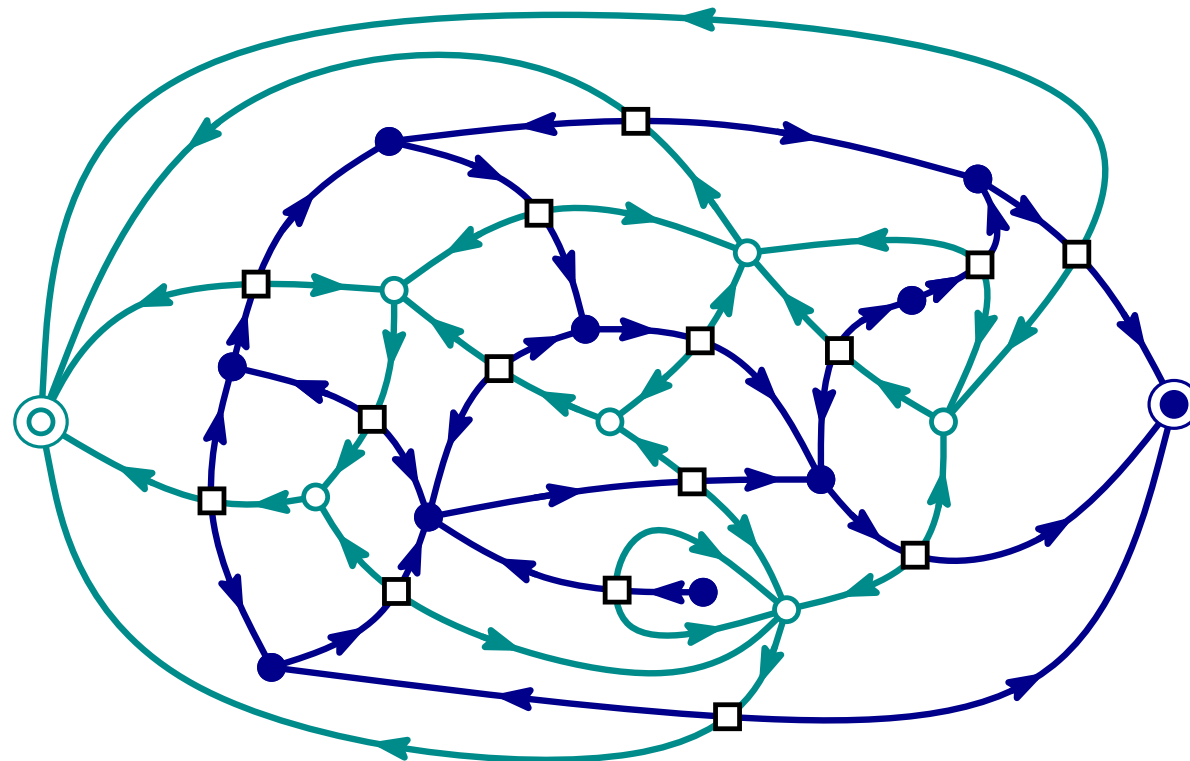


INTRODUCTION AUX ORIENTATIONS DE CARTES ET QUELQUES APPLICATIONS BIJECTIVES

Journées ALEA 2014
Mini-cours – Deuxième séance



Marie Albenque (CNRS, LIX, École Polytechnique)

Plan

Hier : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Quelques définitions : cartes, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Plan

Hier : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Quelques définitions : cartes, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

Hier soir : séances d'exercices

Autour des triangulations simples.

Plan

Hier : Construction d'orientations, existence, unicité

- 1 - Quelques définitions : cartes, orientations.
- 2 - Existence d'orientations
- 3 - Flip et flop : treillis des orientations.

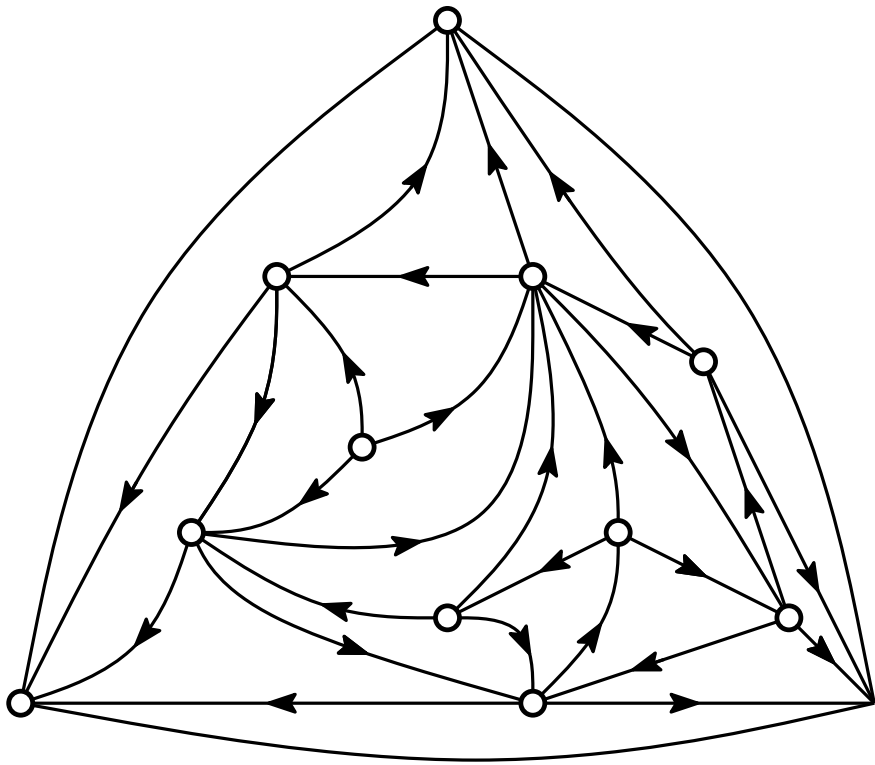
Hier soir : séances d'exercices

Autour des triangulations simples.

Maintenant : Application des orientations : dessins, couplages, bijections

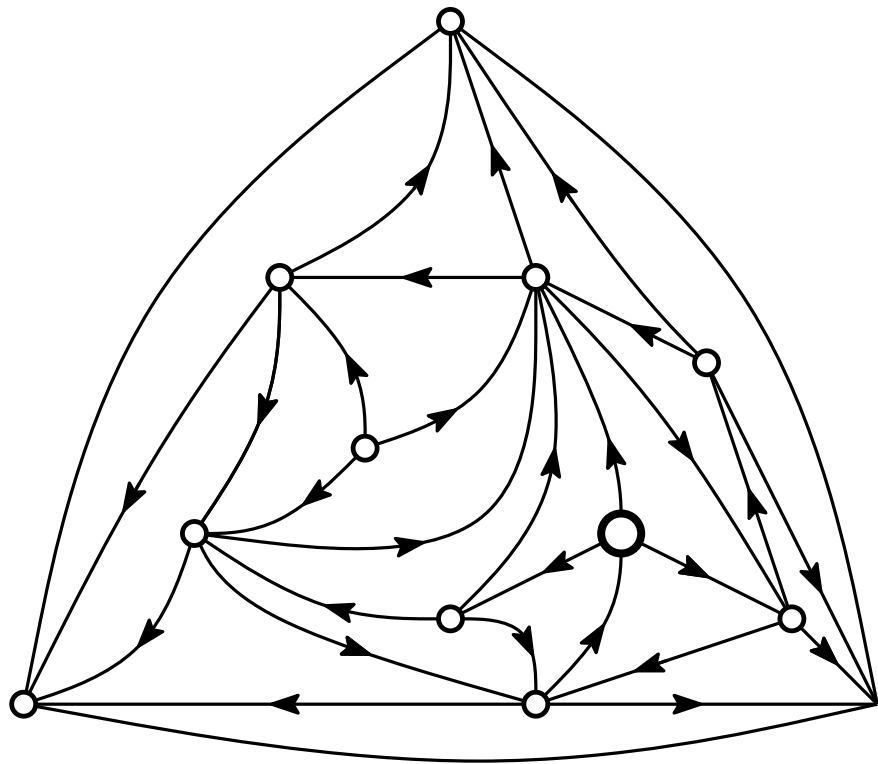
- 1 - Schnyder woods et dessins de cartes.
- 2 - Treillis des arbres couvrants et couplages.
- 3 - Orientations et arbres bourgeonnants

Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)



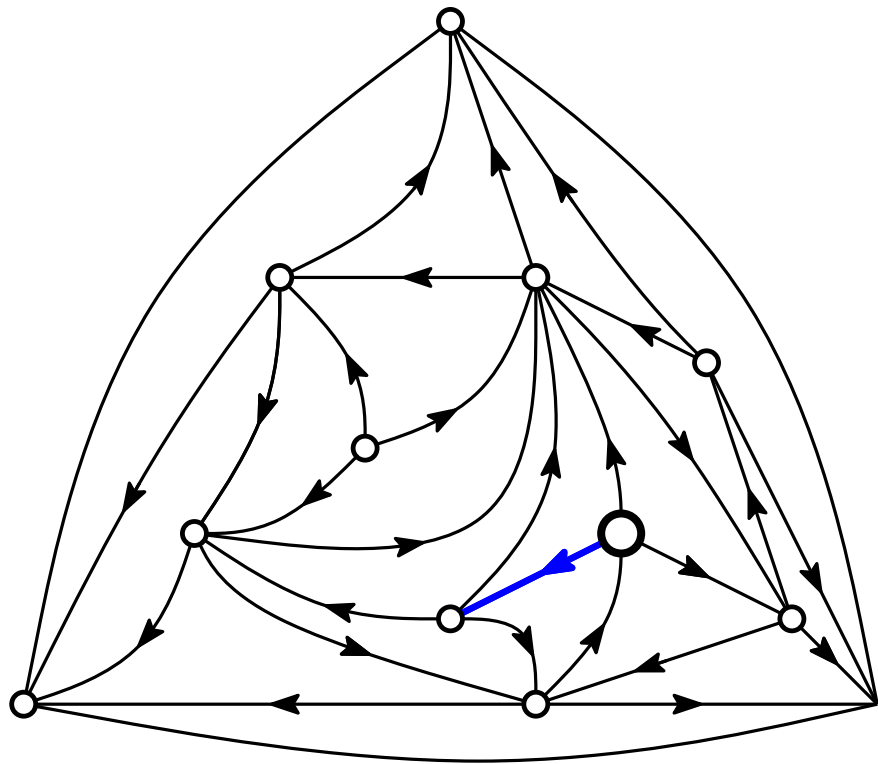
Triangulation simple munie d'une
3-orientation (quelconque).

Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)



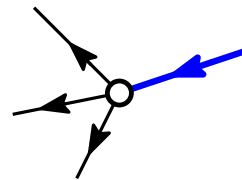
Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")

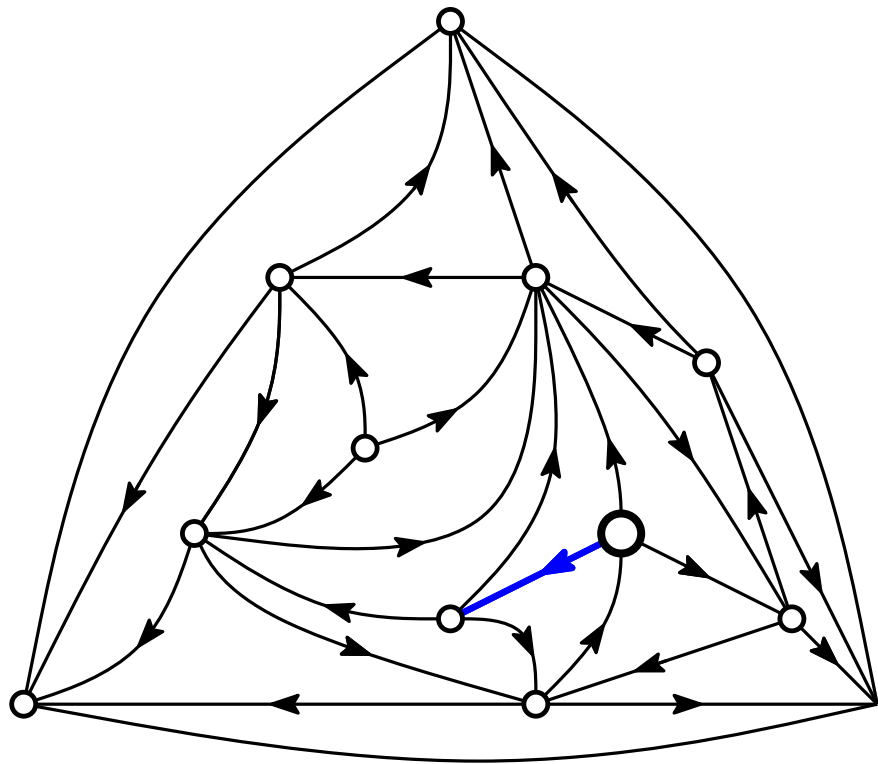


Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins "milieux" :

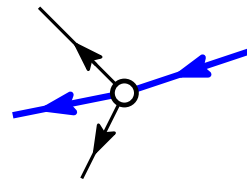


Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")

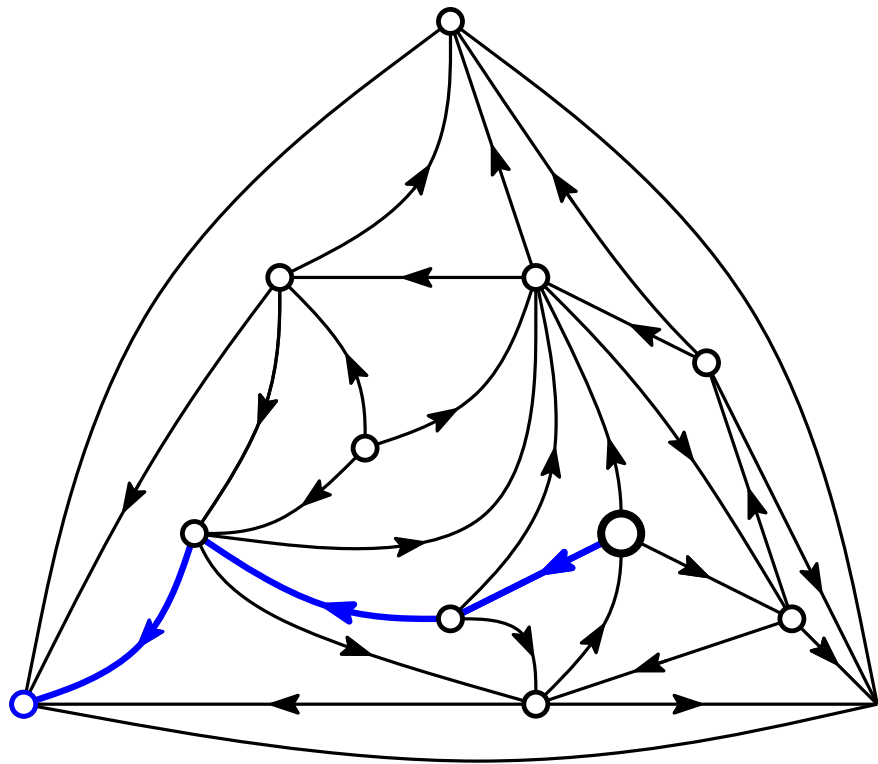


Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins "milieux" :

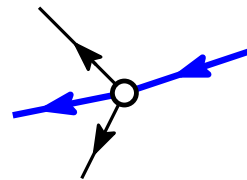


Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")

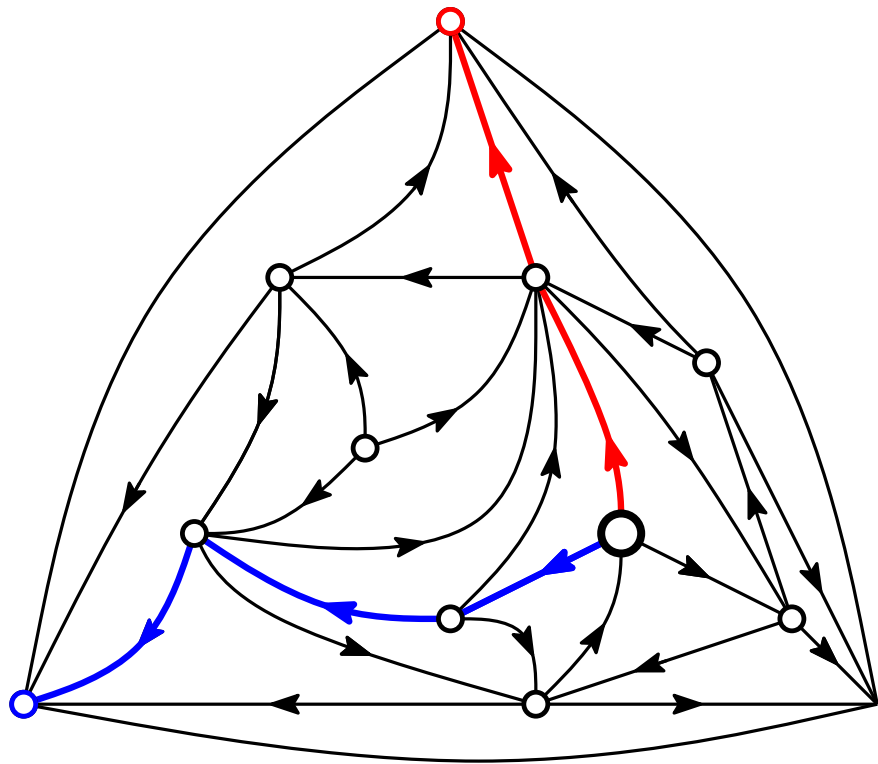


Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins "milieux" :

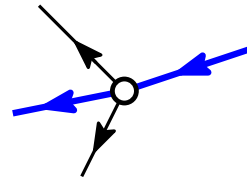


Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")



Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

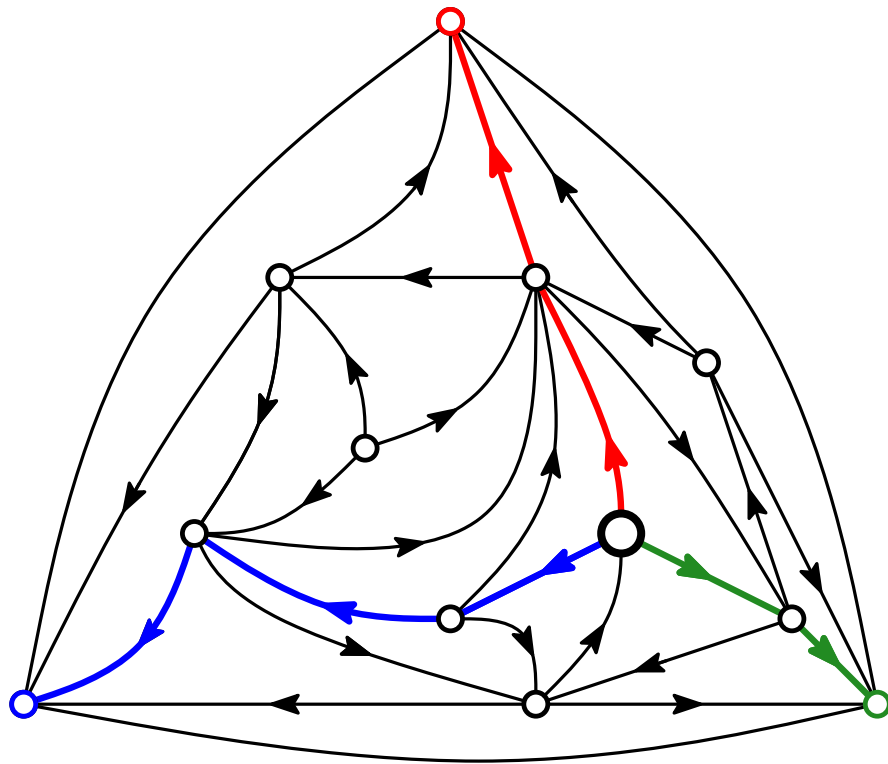
On considère les chemins "milieux" :



Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")

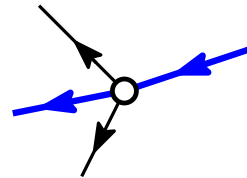
Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s'intersectent pas.



Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

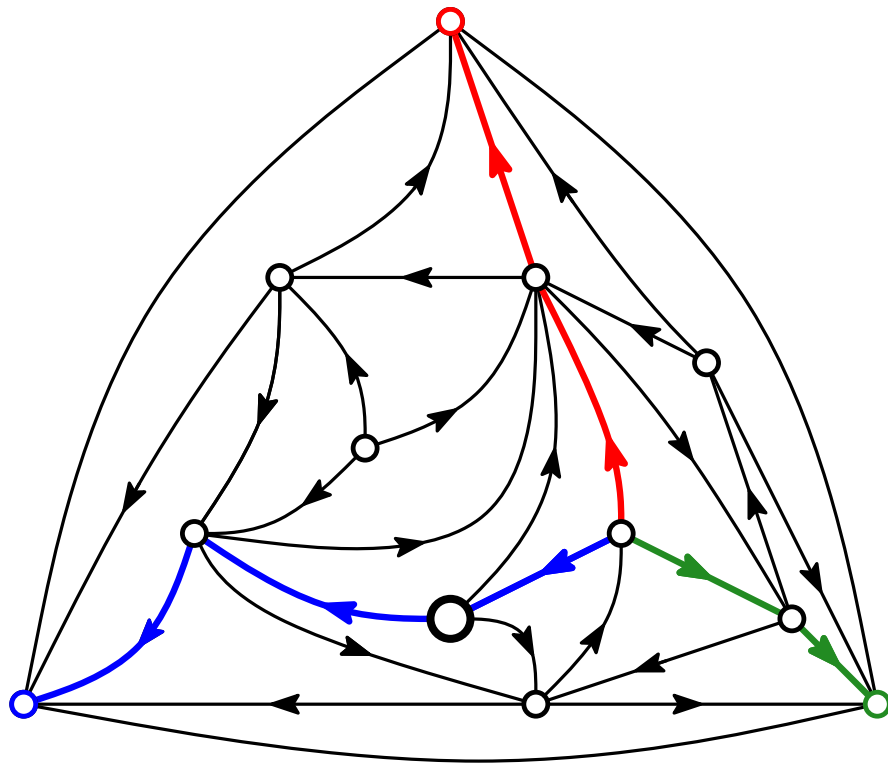
On considère les chemins "milieux" :



Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)

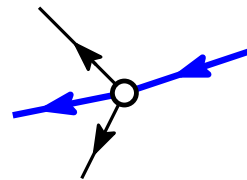
Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s’intersectent pas.



Triangulation simple munie d’une 3-orientation (quelconque).

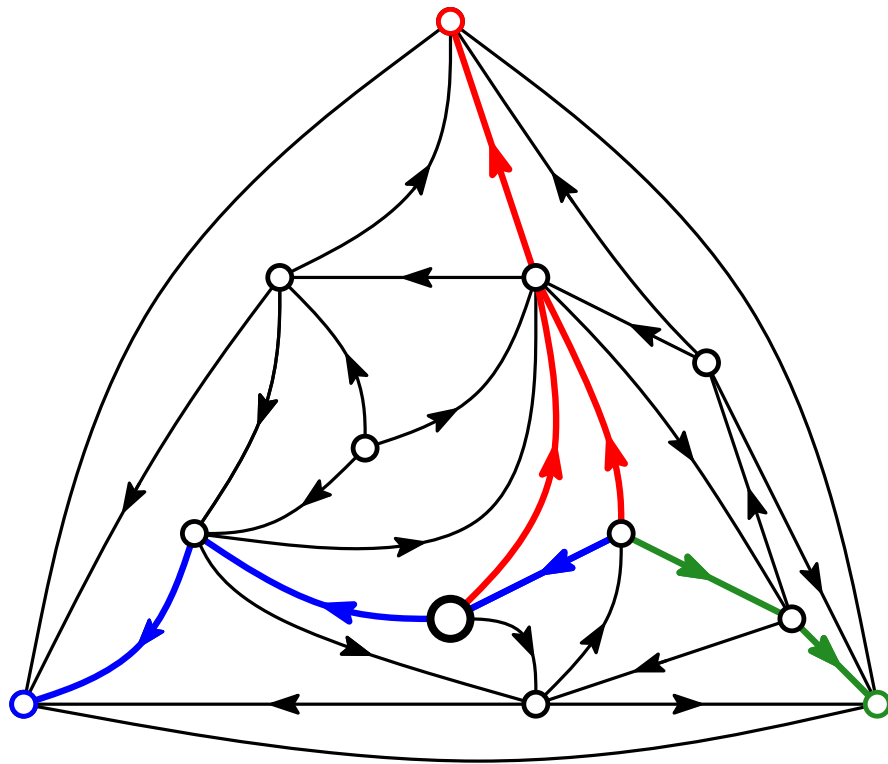
On considère les chemins “milieux” :



Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)

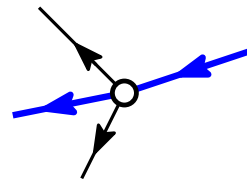
Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s’intersectent pas.



Triangulation simple munie d’une 3-orientation (quelconque).

