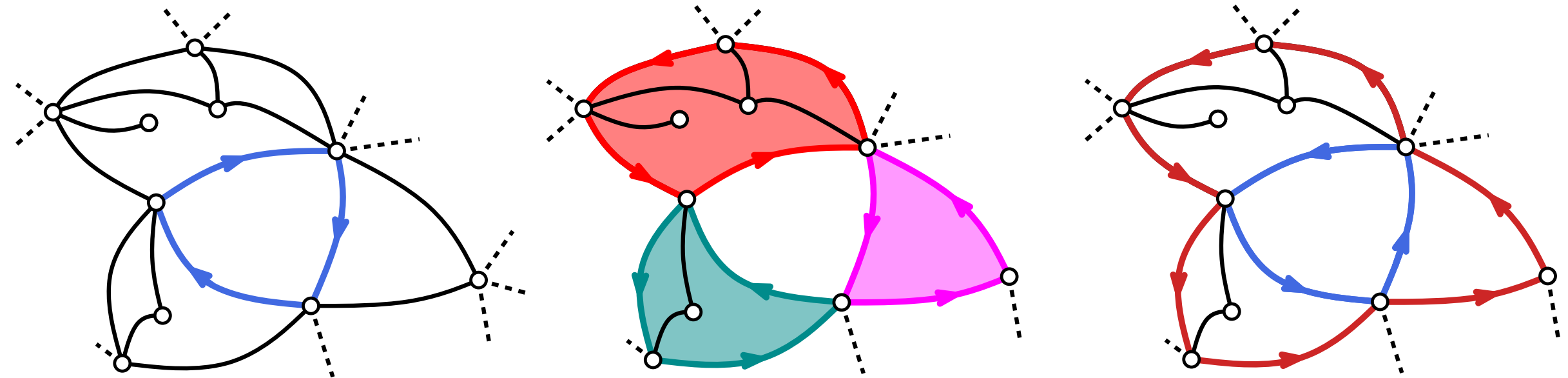
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Pour pouvoir refaire un flip sur ces arêtes, il faut "flipper" chacune d'entre elles.

Il faut "flipper" chacune des arêtes rouges etc etc ...

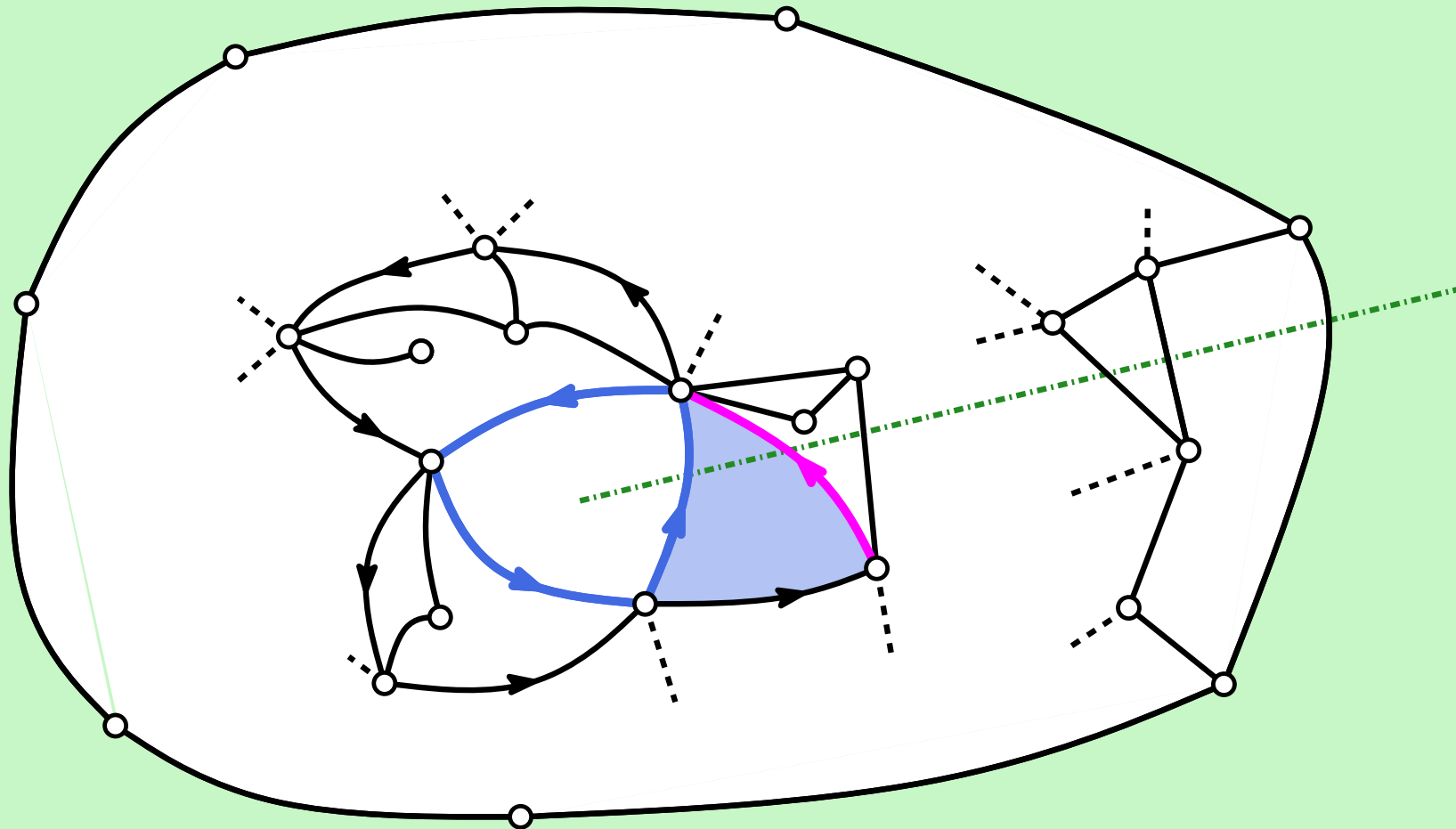
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