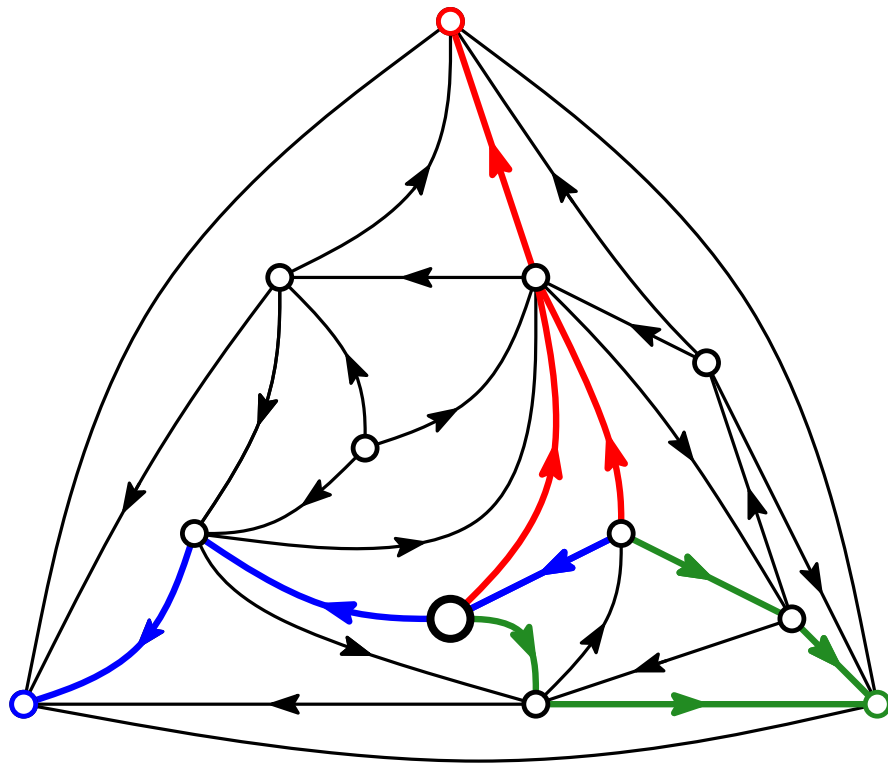
On considère les chemins “milieux” :



Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)

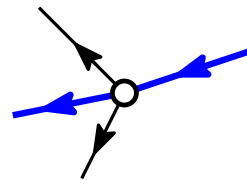
Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s’intersectent pas.



Triangulation simple munie d’une 3-orientation (quelconque).

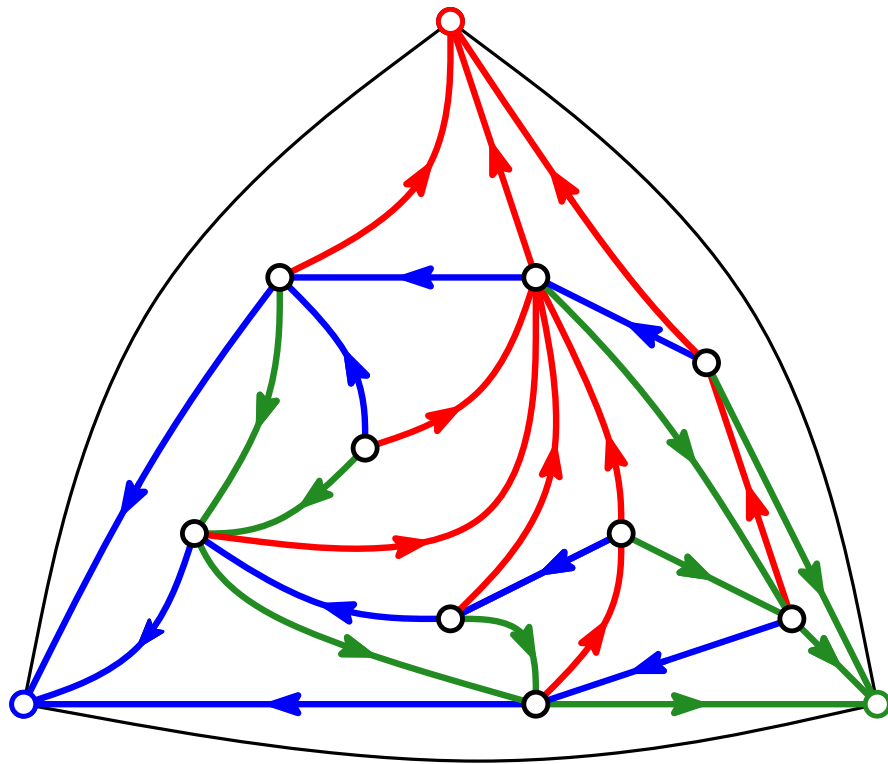
On considère les chemins “milieux” :



Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")

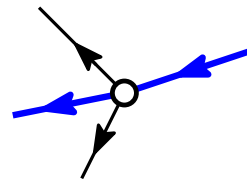
Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s'intersectent pas.

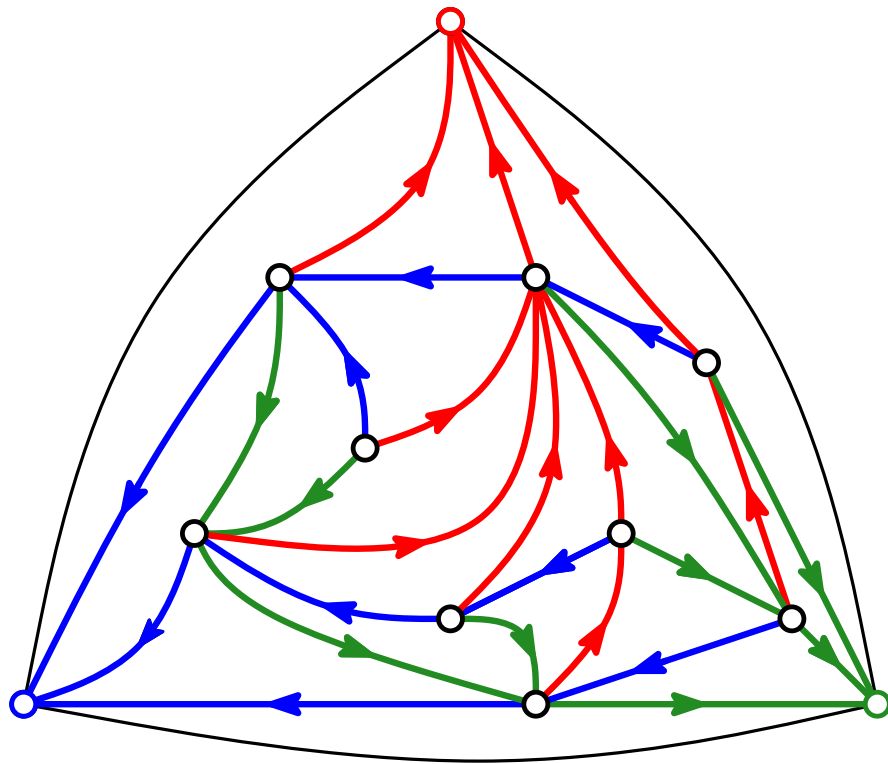


Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins "milieux" :



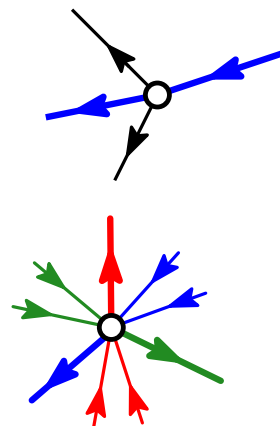
Bois de Schnyder (= "Schnyder woods")



Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins "milieux" :

Autour de chaque sommet interne :



Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s'intersectent pas.

Propriété :

Les arêtes d'une couleur fixée forment un arbre couvrant les sommets internes de la triangulation.

Ce coloriage s'appelle un **Schnyder wood**.

[Schnyder '89]

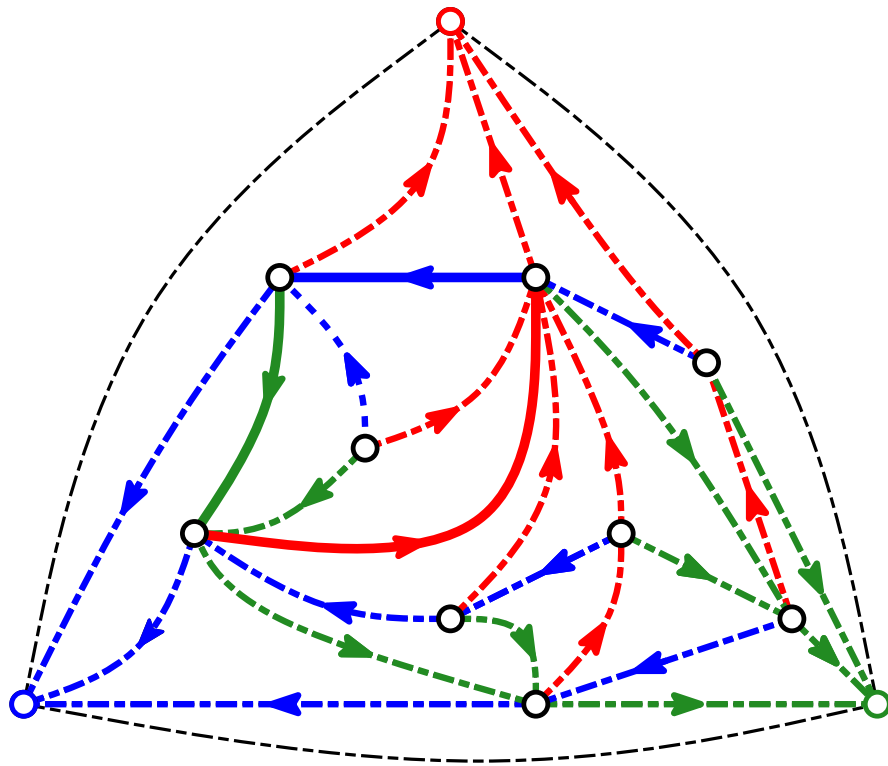
Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)

Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s’intersectent pas.

Propriété :

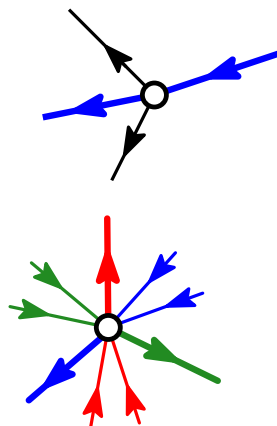
Les arêtes d’une couleur fixée forment un arbre couvrant les sommets internes de la triangulation.



Triangulation simple munie d’une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins “milieux” :

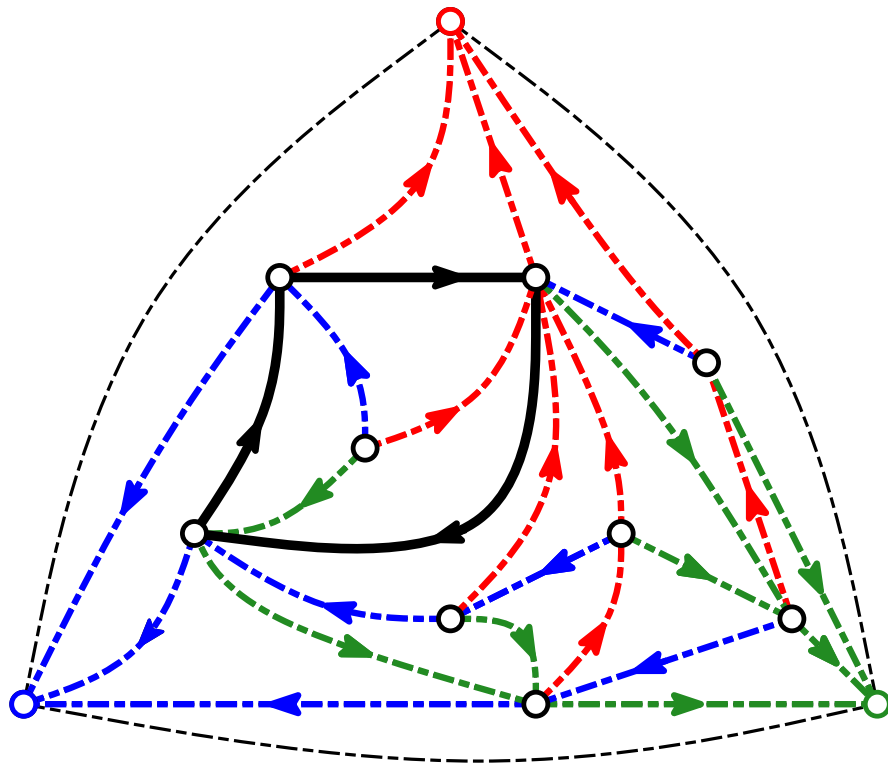
Autour de chaque sommet interne :



Ce coloriage s’appelle un **Schnyder wood**.

[Schnyder '89]

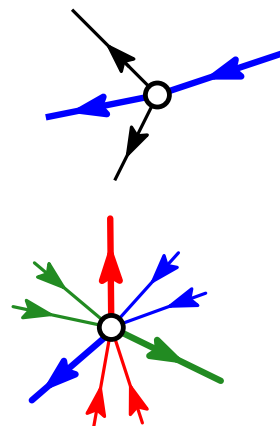
Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)



Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins “milieux” :

Autour de chaque sommet interne :



Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitatants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s'intersectent pas.

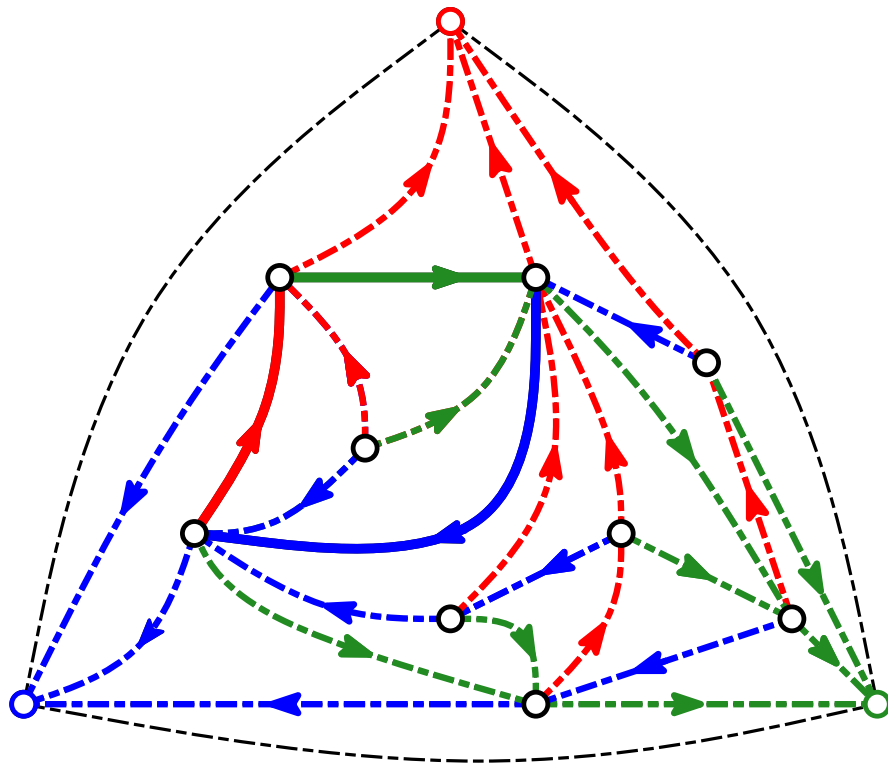
Propriété :

Les arêtes d'une couleur fixée forment un arbre couvrant les sommets internes de la triangulation.

Ce coloriage s'appelle un **Schnyder wood**.

[Schnyder '89]

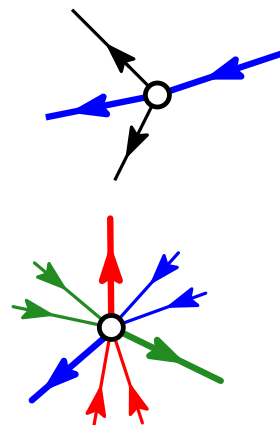
Bois de Schnyder (= “Schnyder woods”)



Triangulation simple munie d'une 3-orientation (quelconque).

On considère les chemins “milieux” :

Autour de chaque sommet interne :



Propriété :

Les chemins milieux sont auto-évitants + les 3 chemins milieux issus du même sommet ne s'intersectent pas.

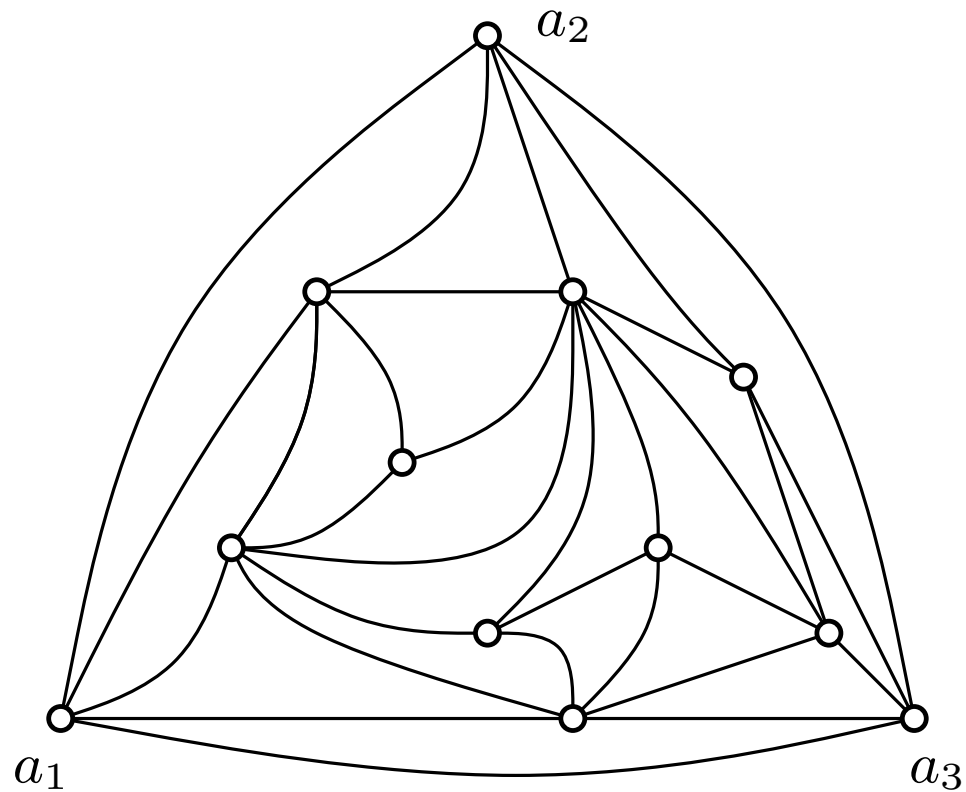
Propriété :

Les arêtes d'une couleur fixée forment un arbre couvrant les sommets internes de la triangulation.

Ce coloriage s'appelle un **Schnyder wood**.

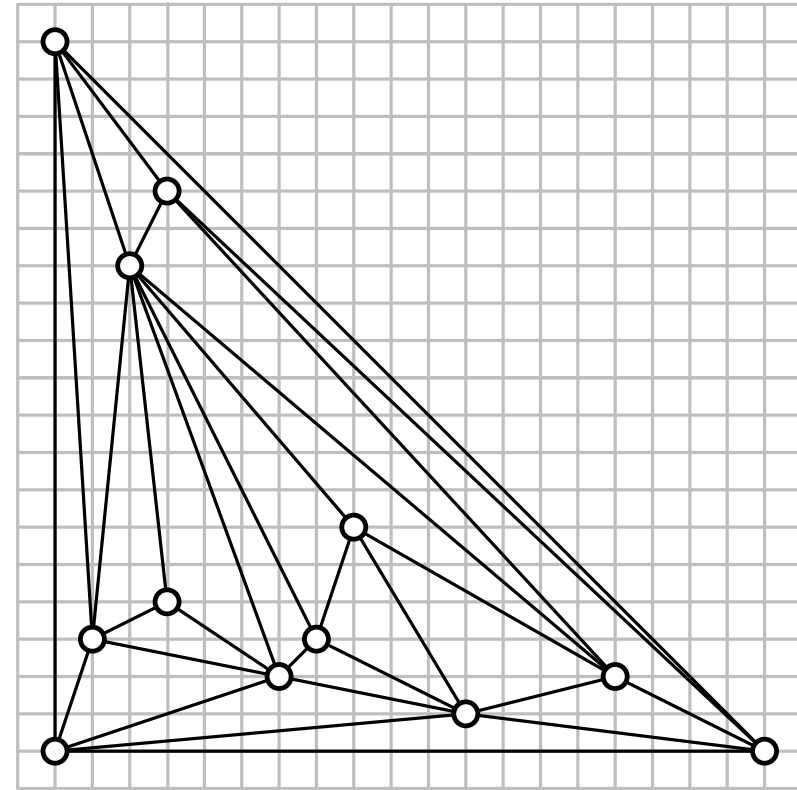
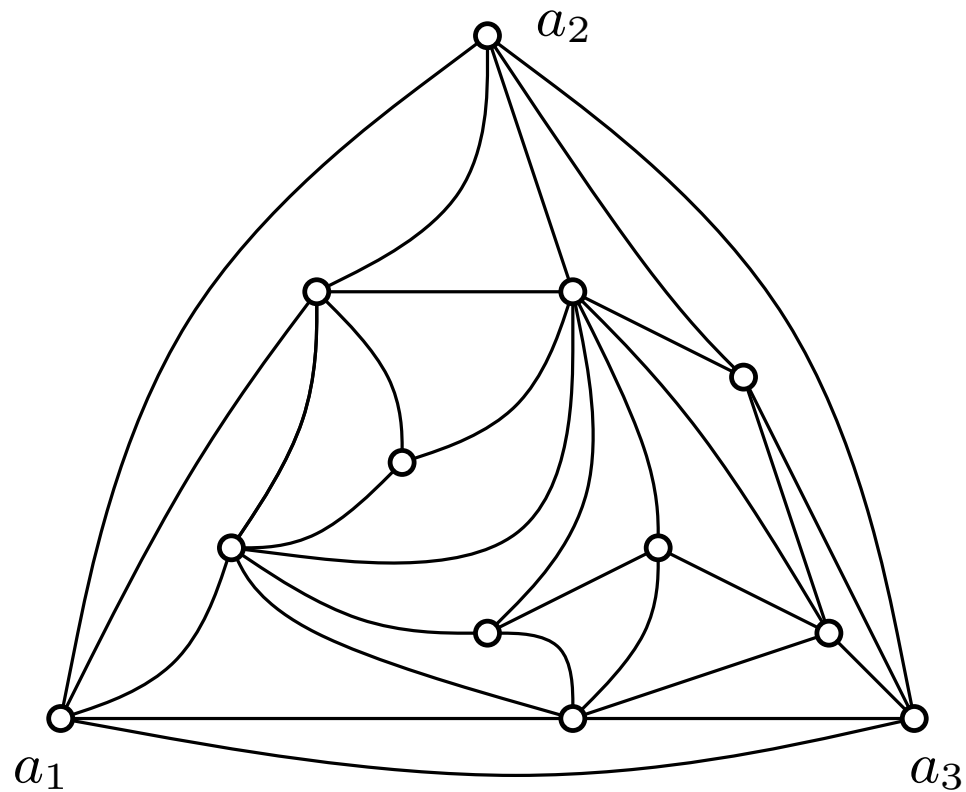
[Schnyder '89]

Application au dessin



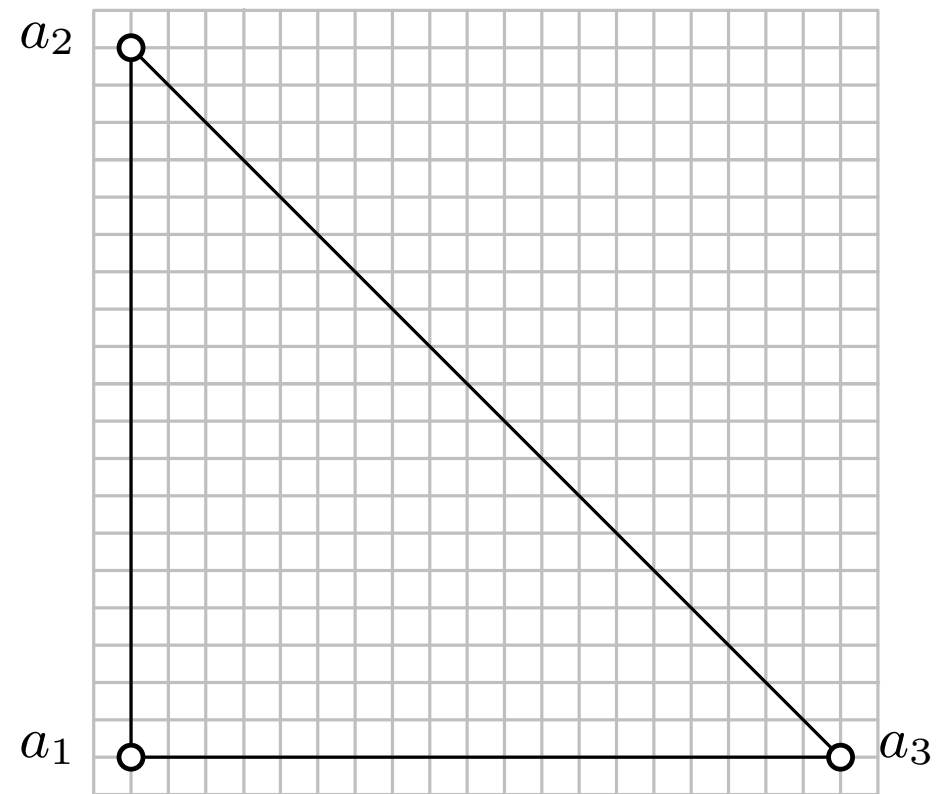
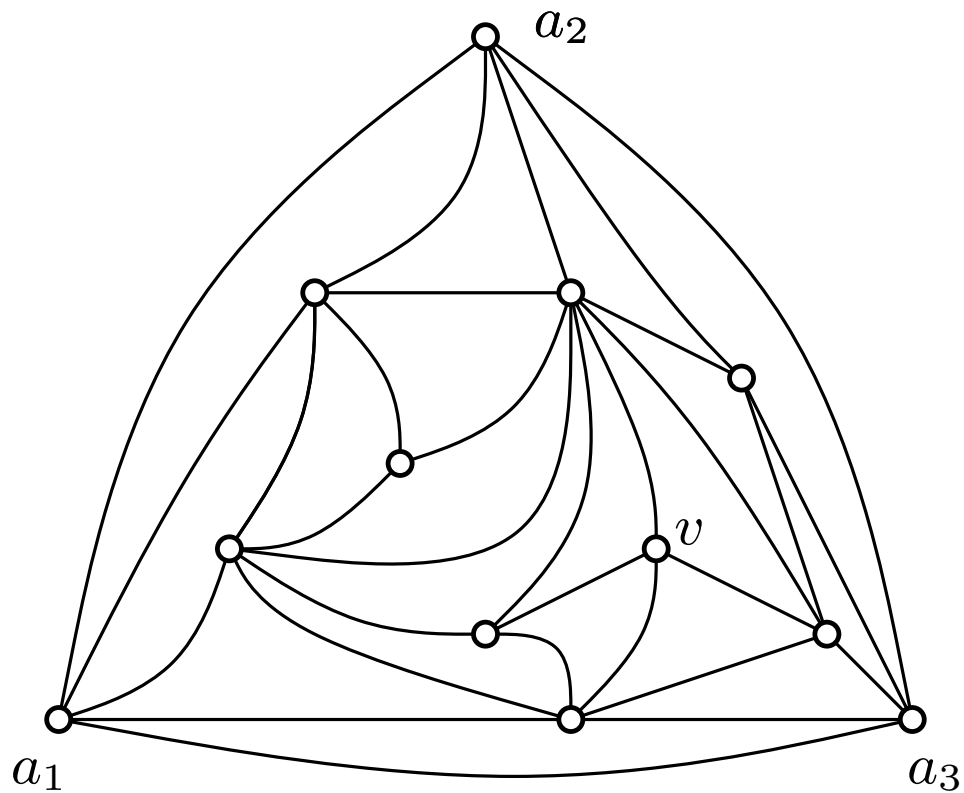
But : Trouver une représentation d'une carte planaire où les arêtes sont des segments et où les sommets sont situés sur une grille.