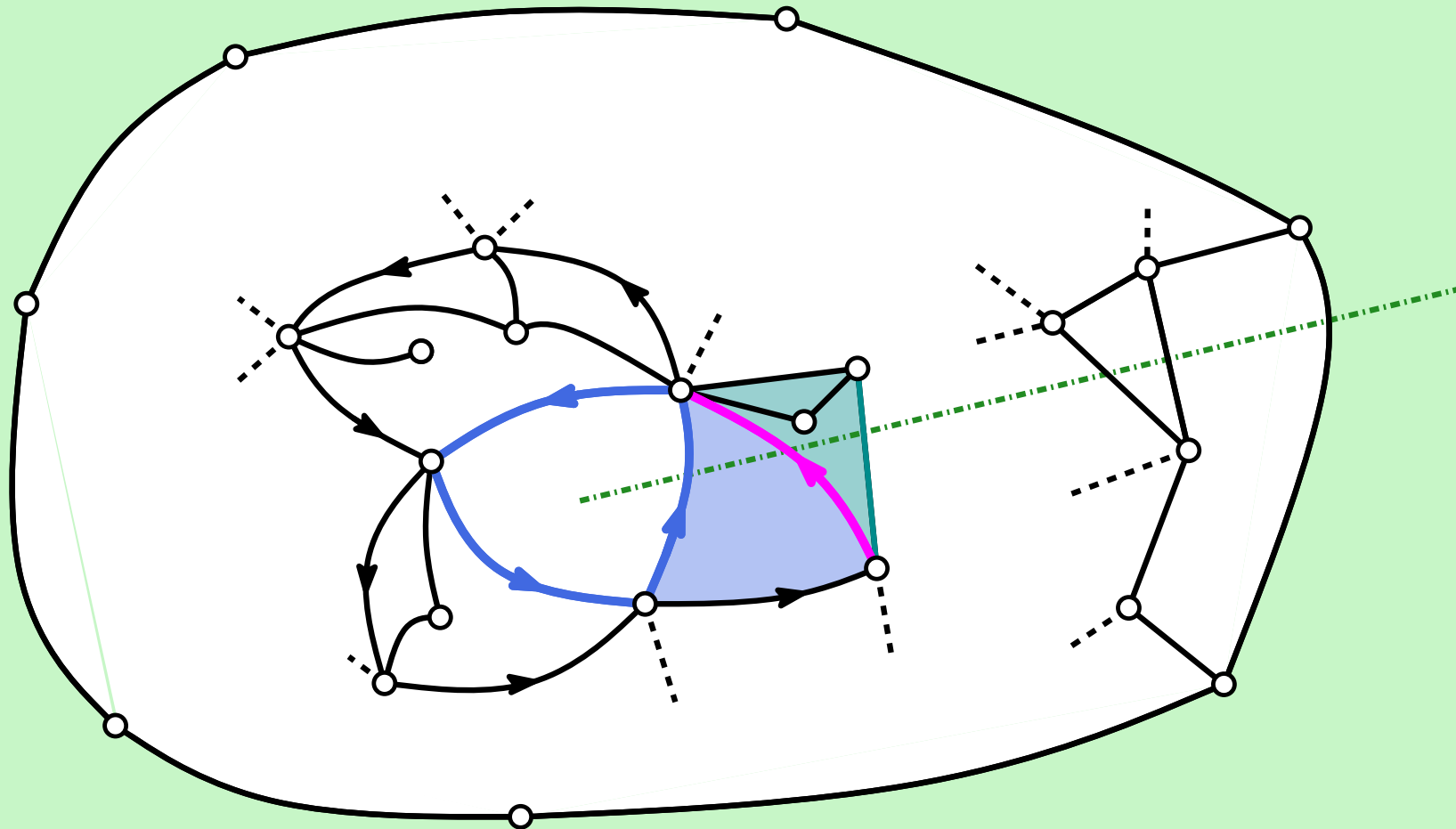
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



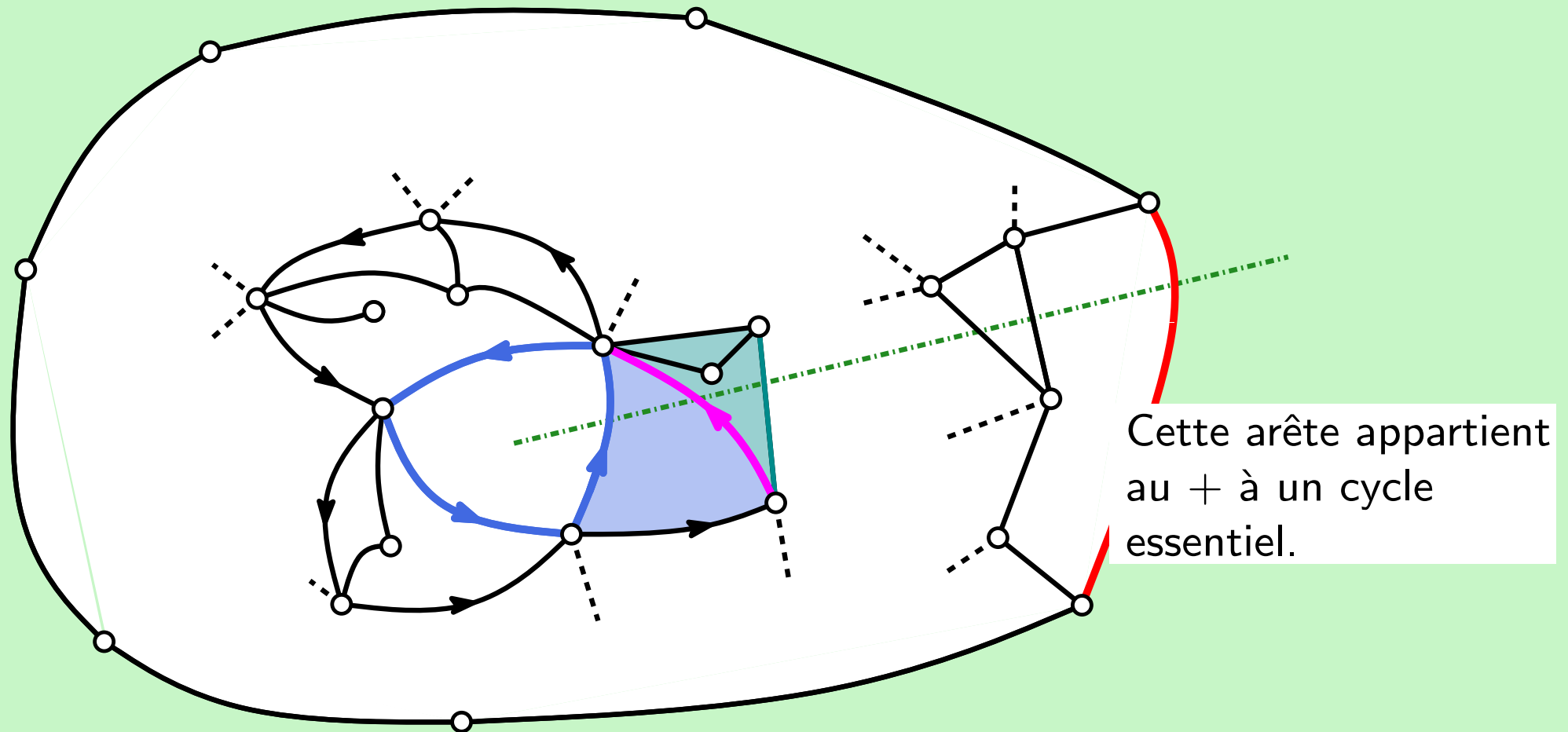
Existence d'un élément maximal

Théorème : (Felsner '04)

Pour tout α faisable, il existe une α -orientation sans cycle horaire.

flip = retournement d'un cycle **essentiel** du sens horaire au sens antihoraire.

Théorème \Leftrightarrow **il n'existe pas de suite infinie de flips.**



Résumé

- Étant donnée une carte plane M et une fonction $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$, une α -orientation est une orientation des arêtes de M telle que pour tout sommet v , $\text{out}(v) = \alpha(v)$.
- S'il existe une α -orientation, on dit que α est faisable. Il est **facile** de décider si α est faisable.
- On peut passer d'une α -orientation à une autre en retournant des cycles et même en ne retournant que des cycles **essentiels**.
- Le retournement de cycles essentiels induit une structure de **treillis**. Notamment, il existe une unique α -orientation sans cycle horaire et une unique α -orientation sans cycle antihoraire.

Résumé

- Étant donnée une carte plane M et une fonction $\alpha : V(M) \rightarrow \mathbb{N}$, une α -orientation est une orientation des arêtes de M telle que pour tout sommet v , $\text{out}(v) = \alpha(v)$.
- S'il existe une α -orientation, on dit que α est faisable. Il est **facile** de décider si α est faisable.
- On peut passer d'une α -orientation à une autre en retournant des cycles et même en ne retournant que des cycles **essentiels**.
- Le retournement de cycles essentiels induit une structure de **treillis**. Notamment, il existe une unique α -orientation sans cycle horaire et une unique α -orientation sans cycle antihoraire.

La suite : ce soir ...

Merci !