Application au dessin



But : Trouver une représentation d'une carte planaire où les arêtes sont des segments et où les sommets sont situés sur une grille.

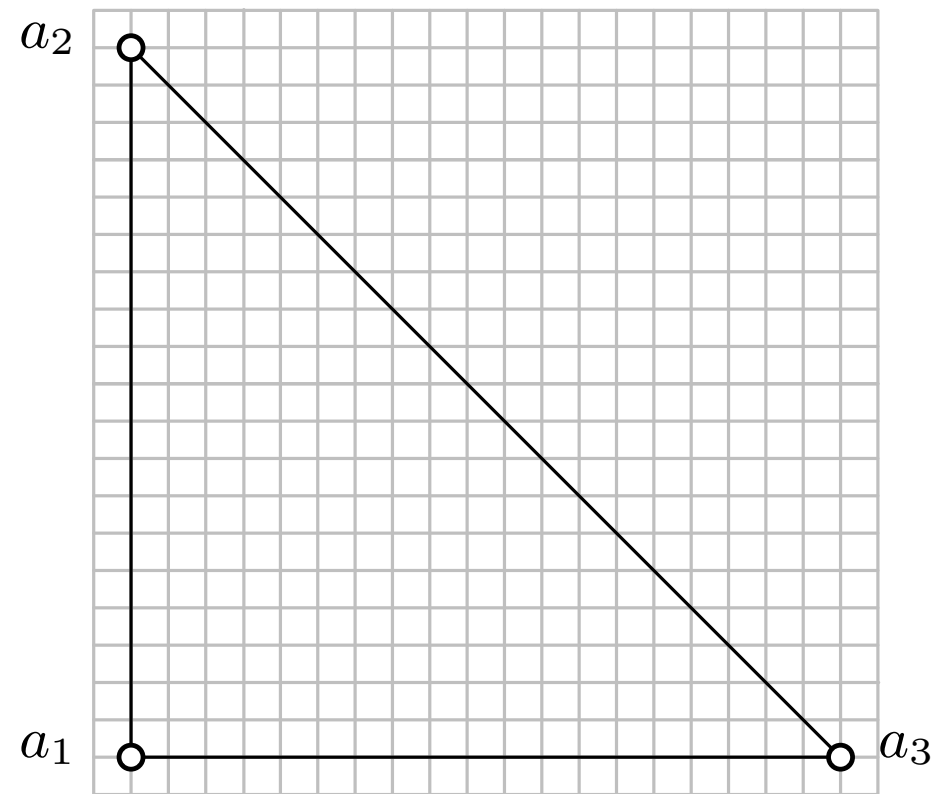
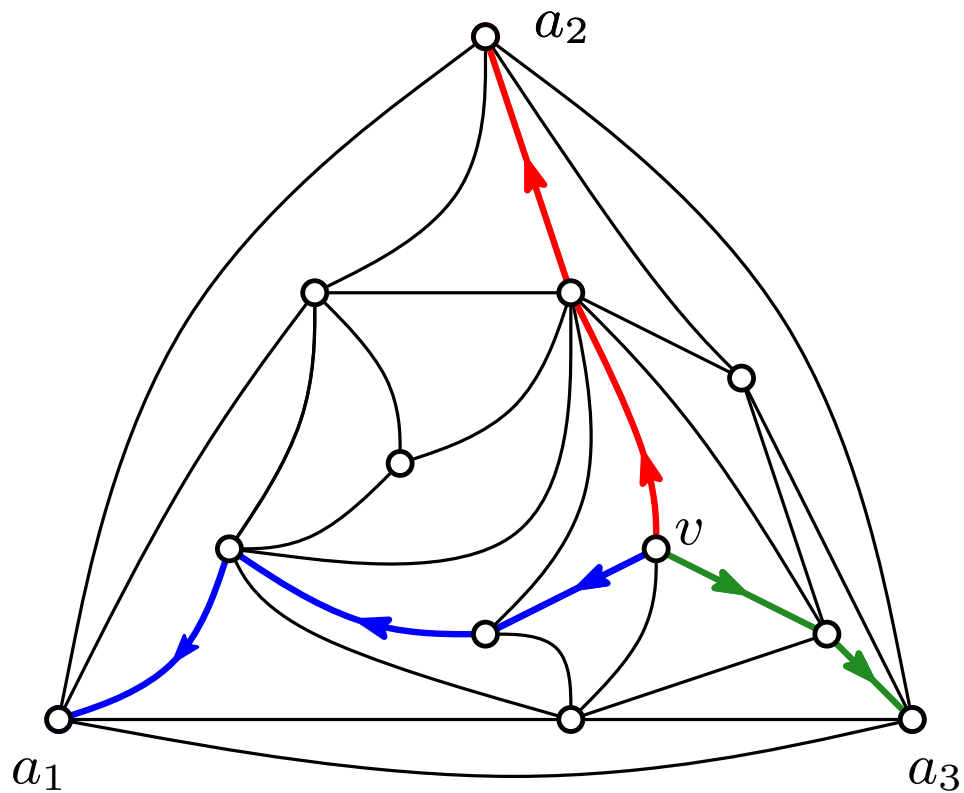
Application au dessin



But : Trouver une représentation d'une carte plane où les arêtes sont des segments et où les sommets sont situés sur une grille.

Algo : • Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.

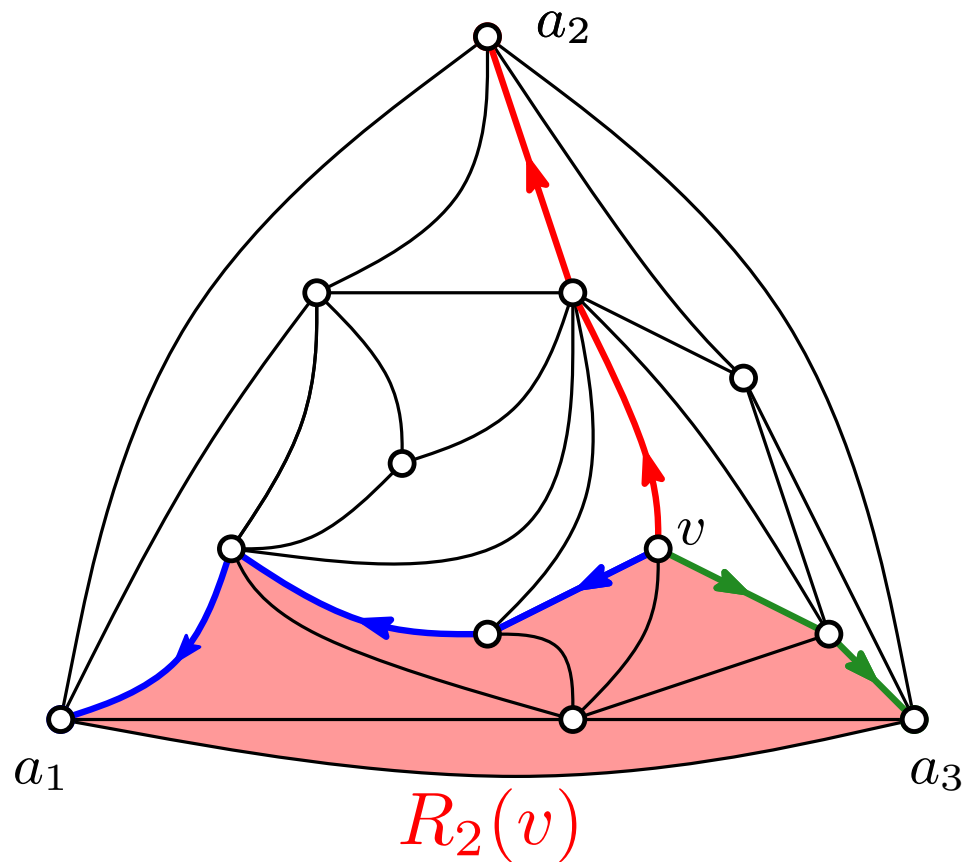
Application au dessin



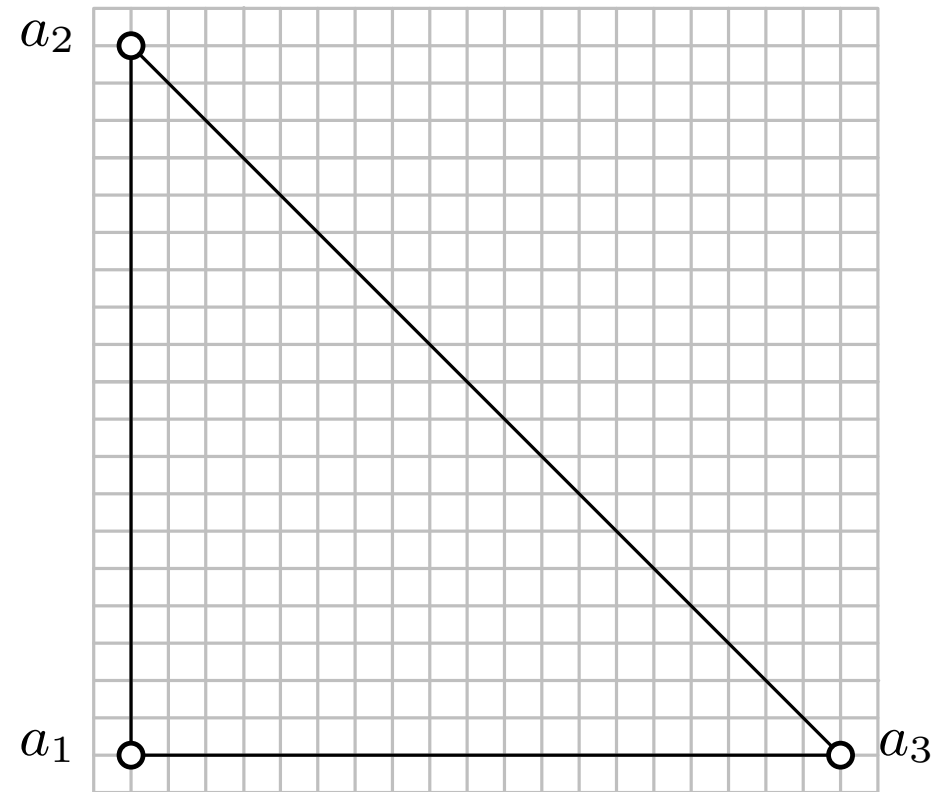
But : Trouver une représentation d'une carte plane où les arêtes sont des segments et où les sommets sont situés sur une grille.

- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Application au dessin

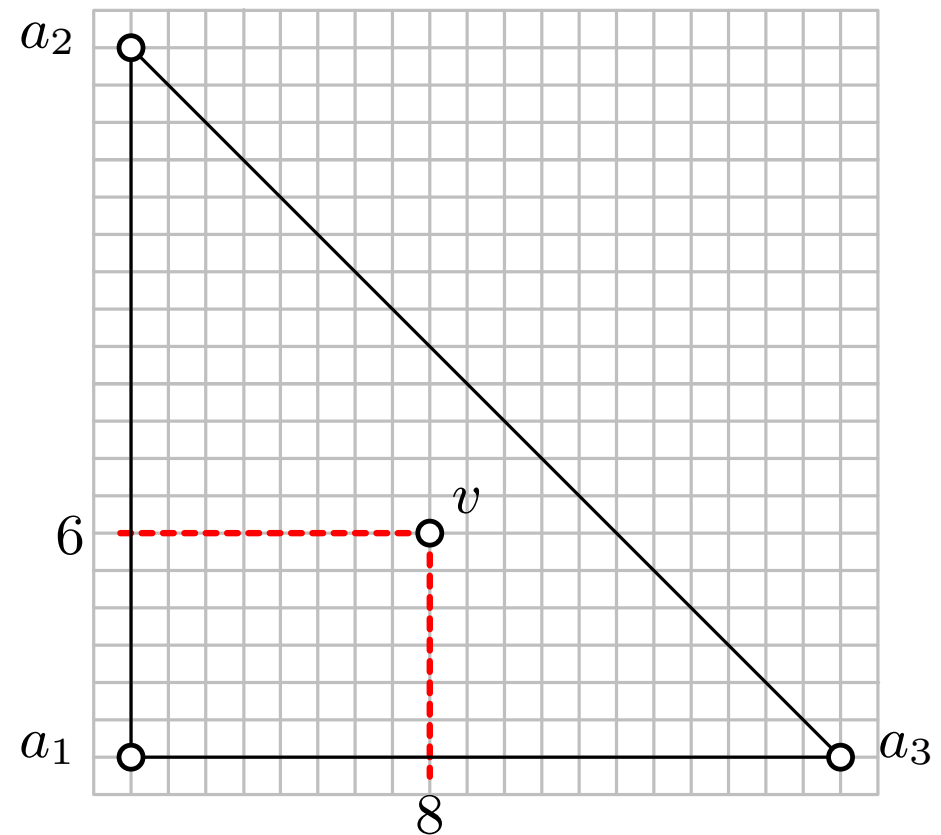
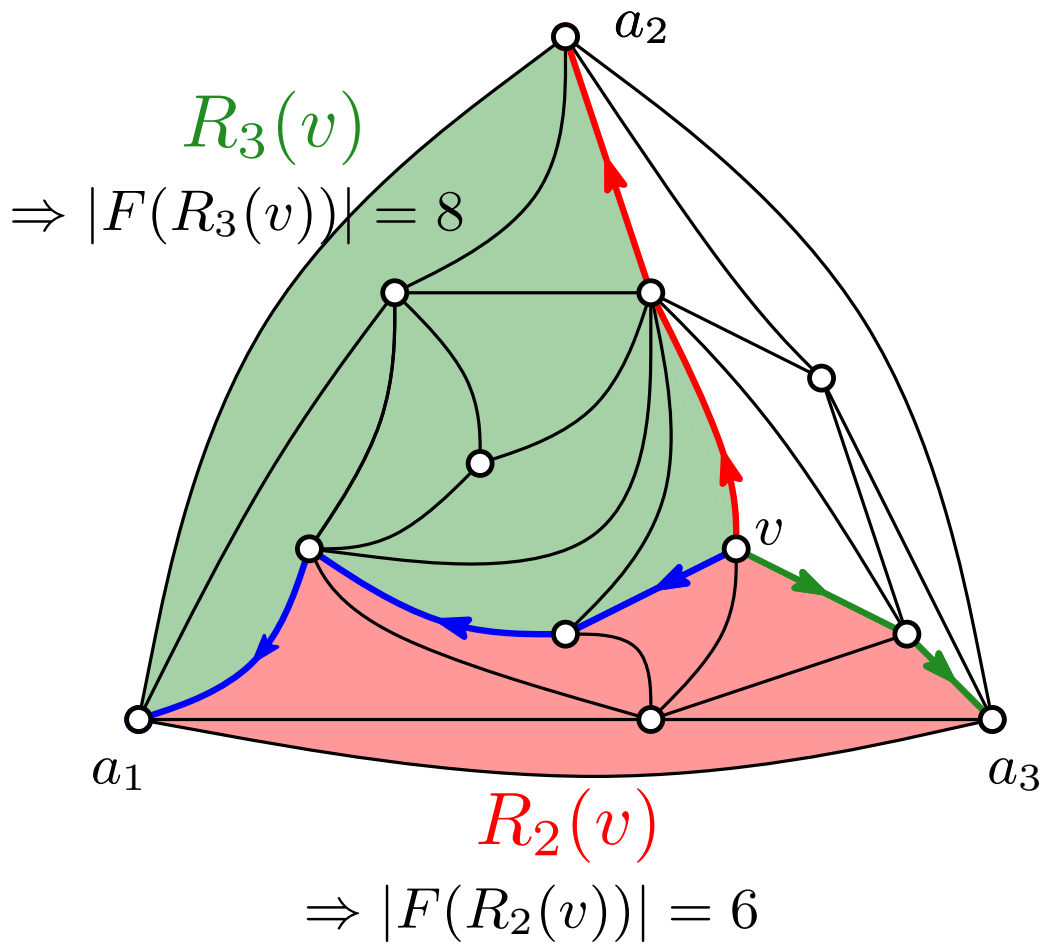


$$\Rightarrow |F(R_2(v))| = 6$$



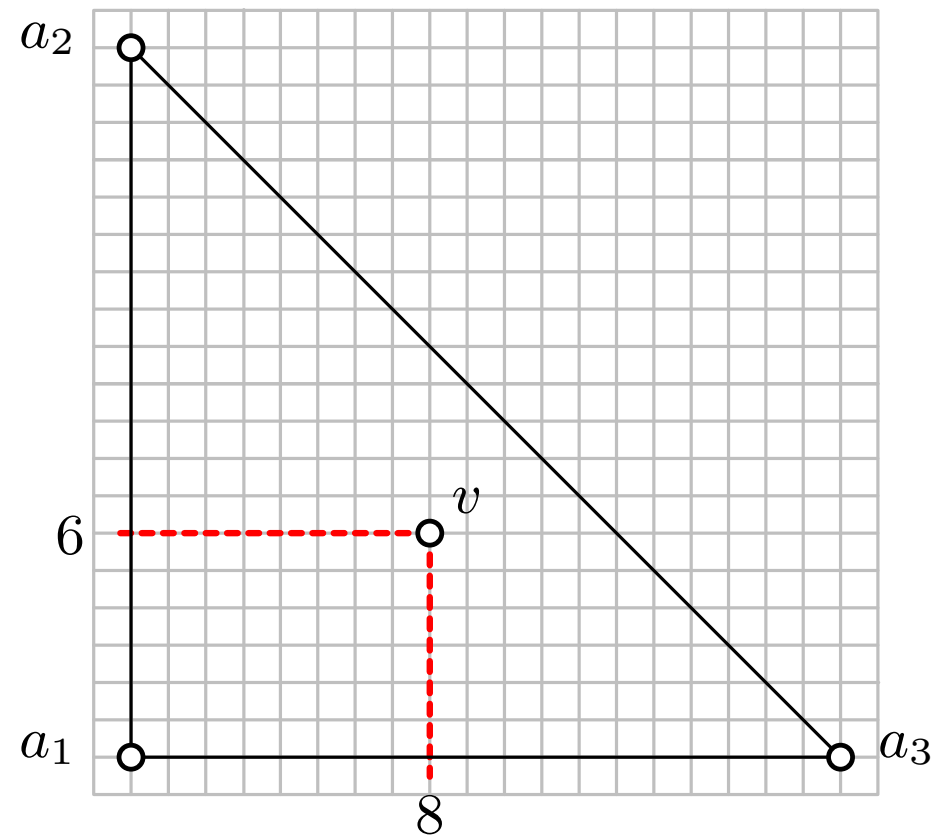
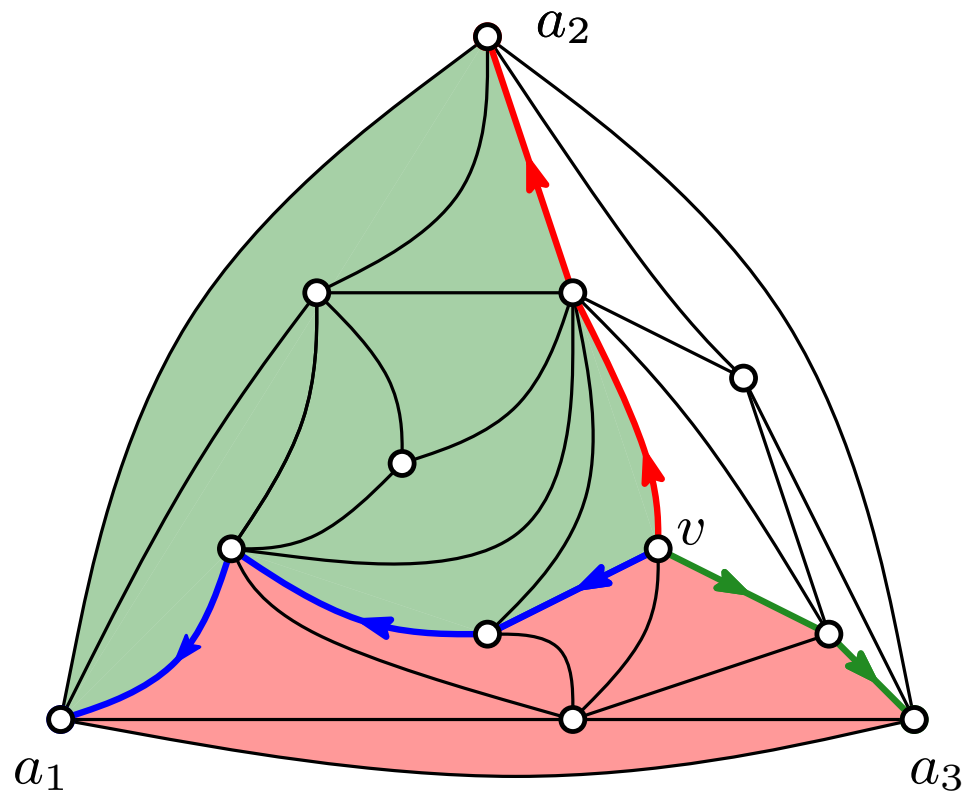
- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Application au dessin



- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

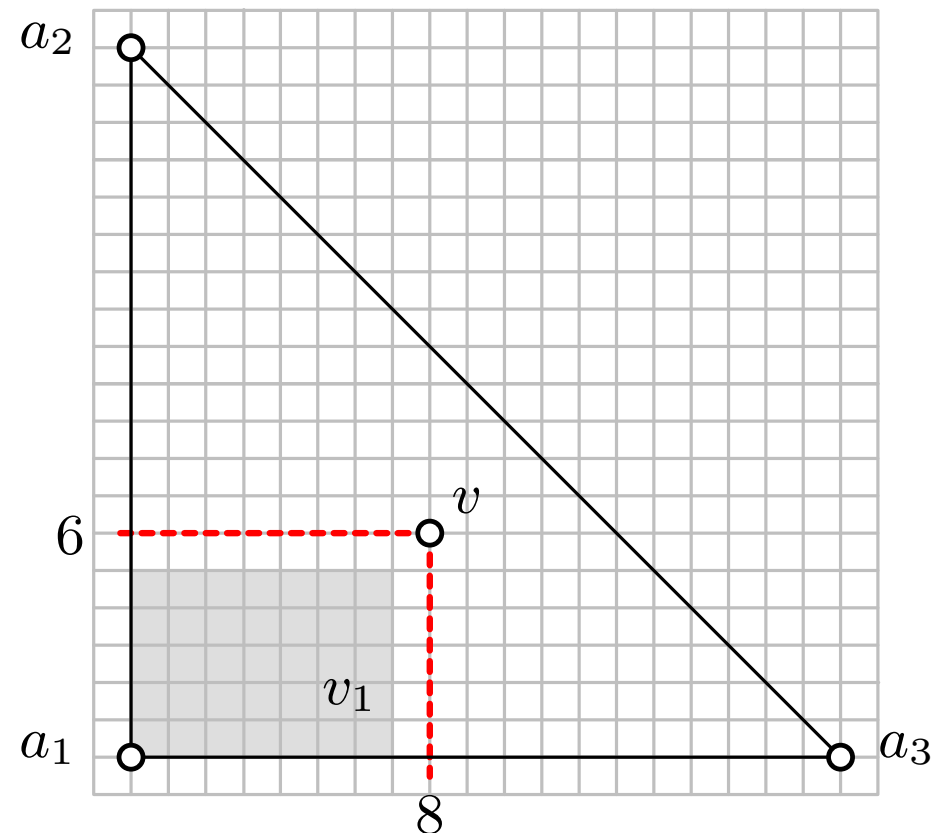
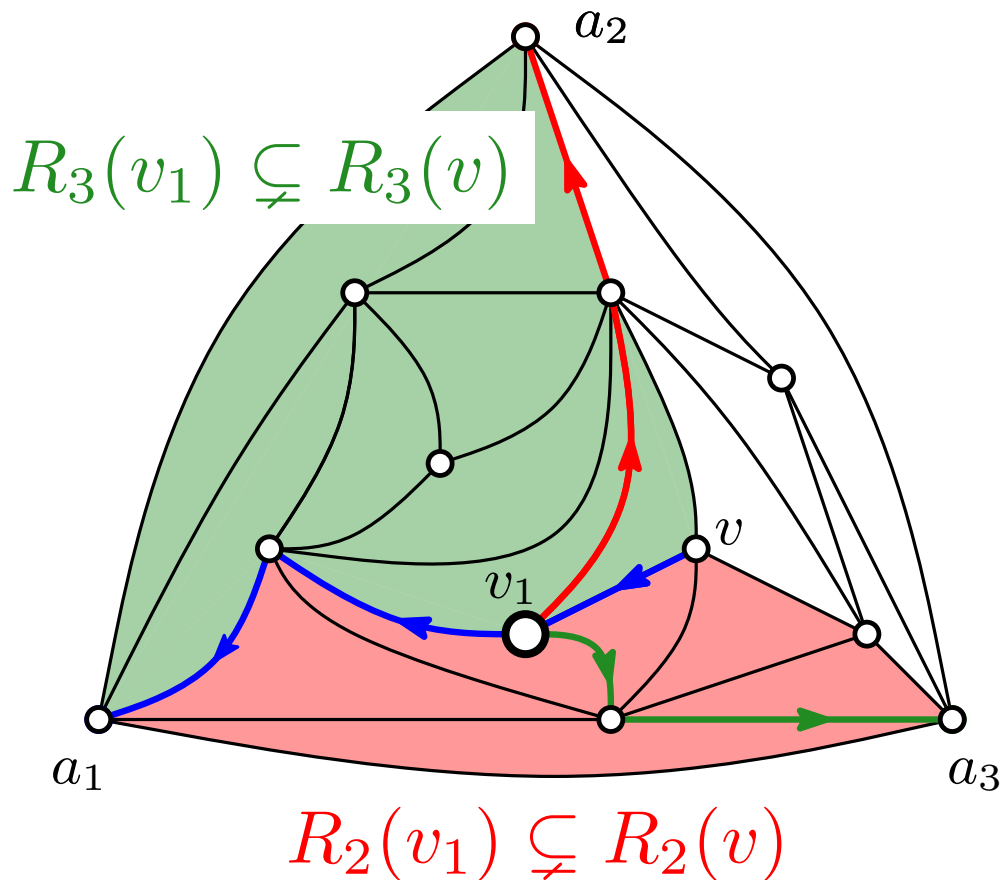
Application au dessin



- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Pourquoi ça marche ?

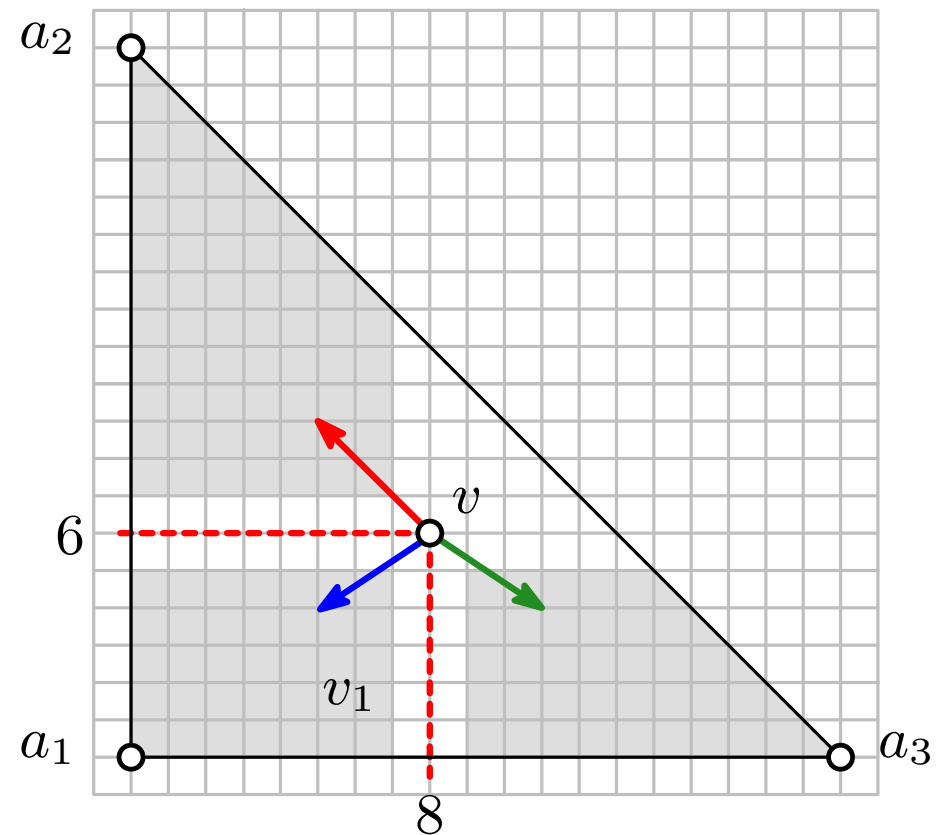
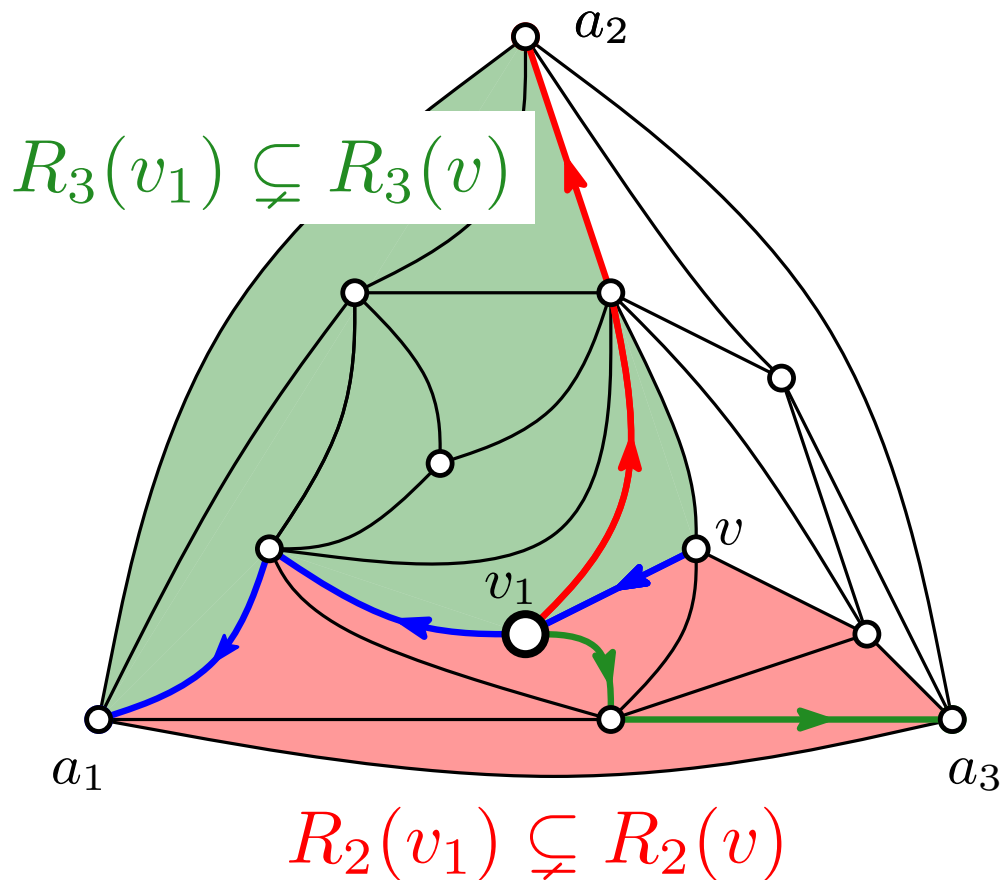
Application au dessin



- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Pourquoi ça marche ?

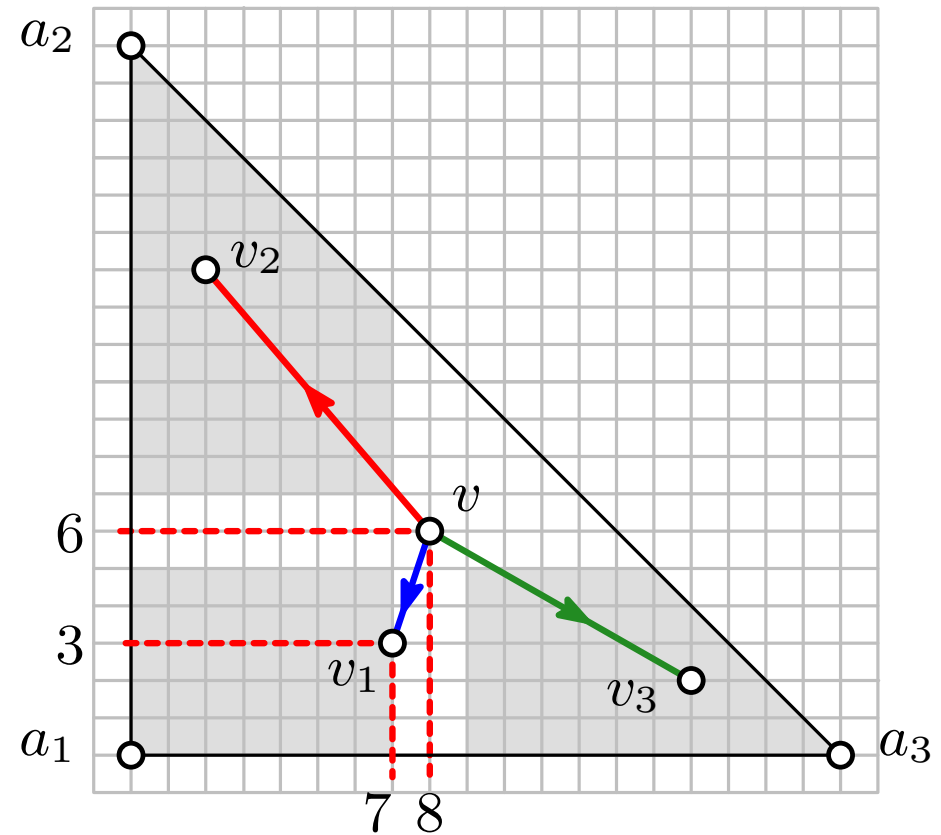
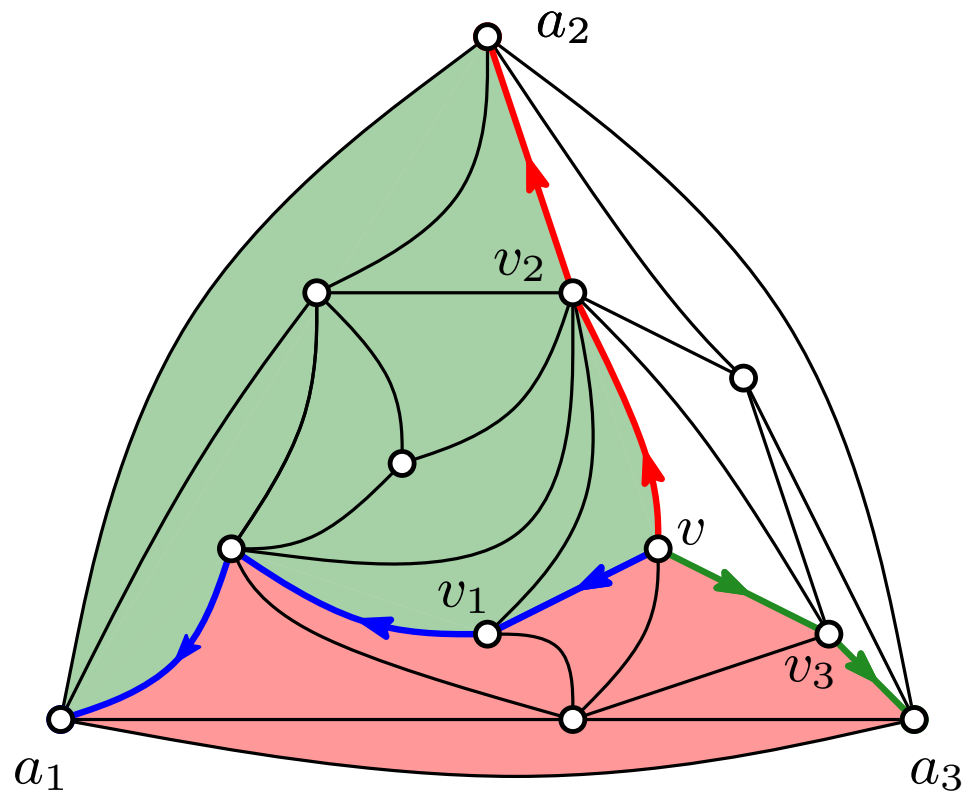
Application au dessin



- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Pourquoi ça marche ?

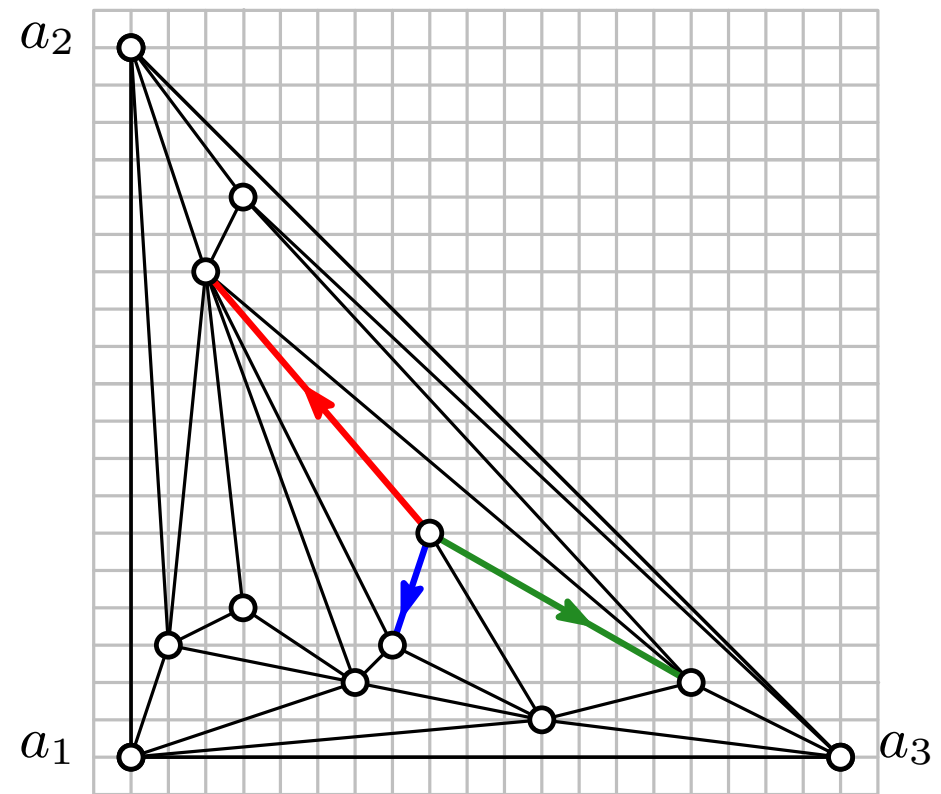
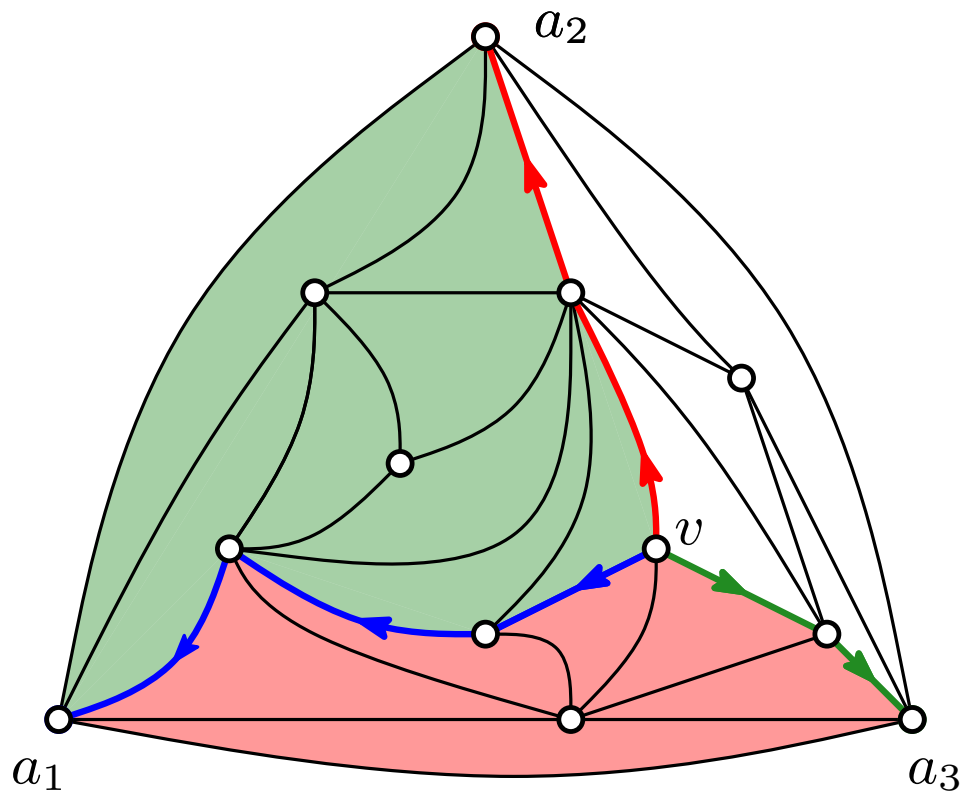
Application au dessin



- Algo :**
- Placer les sommets a_1 , a_2 et a_3 aux positions $(0, 0)$, $(0, |F(M)|)$, $(|F(M)|, 0)$.
 - Pour chaque sommet interne v , le placer en $(|F(R_3(v))|, |F(R_2(v))|)$

Pourquoi ça marche ?

Application au dessin

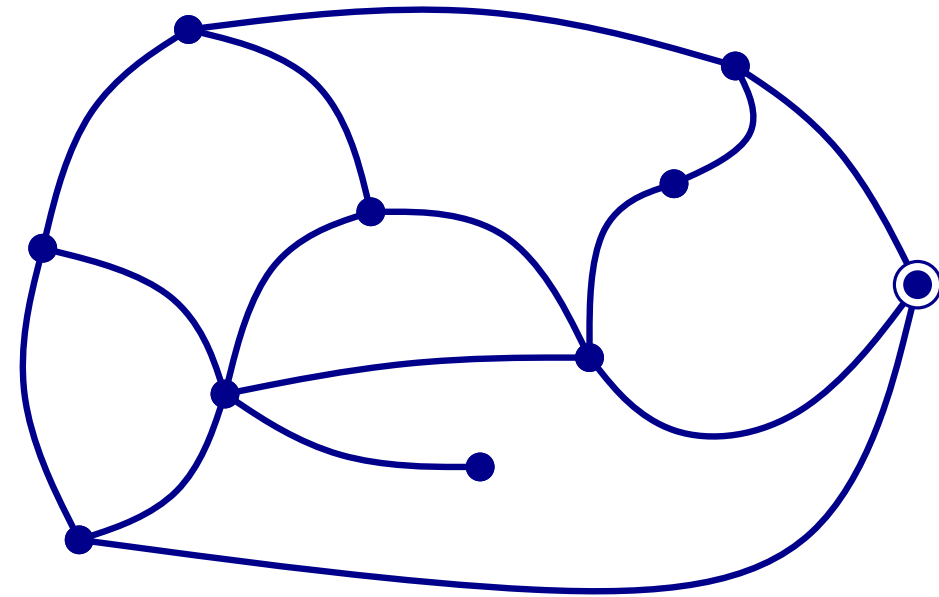


Théorème ([Schnyder '89]) :

L'algorithme produit un dessin de la triangulation où toutes les arêtes sont des segments et où les sommets appartiennent à une grille de taille $|F(M)| \times |F(M)|$.

Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

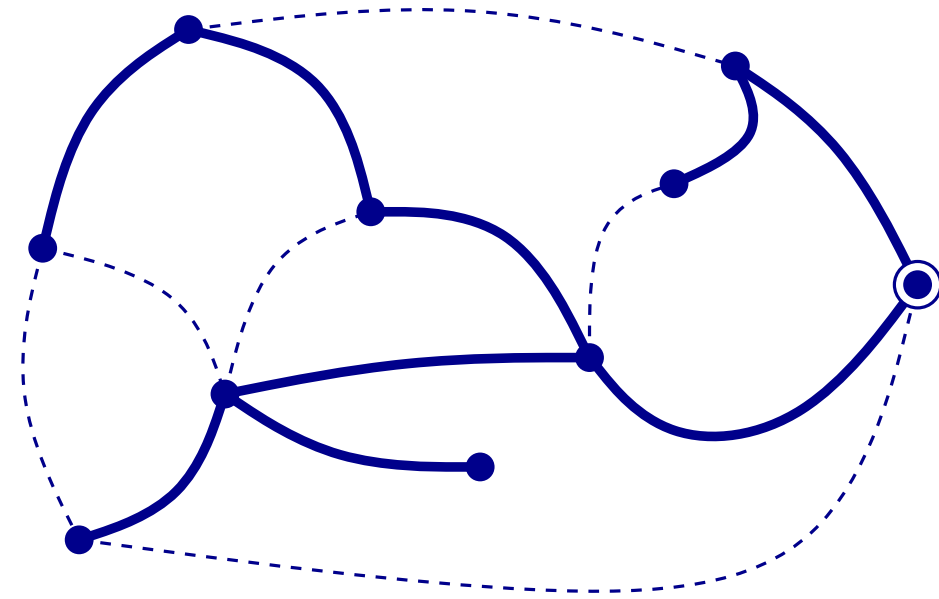
M carte plane enracinée



Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

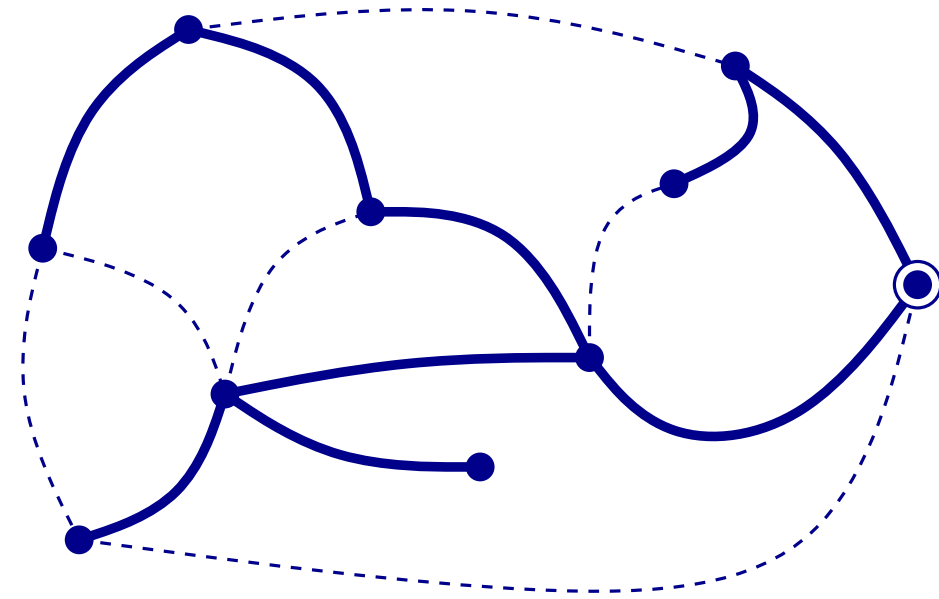
T arbre couvrant



Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant



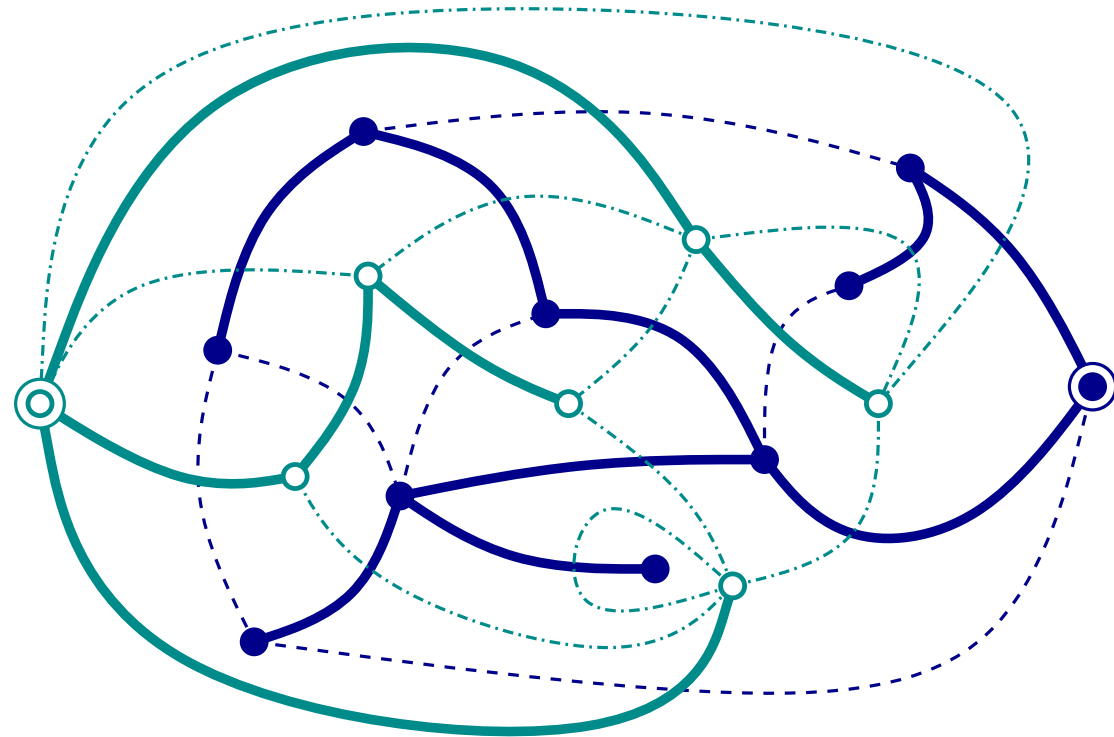
But : M étant fixée, que peut-on dire sur la structure des arbres couvrants ?
Peut-on mettre une structure d'orientation ?

Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

$T^* =$ arbre couvrant de M^*



Convention :



But : M étant fixée, que peut-on dire sur la structure des arbres couvrants ?

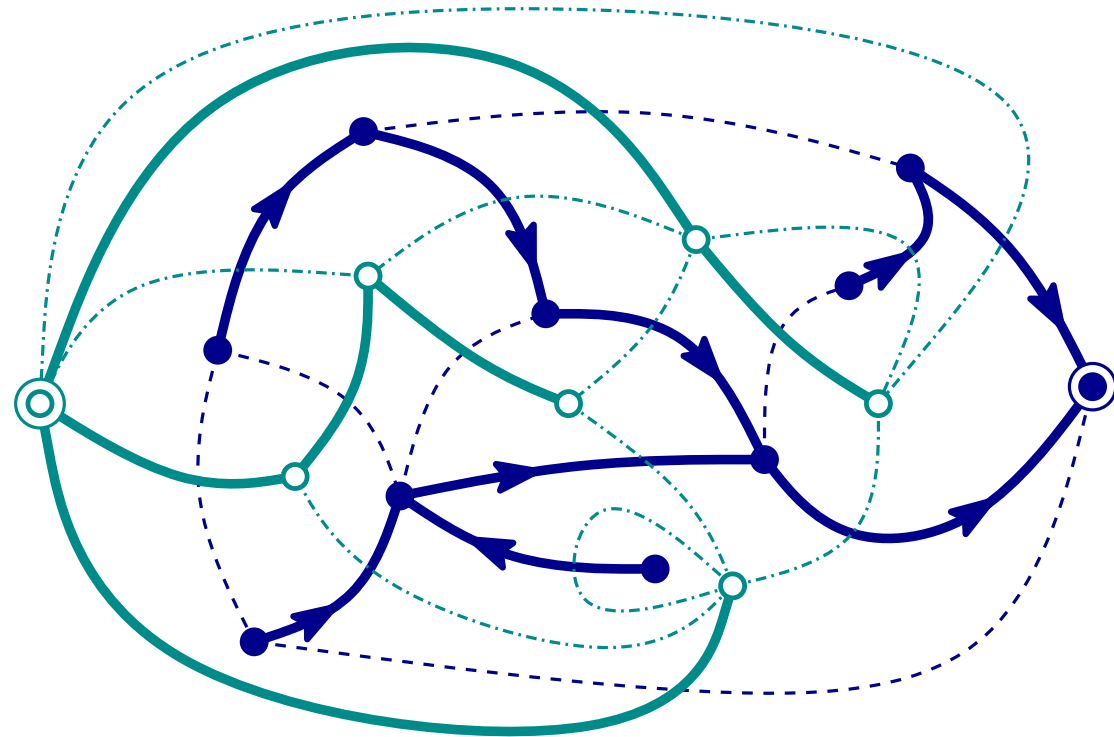
Peut-on mettre une structure d'orientation ?

Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

$T^* =$ arbre couvrant de M^*



Convention :



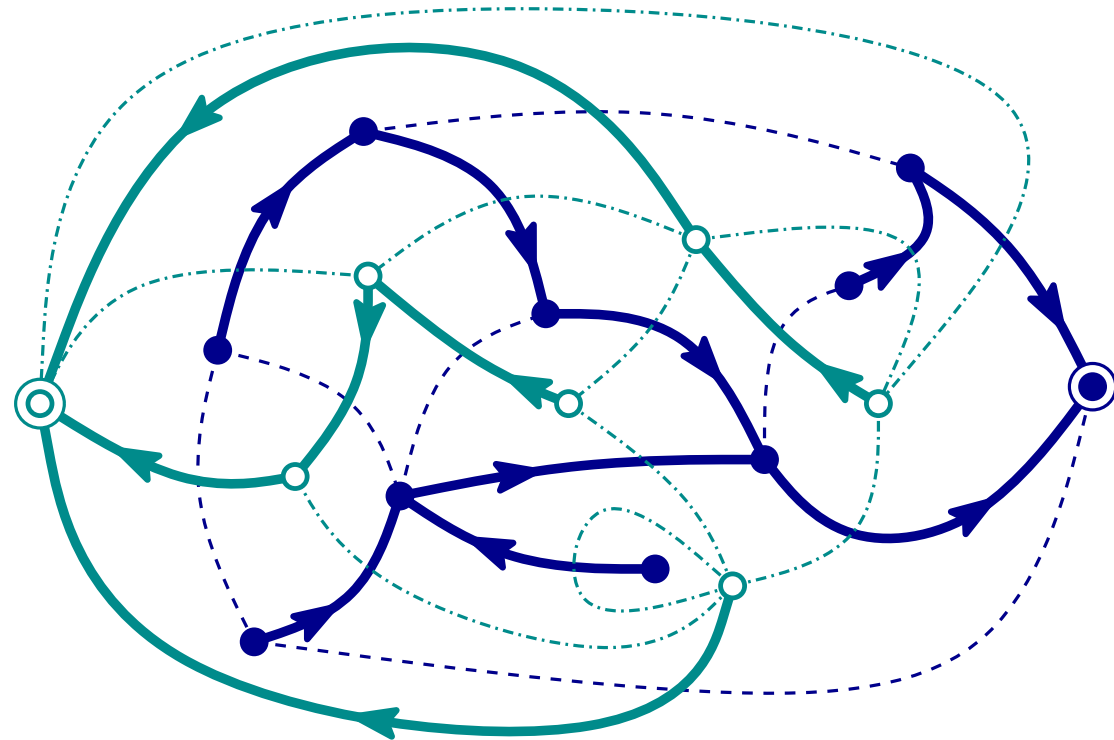
But : M étant fixée, que peut-on dire sur la structure des arbres couvrants ?
Peut-on mettre une structure d'orientation ?

Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

$T^* =$ arbre couvrant de M^*



Convention :



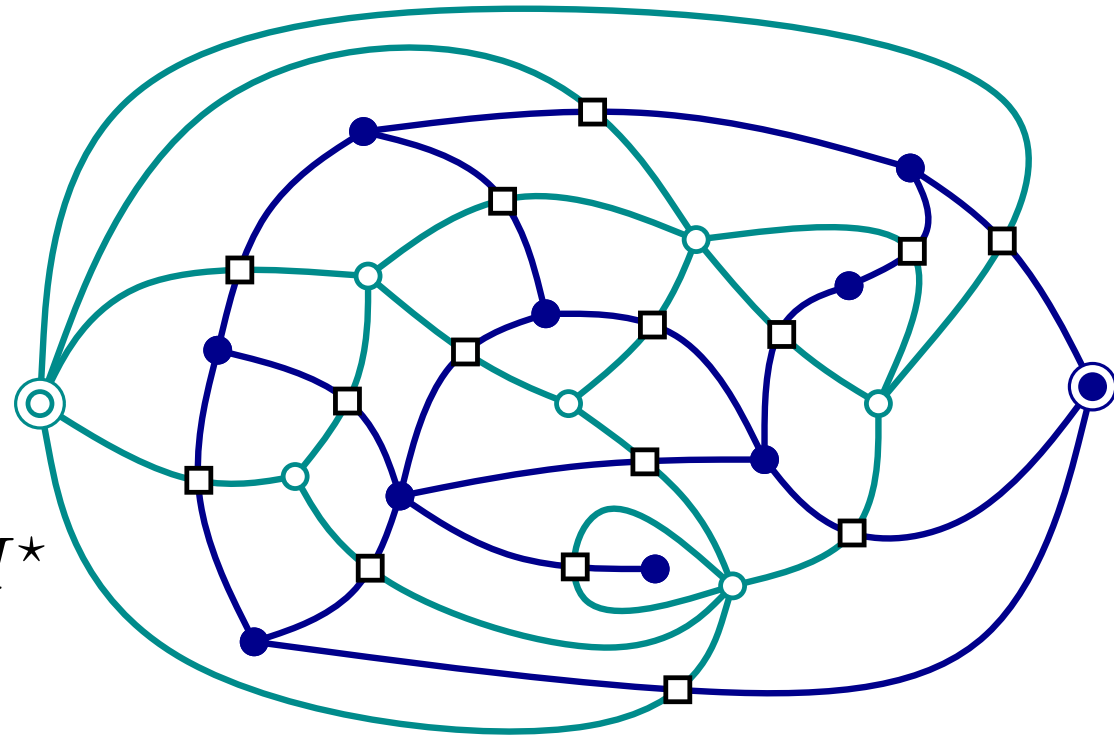
But : M étant fixée, que peut-on dire sur la structure des arbres couvrants ?

Peut-on mettre une structure d'orientation ?

Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

\tilde{M} = **complété** de M
= superposition de M et de M^*



Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

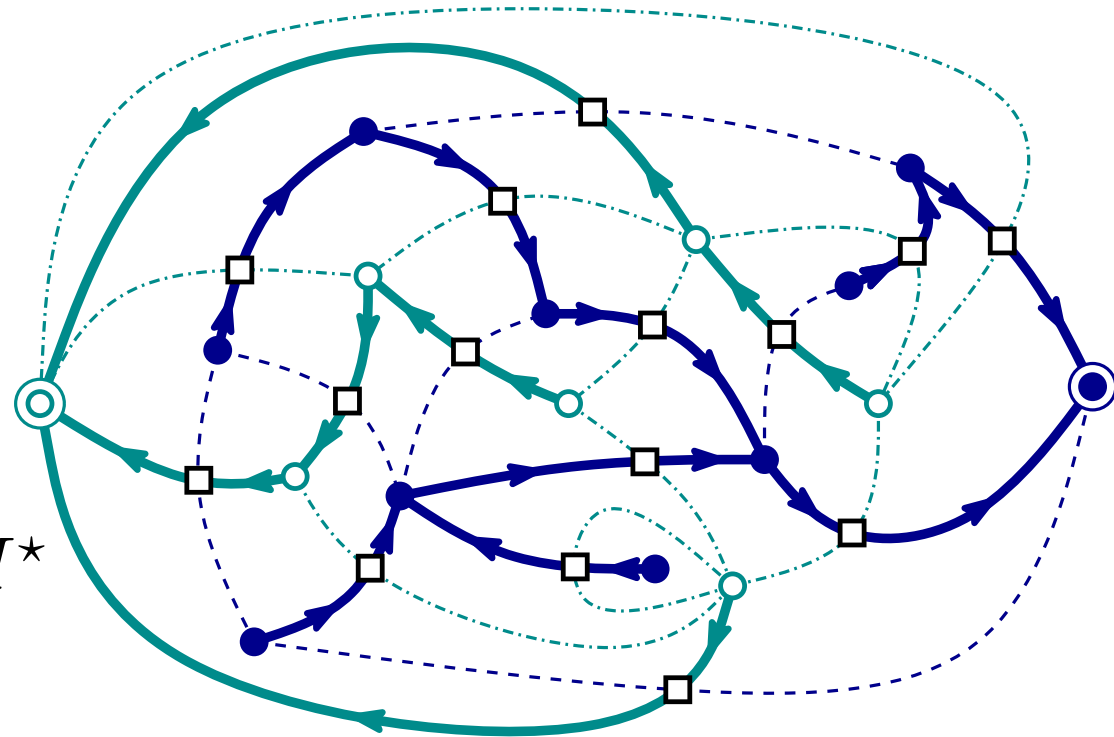
M carte plane enracinée

T arbre couvrant

T^* = arbre couvrant de M^*

\tilde{M} = **complété** de M

= superposition de M et de M^*



Convention :



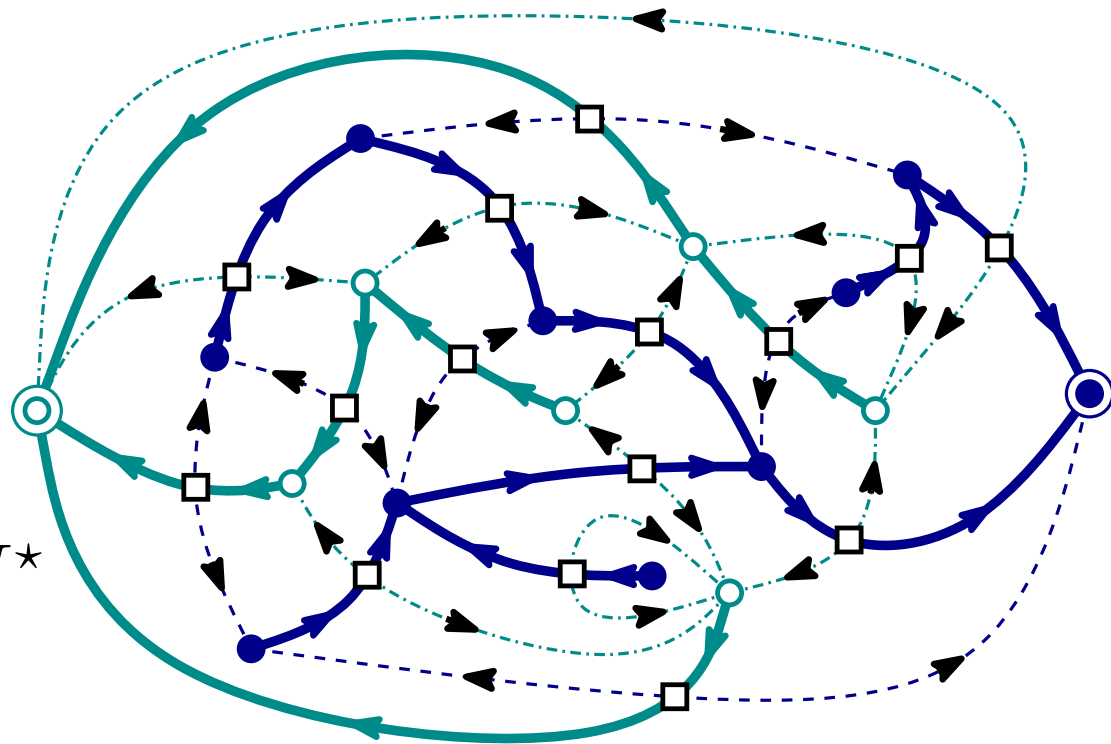
Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

T^* = arbre couvrant de M^*

\tilde{M} = **complété** de M
= superposition de M et de M^*



À un arbre couvrant de M , on associe une α_T -orientation de \tilde{M} où α_T est :

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

Convention :



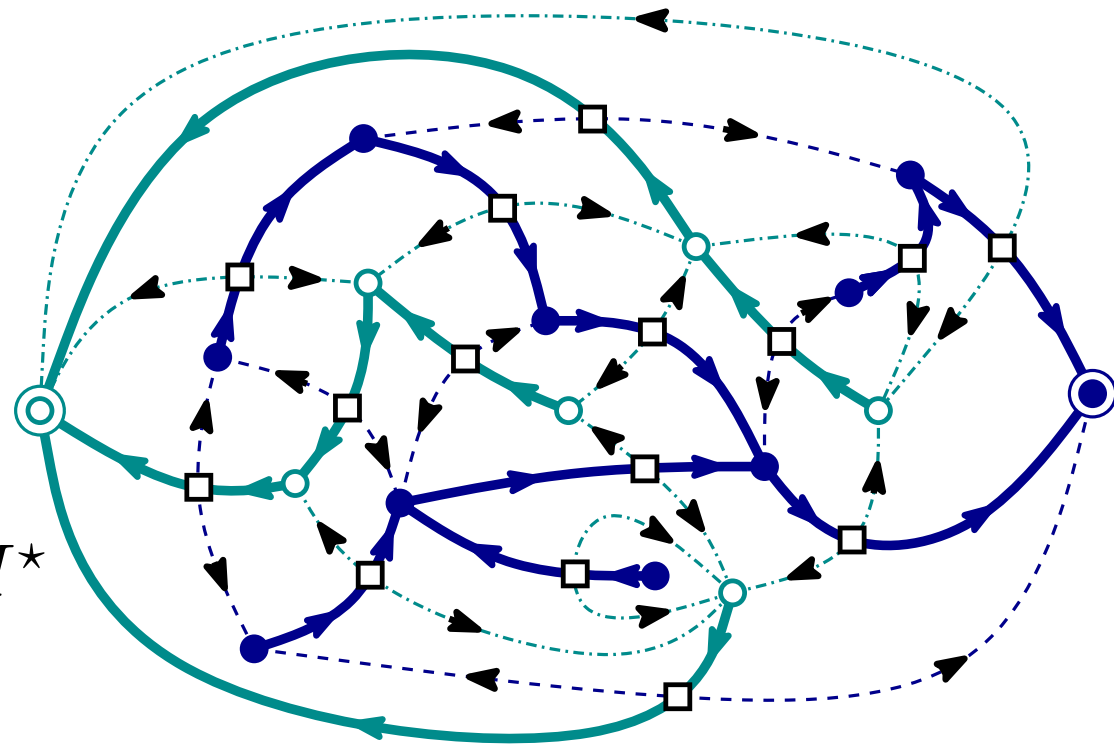
Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

T^* = arbre couvrant de M^*

\tilde{M} = **complété** de M
= superposition de M et de M^*



À un arbre couvrant de M , on associe une α_T -orientation de \tilde{M} où α_T est :

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

Et la réciproque ?

Convention :



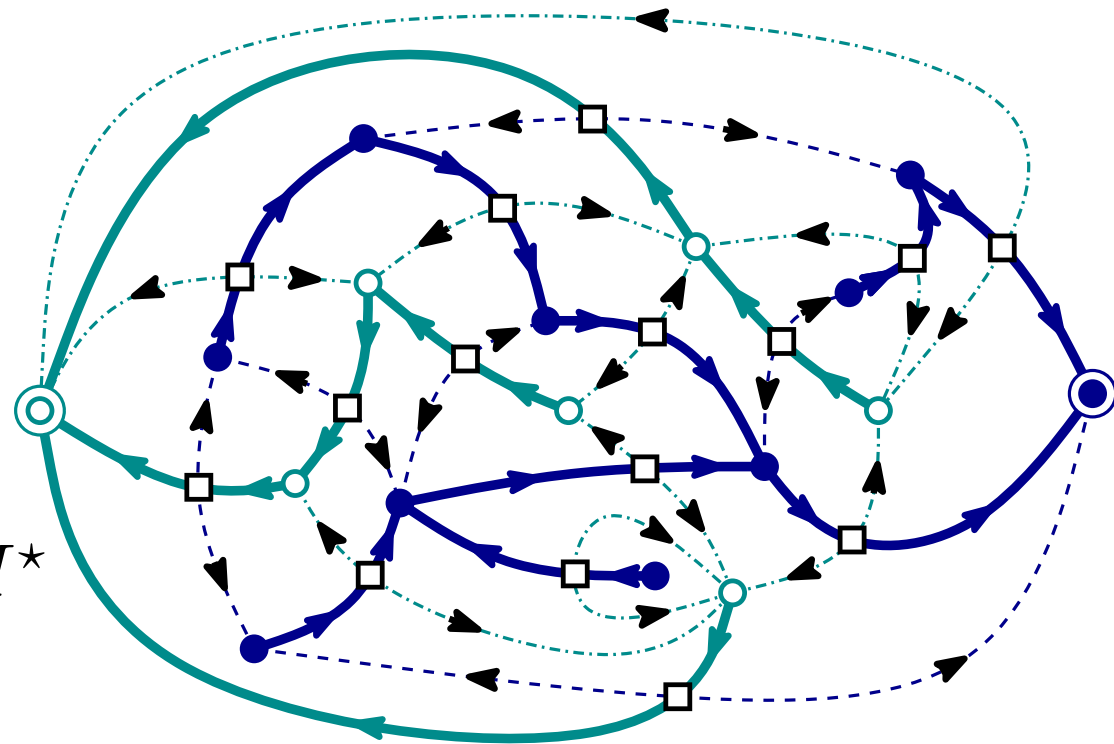
Arbres couvrants et orientations [Propp '93]

M carte plane enracinée

T arbre couvrant

T^* = arbre couvrant de M^*

\tilde{M} = **complété** de M
= superposition de M et de M^*



À un arbre couvrant de M , on associe une α_T -orientation de \tilde{M} où α_T est :

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

Et la réciproque ?

Convention :

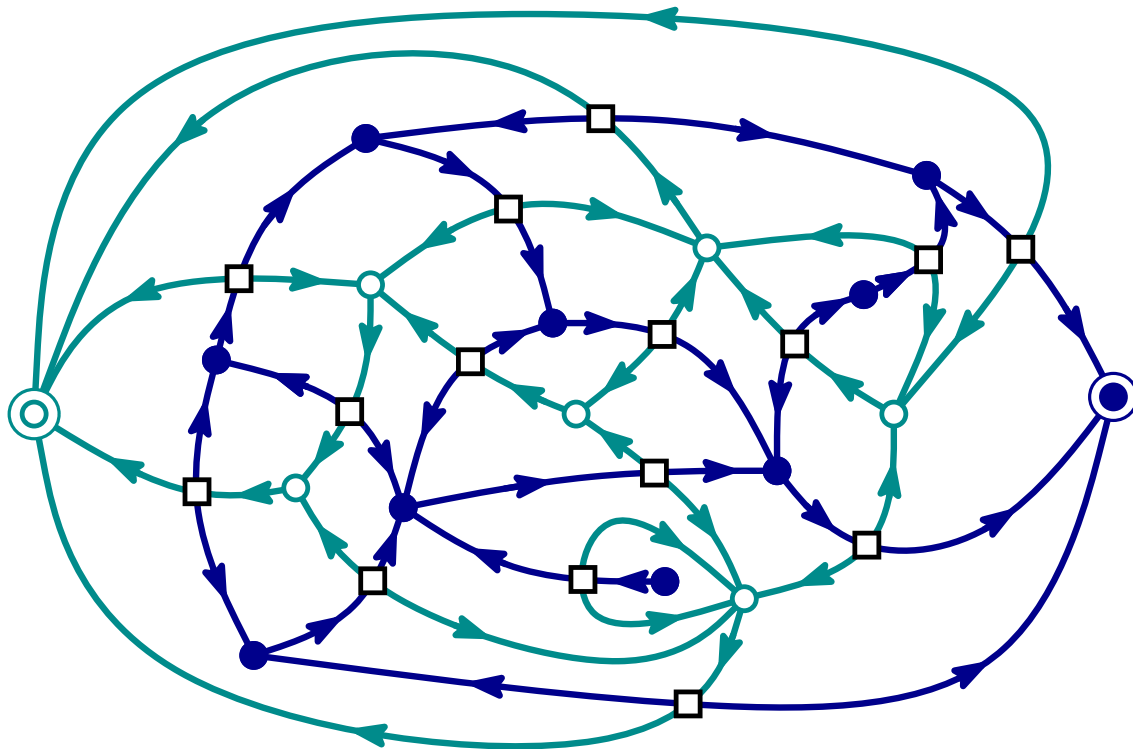


Arbres couvrants et orientations

Proposition : [Propp '93, Felsner '04]

Les arbres couvrants de M sont en bijection avec les α_T -orientations de \tilde{M} .

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

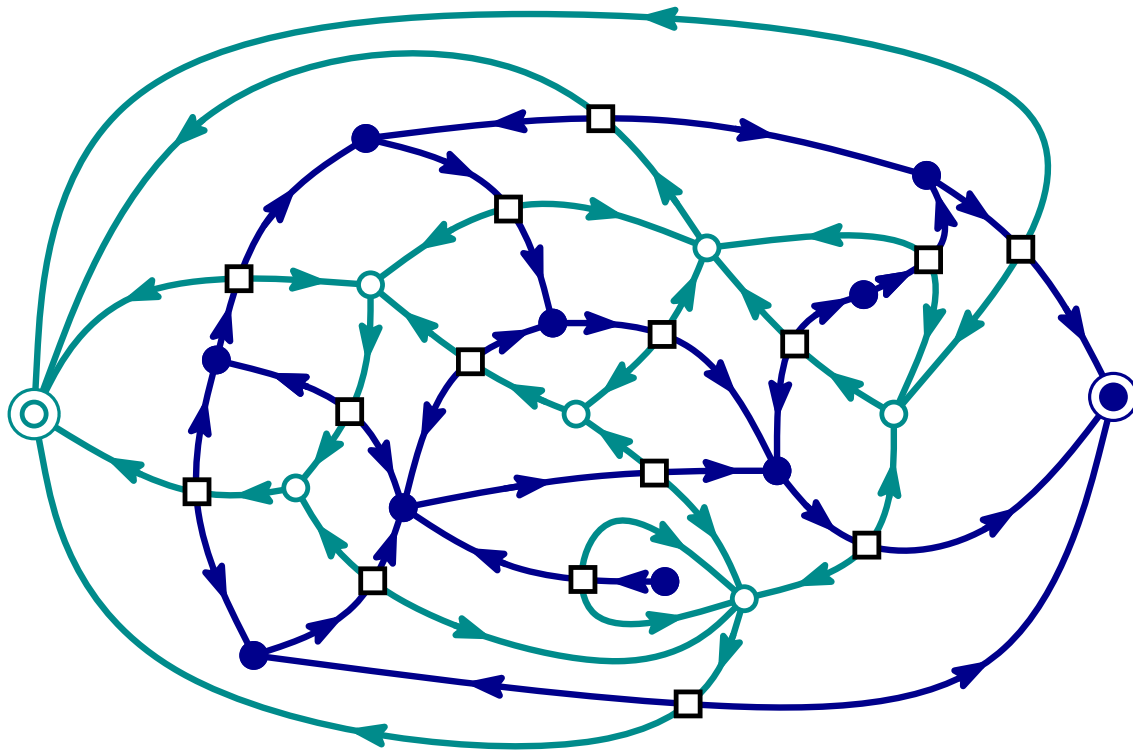


Arbres couvrants et orientations

Proposition : [Propp '93, Felsner '04]

Les arbres couvrants de M sont en bijection avec les α_T -orientations de \tilde{M} .

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \\ \quad = \deg(\square) - 1 \end{cases}$$

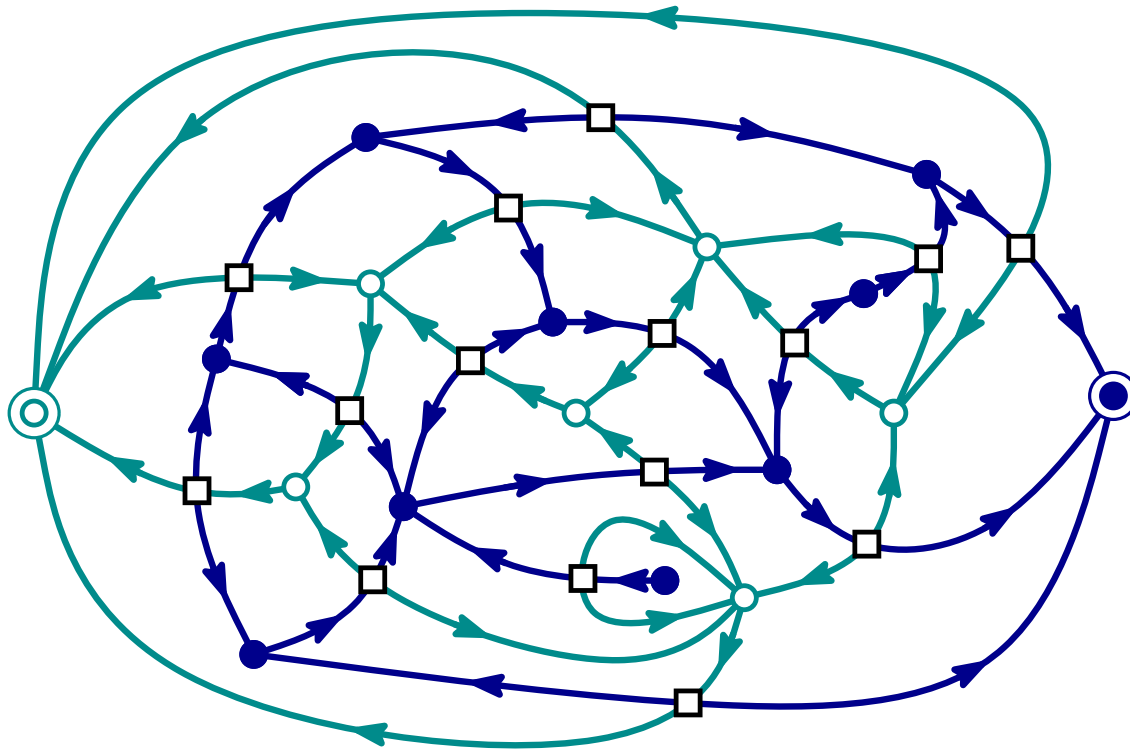


Arbres couvrants et orientations

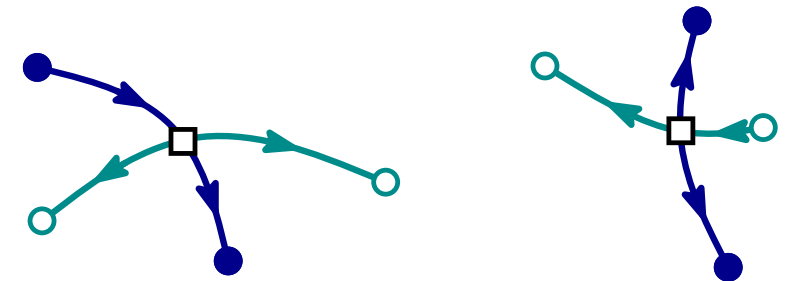
Proposition : [Propp '93, Felsner '04]

Les arbres couvrants de M sont en bijection avec les α_T -orientations de \tilde{M} .

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$



A chaque sommet \square , 2 configurations possibles :

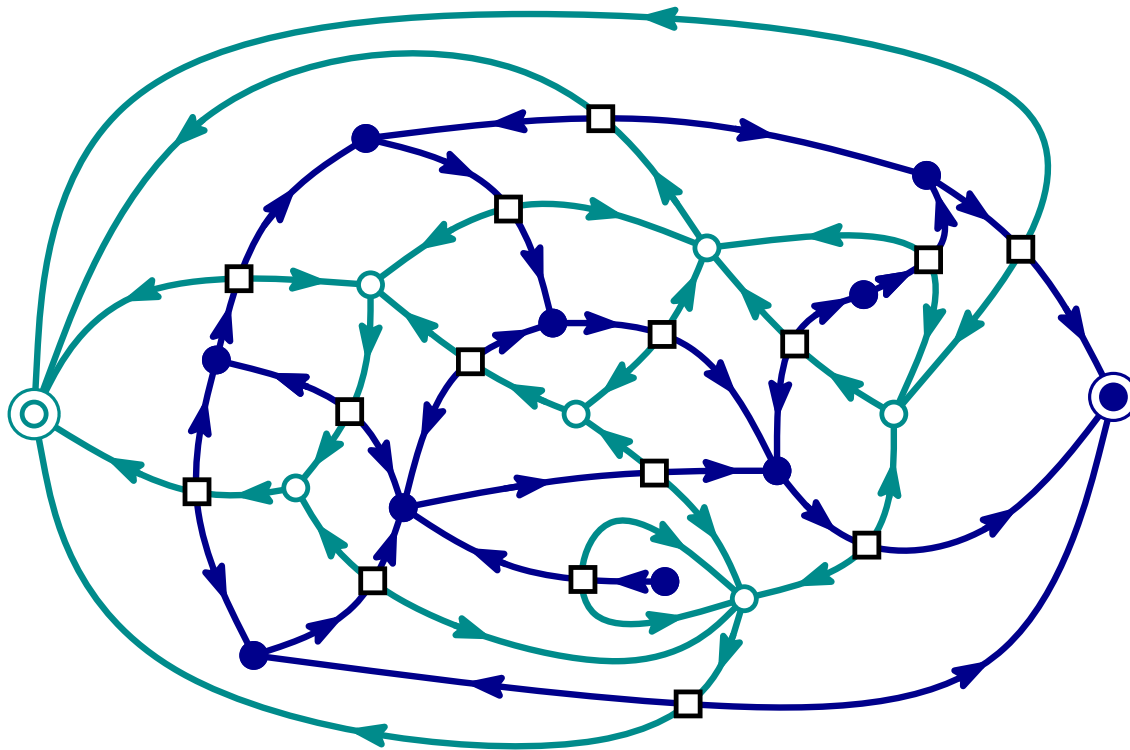


Arbres couvrants et orientations

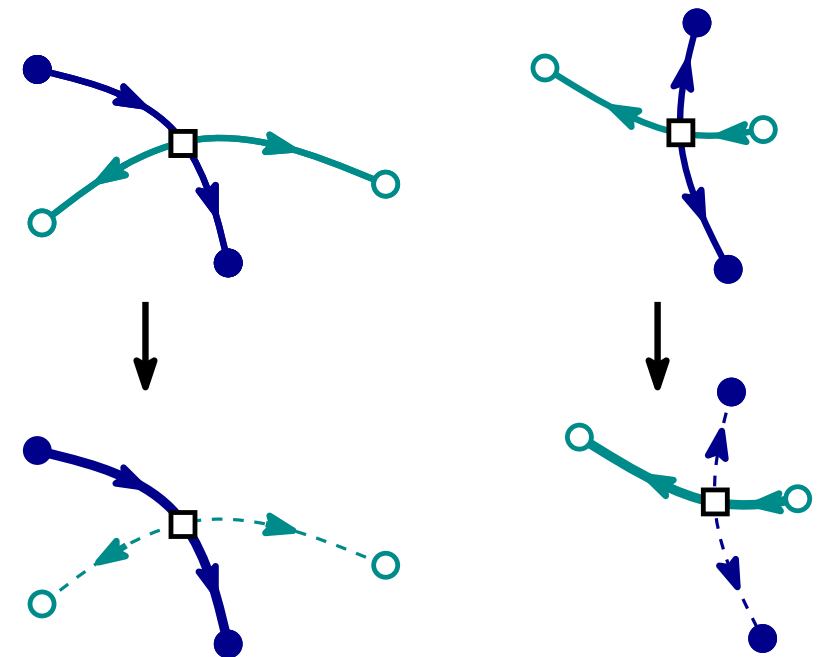
Proposition : [Propp '93, Felsner '04]

Les arbres couvrants de M sont en bijection avec les α_T -orientations de \tilde{M} .

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$



A chaque sommet \square , 2 configurations possibles :

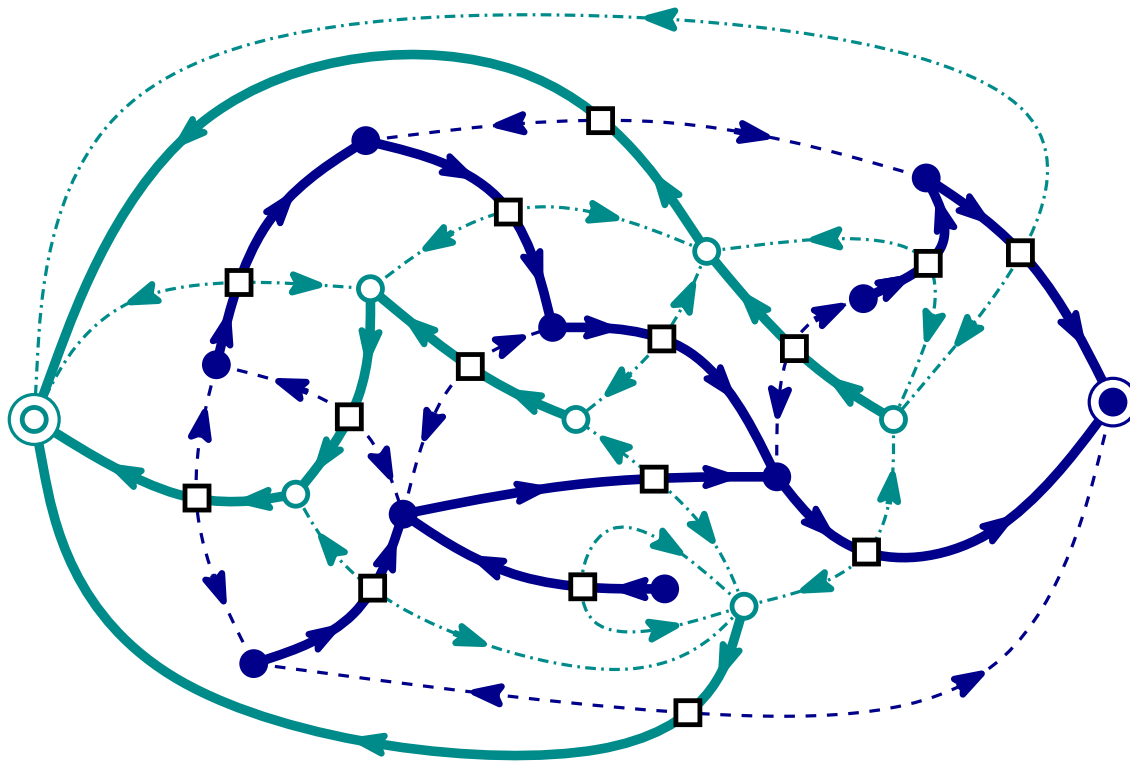


Arbres couvrants et orientations

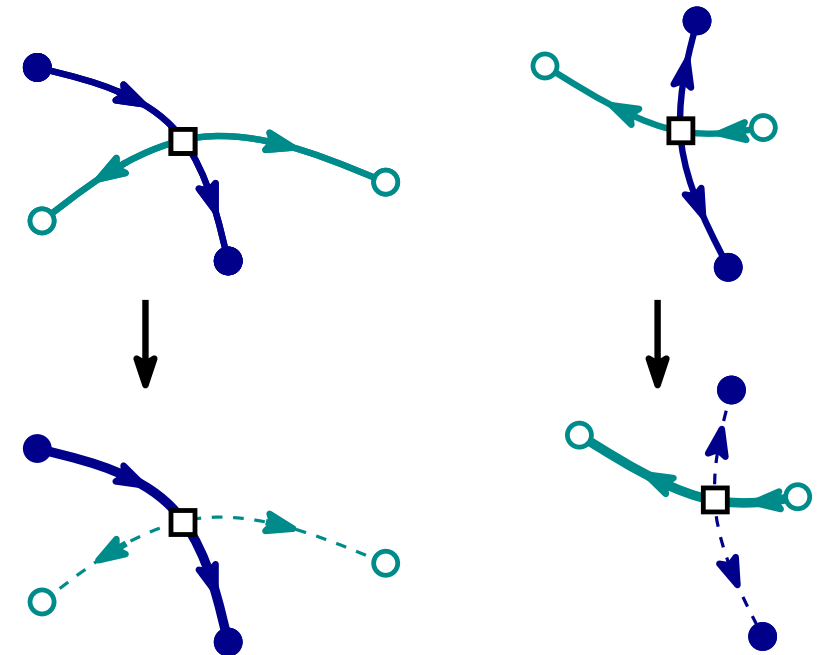
Proposition : [Propp '93, Felsner '04]

Les arbres couvrants de M sont en bijection avec les α_T -orientations de \tilde{M} .

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$



A chaque sommet \square , 2 configurations possibles :

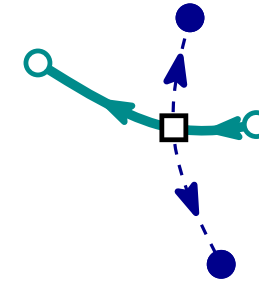
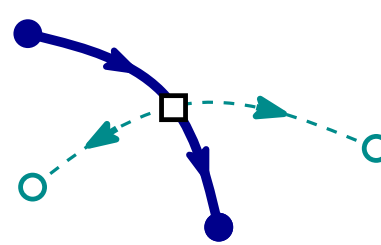


$$|\{\text{arêtes bleues}\}| = |V(M)| - 1$$

Pour montrer que c'est un arbre, montrer qu'il n'existe pas de cycles.

Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

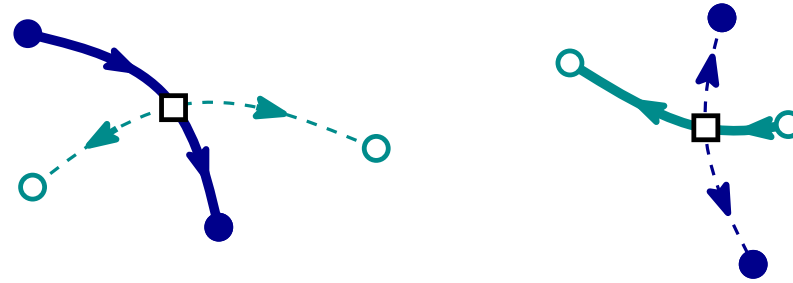


Quels sont les cycles essentiels ?

Quelles sont les arêtes rigides ?

Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$



Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

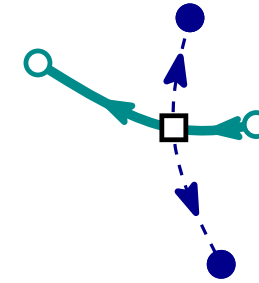
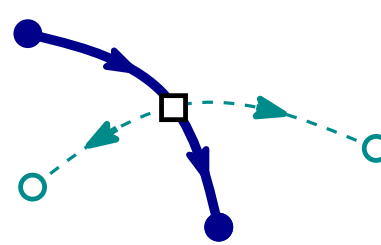
Pour simplifier on prend M sans isthme.

Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.

Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

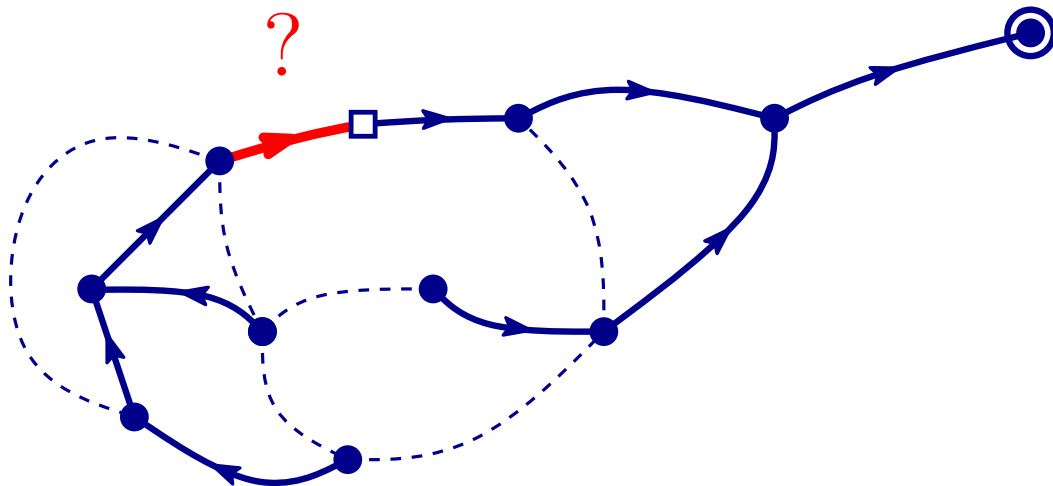


Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

Pour simplifier on prend M sans isthme.

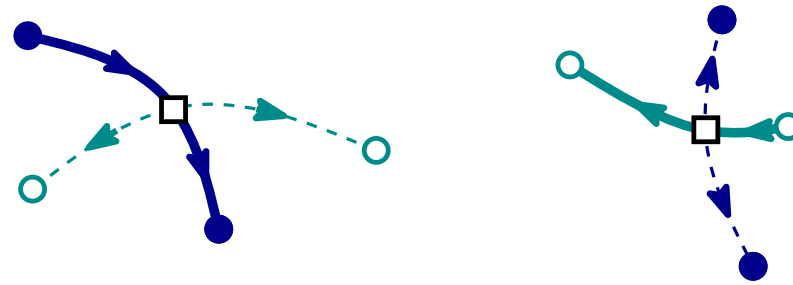
Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

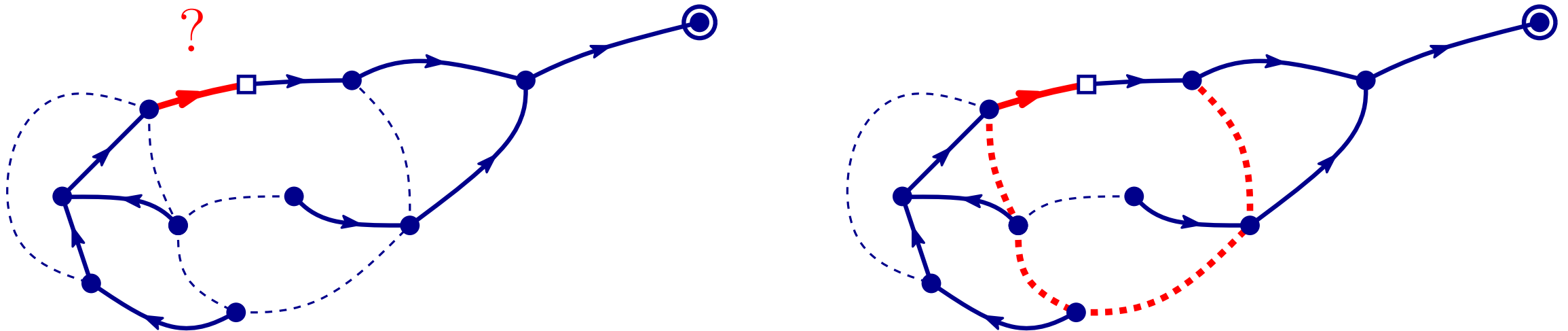


Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

Pour simplifier on prend M sans isthme.

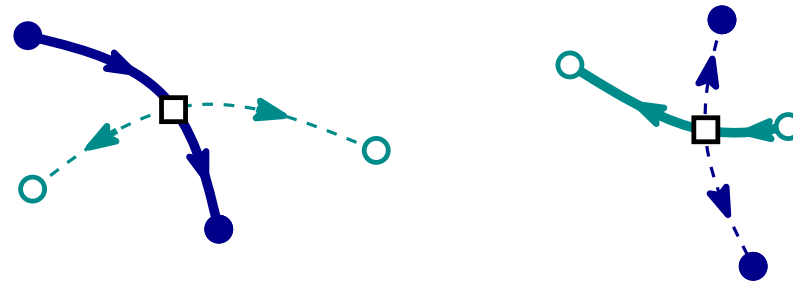
Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

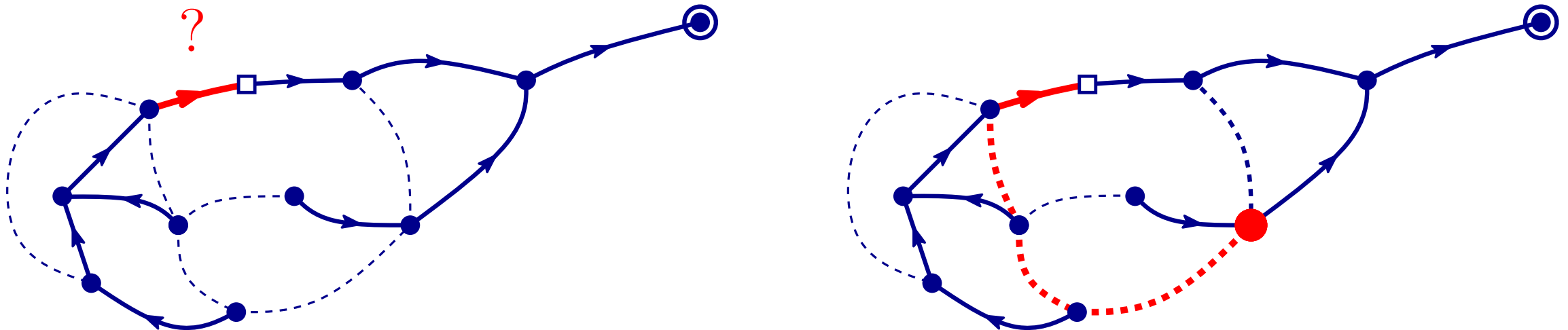


Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

Pour simplifier on prend M sans isthme.

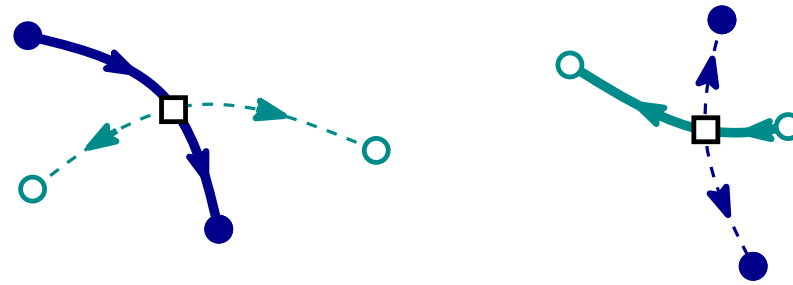
Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\bullet) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$

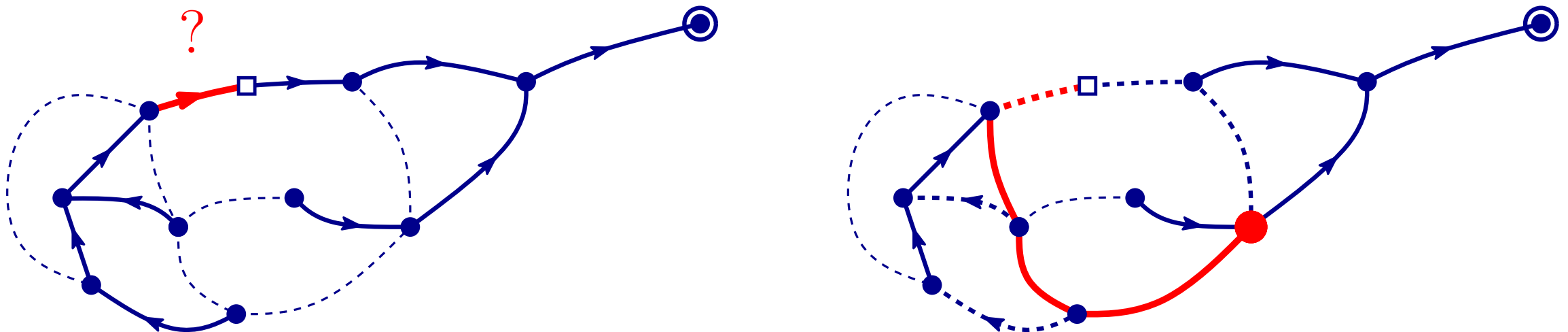


Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

Pour simplifier on prend M sans isthme.

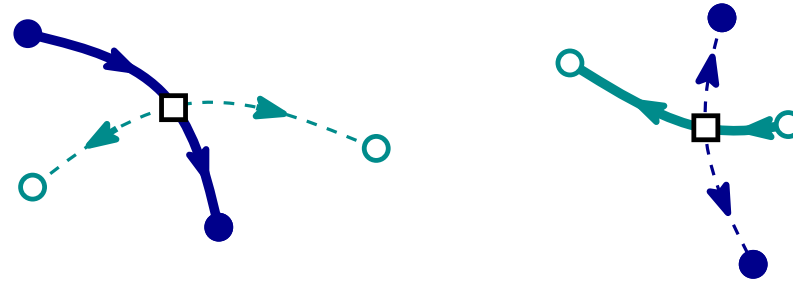
Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

$$\begin{cases} \alpha_T(\odot) = \alpha_T(\ominus) = 0 \\ \alpha_T(\circ) = \alpha_T(\bullet) = 1 \\ \alpha_T(\square) = 3 \end{cases}$$



Quels sont les cycles essentiels ? Quelles sont les arêtes rigides ?

Pour simplifier on prend M sans isthme.

Propriété :

Les seules arêtes rigides sont les arêtes incidentes au sommet racine.

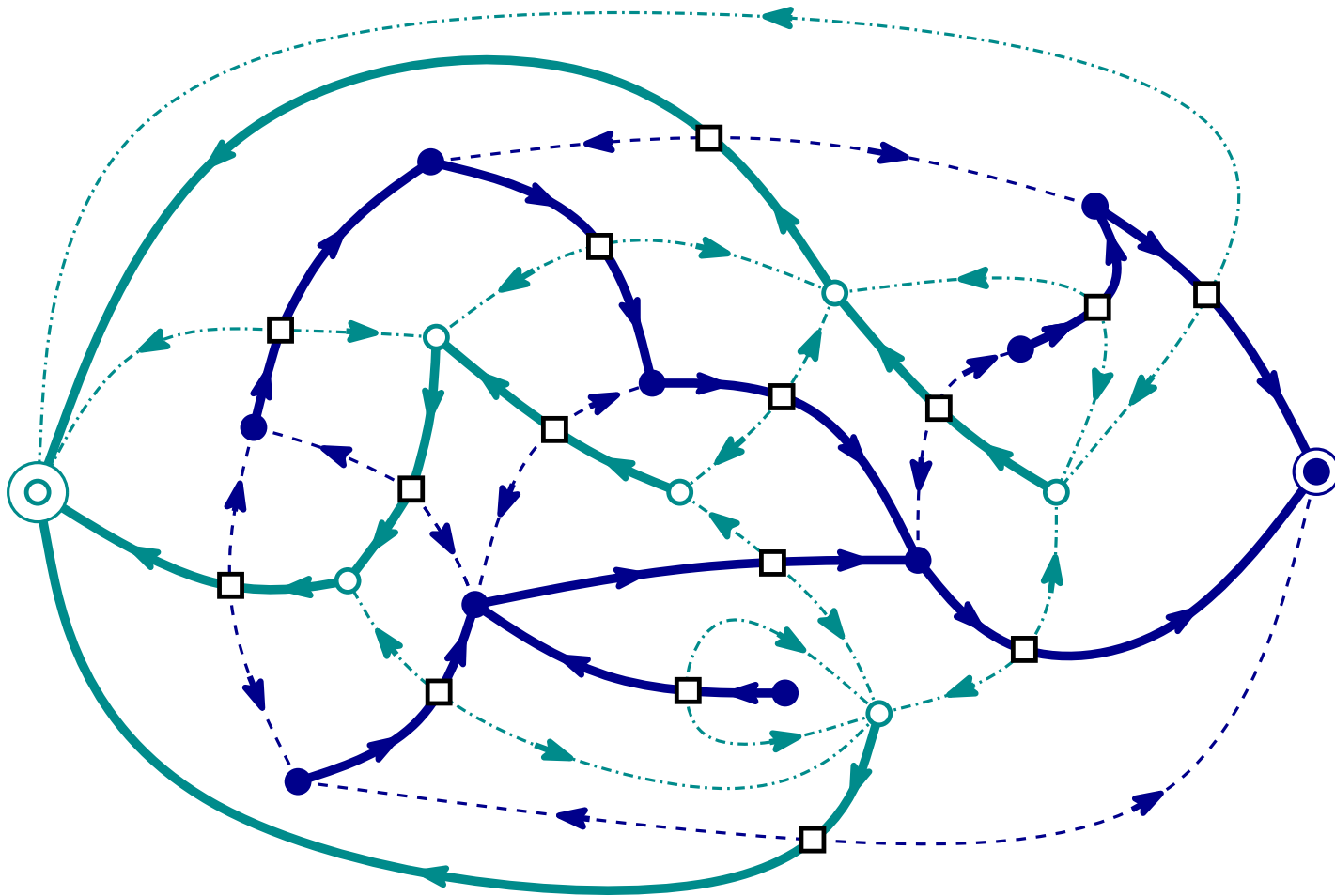
Propriété :

Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.

Structure de treillis sur les arbres couvrants.

Propriété :

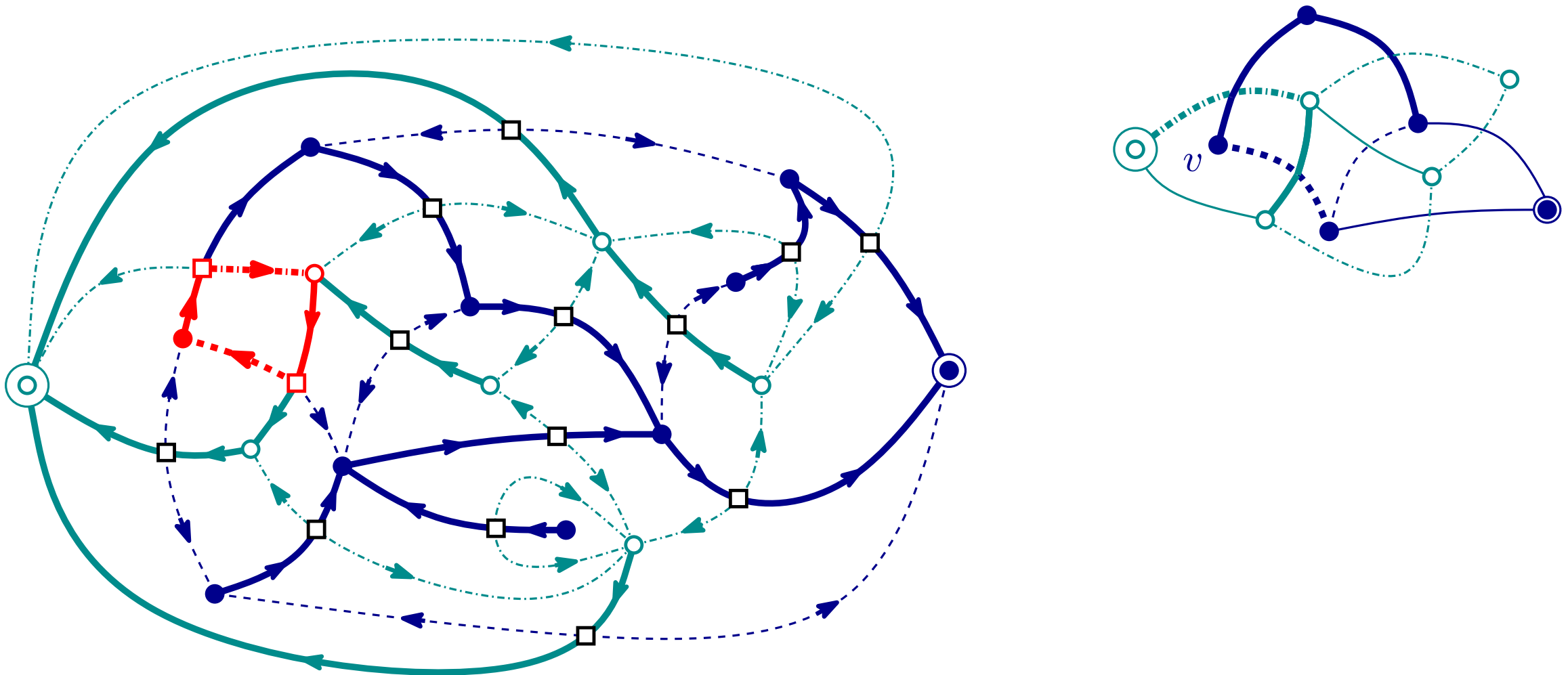
Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

Propriété :

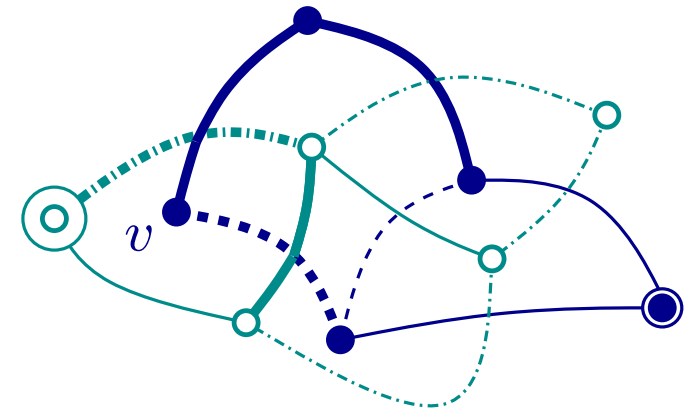
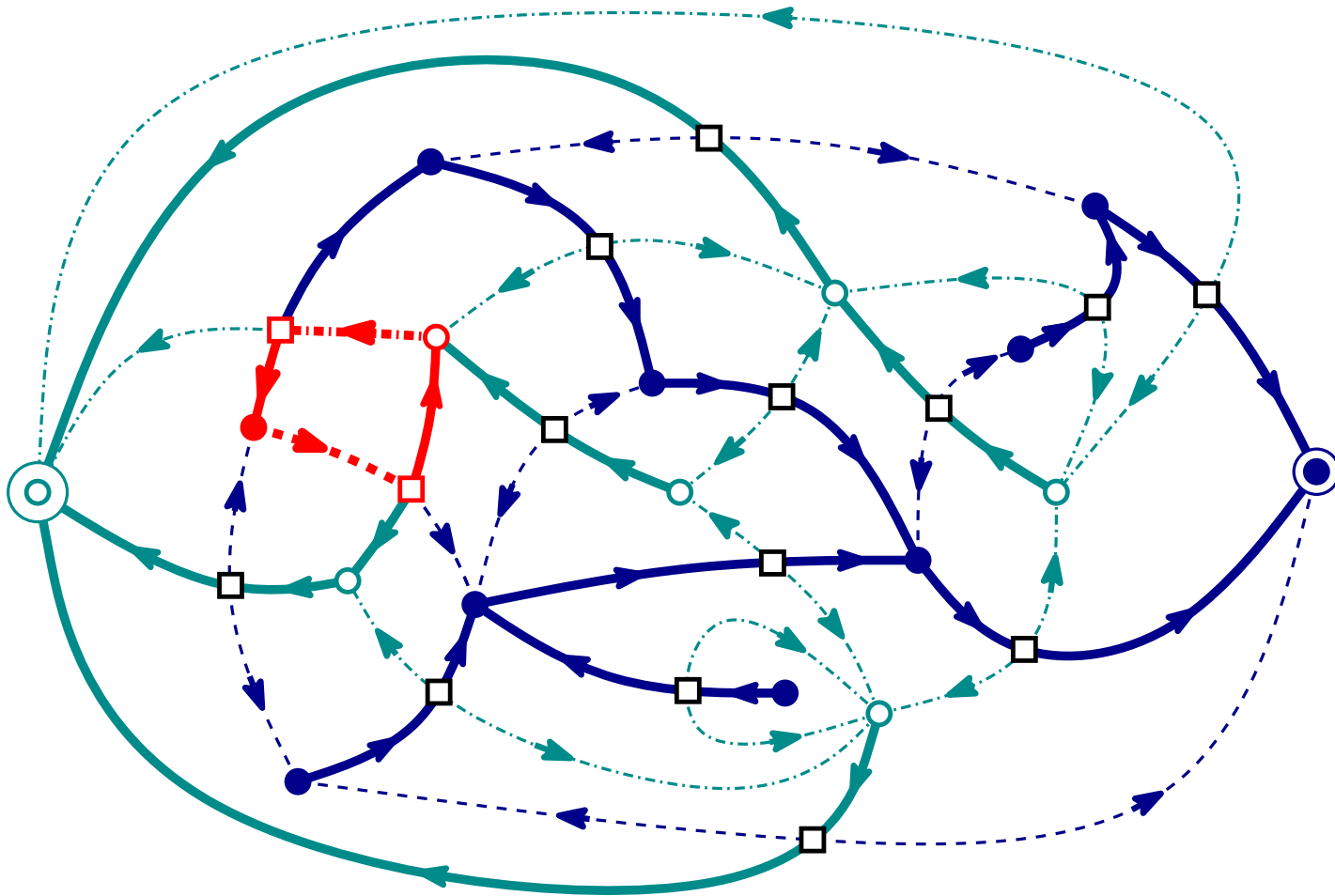
Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

Propriété :

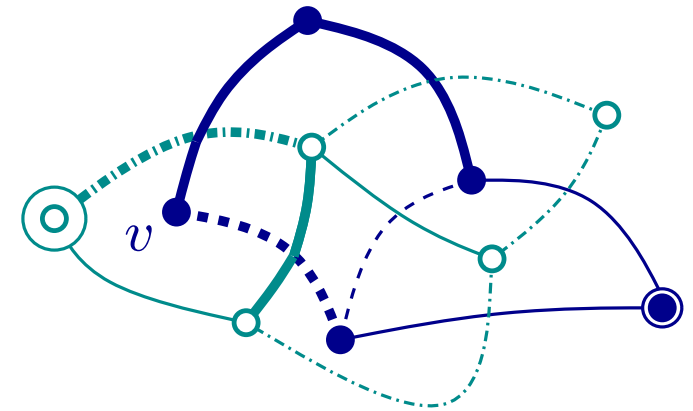
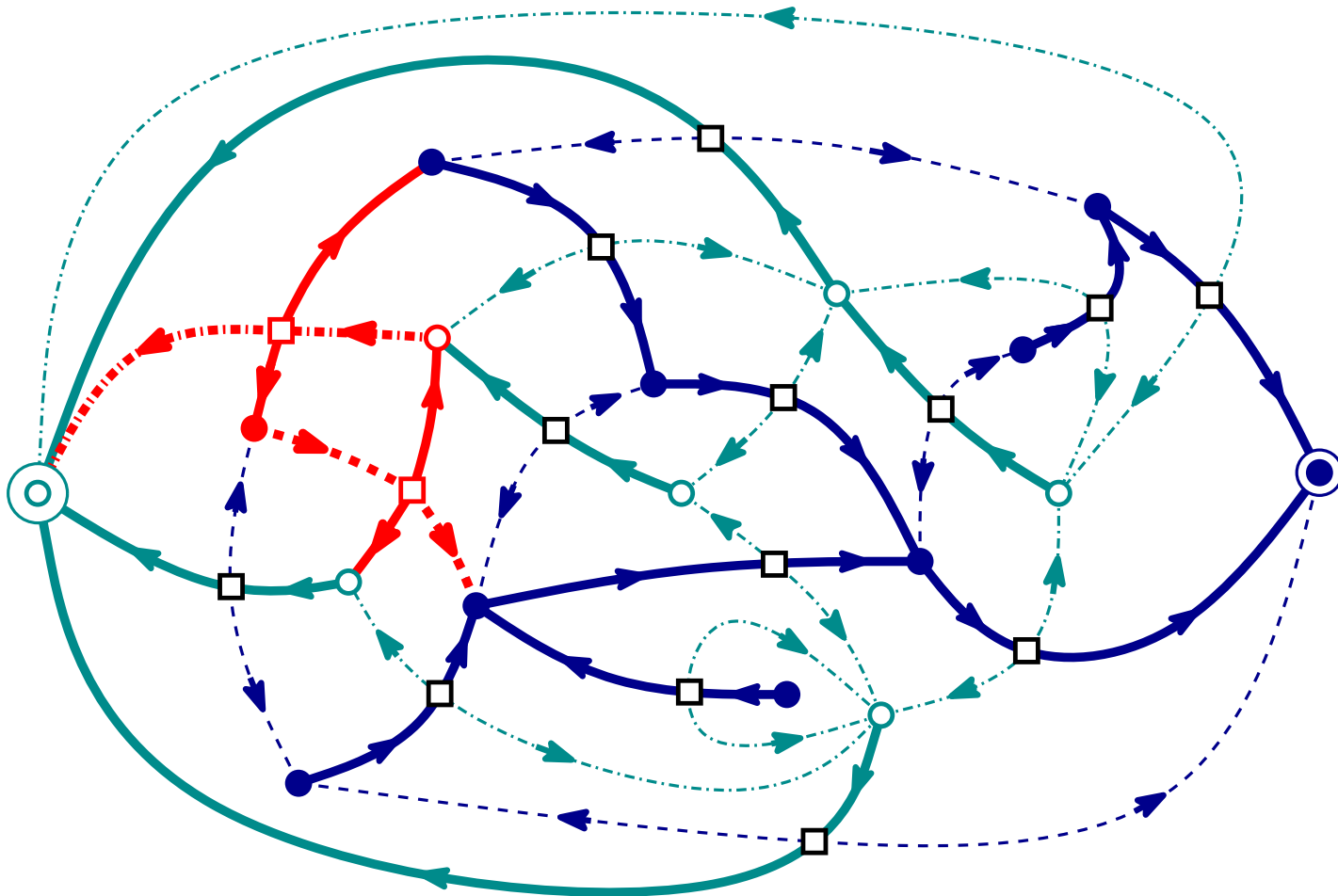
Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.



Structure de treillis sur les arbres couvrants.

Propriété :

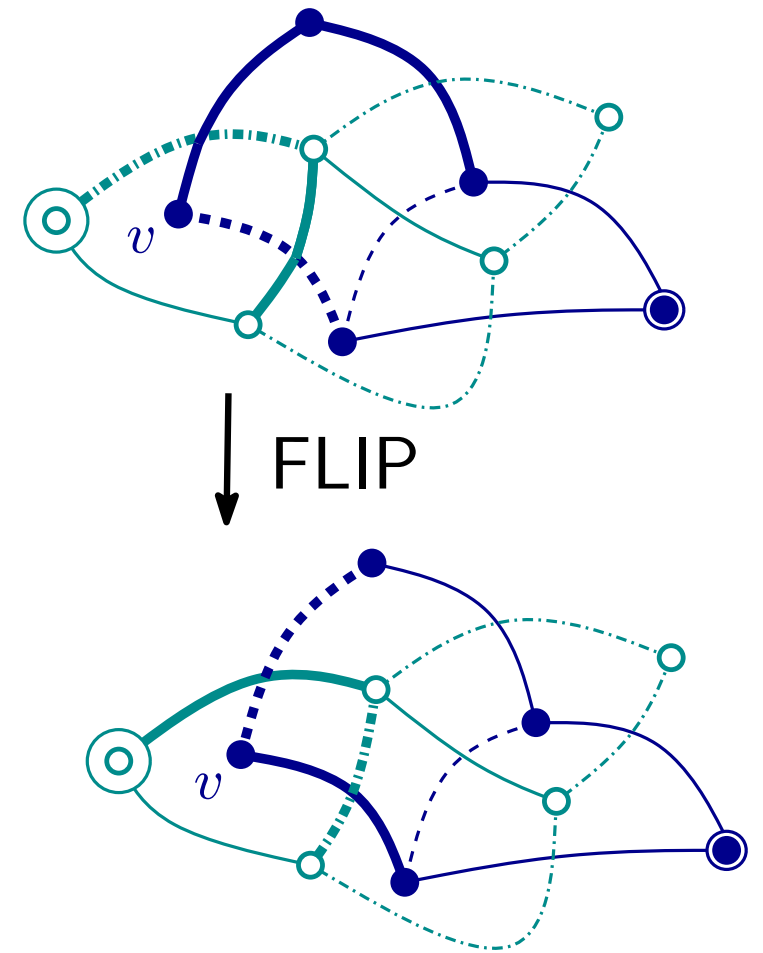
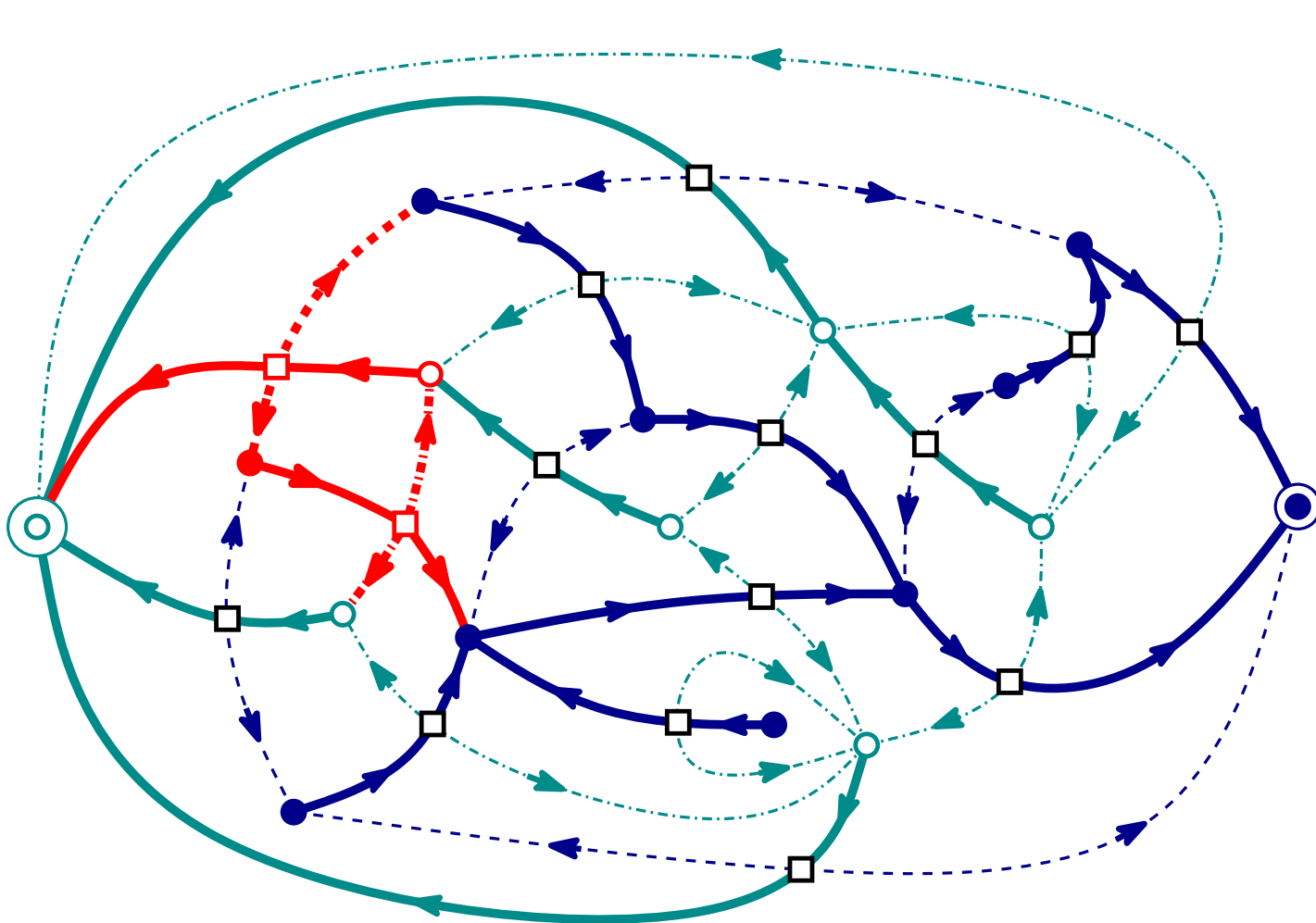
Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.



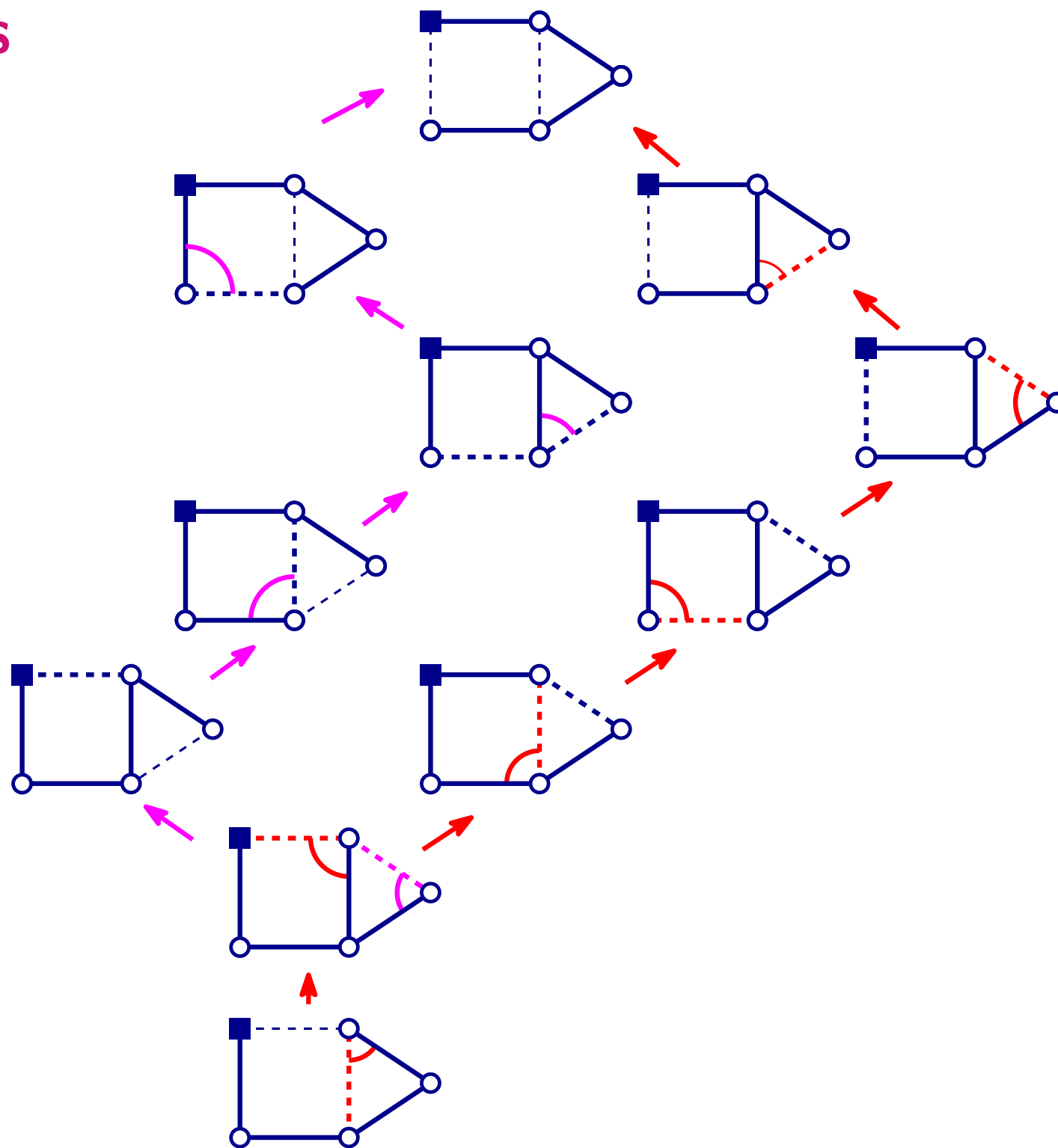
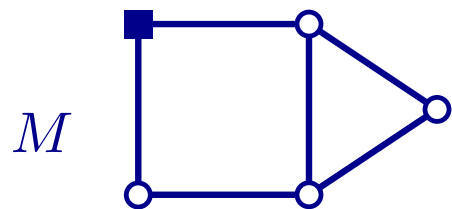
Structure de treillis sur les arbres couvrants.

Propriété :

Les cycles essentiels sont les cycles faciaux de \tilde{M} ne contenant pas de sommets racines.



Exemple de treillis

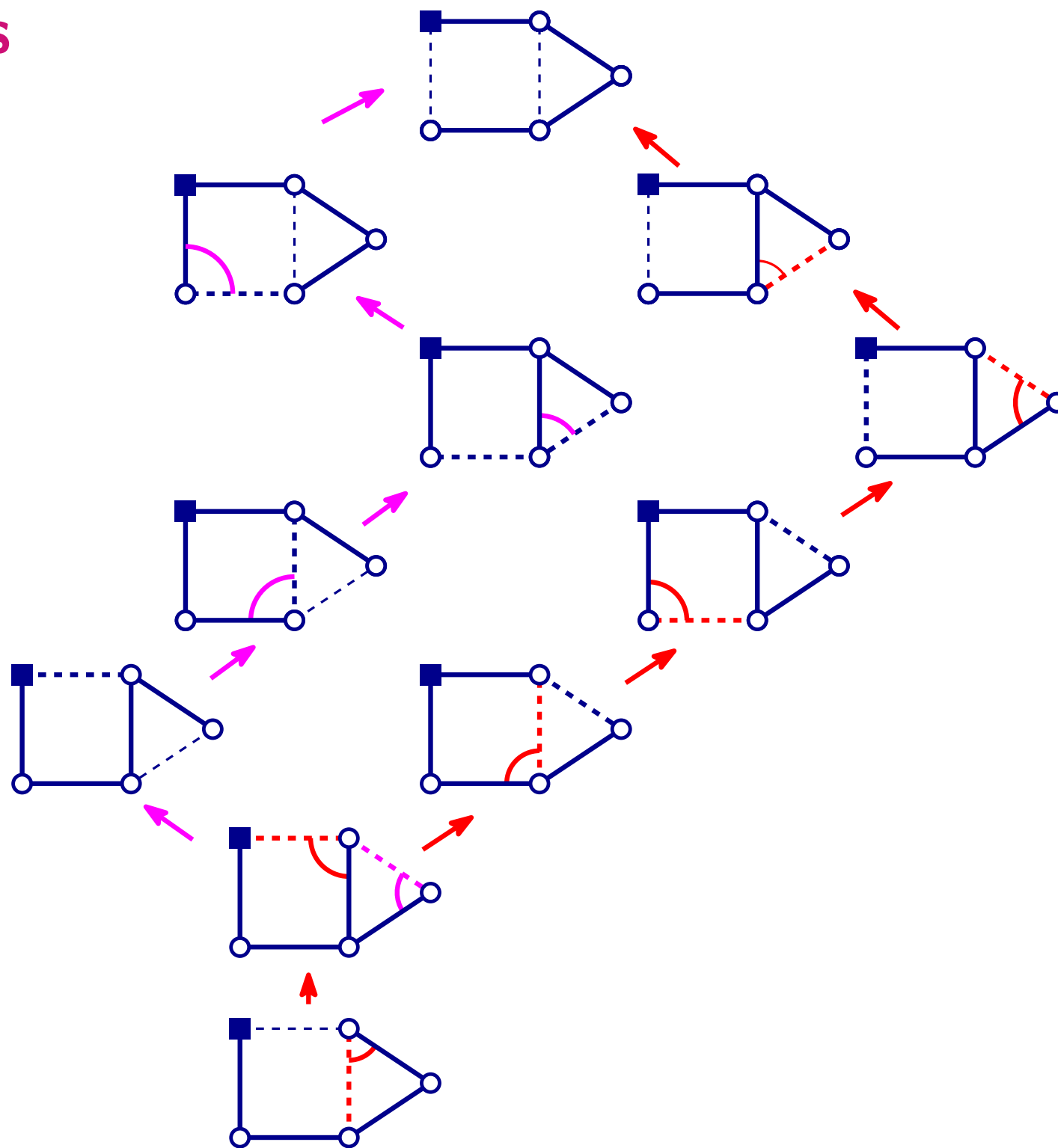
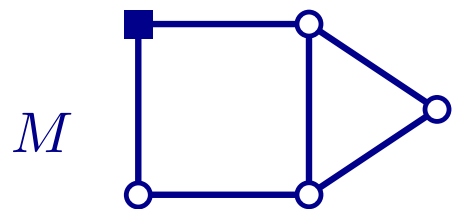


Applications :

couplages depuis le passé pour les treillis distributifs.

"facile" de générer un arbre couvrant, donne une façon de générer des couplages [Kenyon, Propp, Wilson]

Exemple de treillis



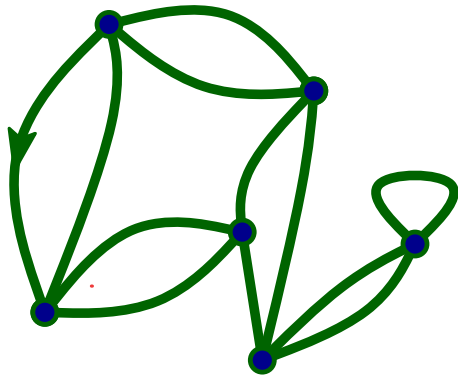
Applications :

couplages depuis le passé pour les treillis distributifs.

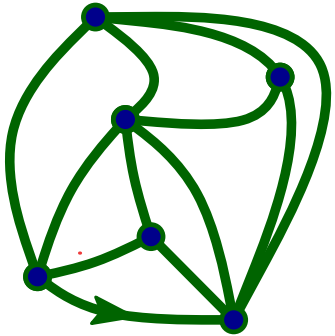
"facile" de générer un arbre couvrant, donne une façon de générer des couplages [Kenyon, Propp, Wilson]

Énumération des cartes

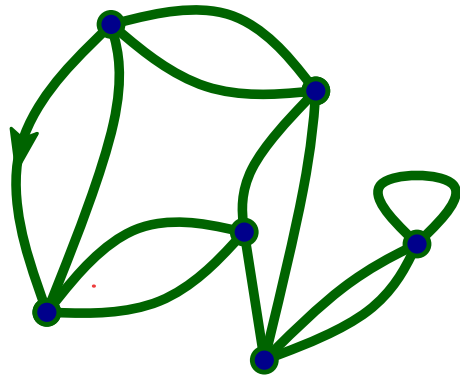
Cartes 4-régulières



Triangulations simples (pas de boucles ni d'arêtes multiples)



Énumération des cartes

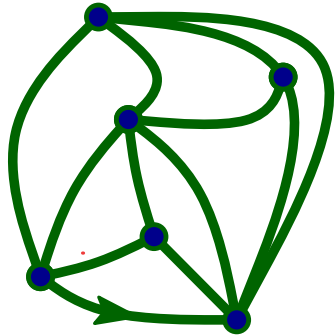


Cartes 4-régulières

Nombre de cartes 4-régulières enracinées à n sommets :

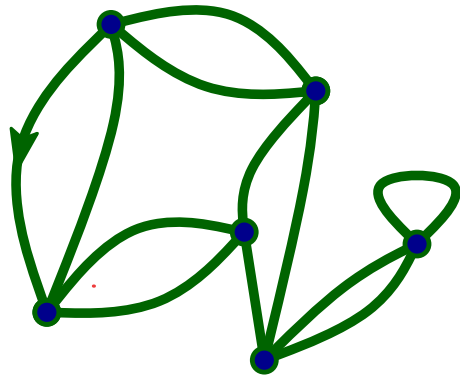
$$R_n = \frac{2 \cdot 3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

[Tutte, 62], [Schaeffer '97]



Triangulations simples (pas de boucles ni d'arêtes multiples)

Énumération des cartes

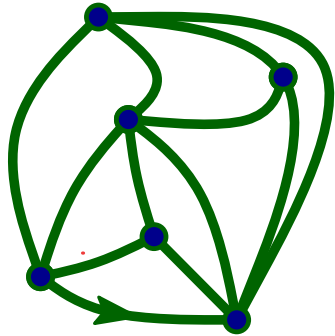


Cartes 4-régulières

Nombre de cartes 4-régulières enracinées à n sommets :

$$R_n = \frac{2 \cdot 3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

[Tutte, 62], [Schaeffer '97]



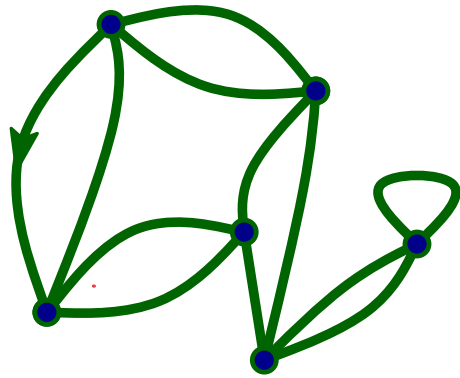
Triangulations simples (pas de boucles ni d'arêtes multiples)

Nombre de triangulations simple à $n + 2$ sommets :

$$\Delta_n = \frac{2 \cdot (4n - 3)!}{n!(3n - 1)!}$$

[Tutte, 62],
[Poulalhon-Schaeffer '05]

Énumération des cartes

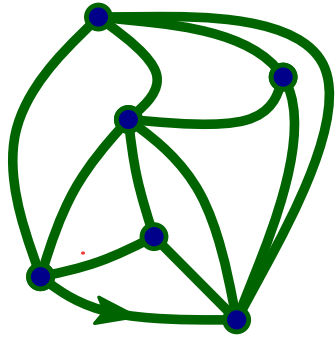


Cartes 4-régulières

Nombre de cartes 4-régulières enracinées à n sommets :

$$R_n = \frac{2 \cdot 3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

[Tutte, 62], [Schaeffer '97]



Triangulations simples (pas de boucles ni d'arêtes multiples)

Nombre de triangulations simple à $n + 2$ sommets :

$$\Delta_n = \frac{2 \cdot (4n - 3)!}{n!(3n - 1)!}$$

[Tutte, 62],
[Poulalhon-Schaeffer '05]

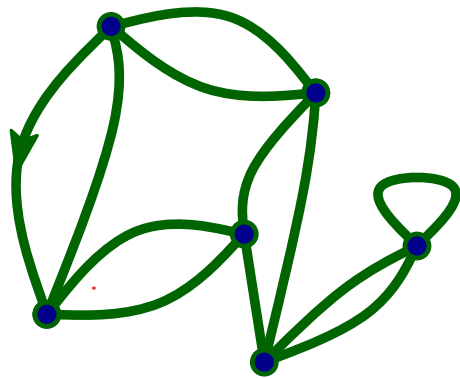
De nombreuses méthodes pour énumérer les cartes :

décomposition récursive [Tutte '60s + ...], intégrales de matrices [t'Hooft '74 + ...]

Preuves bijectives [Cori-Vauquelin-Schaeffer, BDG, Bernardi, Fusy, Poulalhon, ...]

= bijections entre cartes et arbres étiquetés ou entre cartes et arbres bourgeonnants.

Énumération des cartes

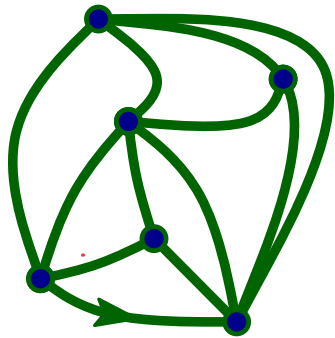


Cartes 4-régulières

Nombre de cartes 4-régulières enracinées à n sommets :

$$R_n = \frac{2 \cdot 3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

[Tutte, 62], [Schaeffer '97]



Triangulations simples (pas de boucles ni d'arêtes multiples)

Nombre de triangulations simple à $n + 2$ sommets :

$$\Delta_n = \frac{2 \cdot (4n - 3)!}{n!(3n - 1)!}$$

[Tutte, 62],
[Poulalhon-Schaeffer '05]

De nombreuses méthodes pour énumérer les cartes :

décomposition récursive [Tutte '60s + ...], intégrales de matrices [t'Hooft '74 + ...]

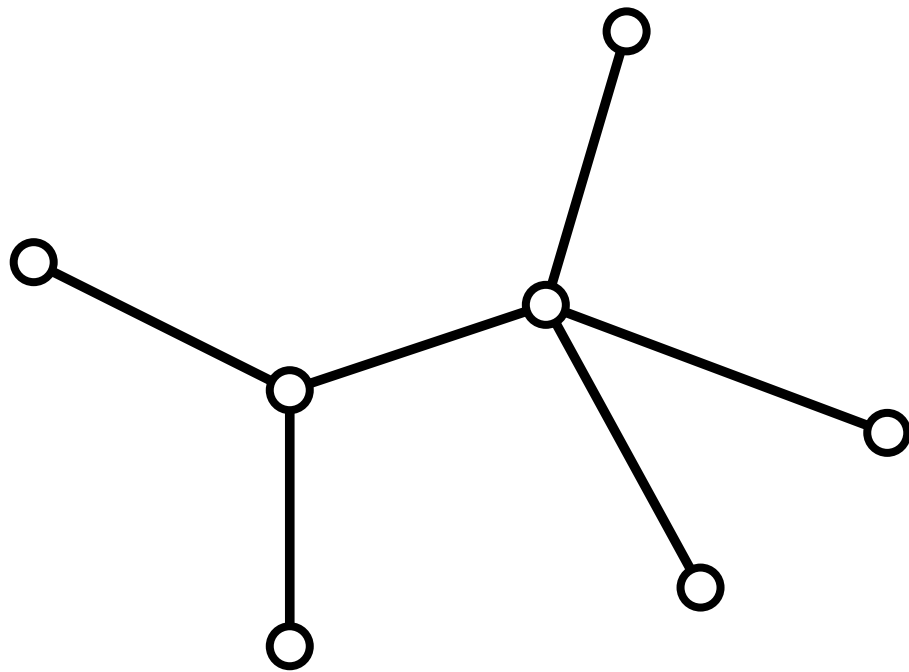
Preuves bijectives [Cori-Vauquelin-Schaeffer, BDG, Bernardi, Fusy, Poulalhon, ...]

= bijections entre cartes et arbres étiquetés ou entre cartes et arbres bourgeonnants.

Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

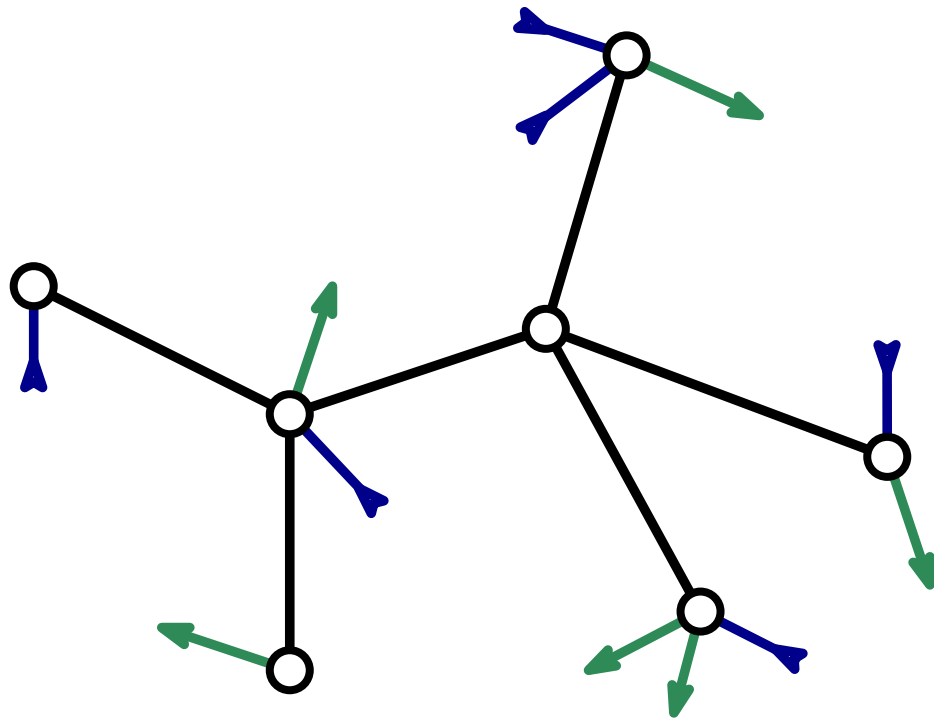
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

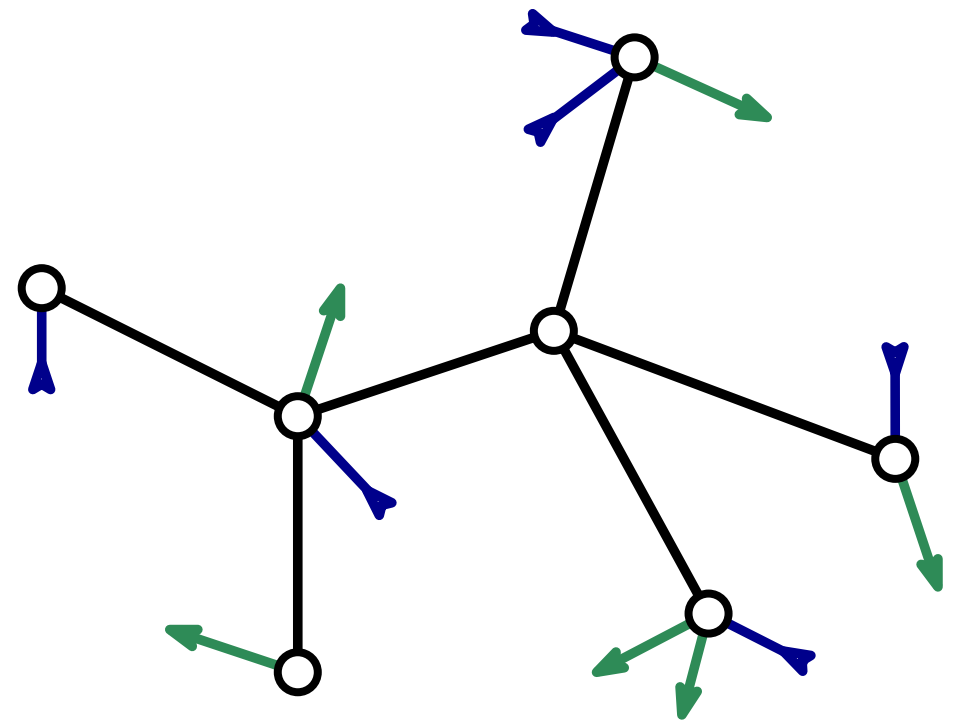
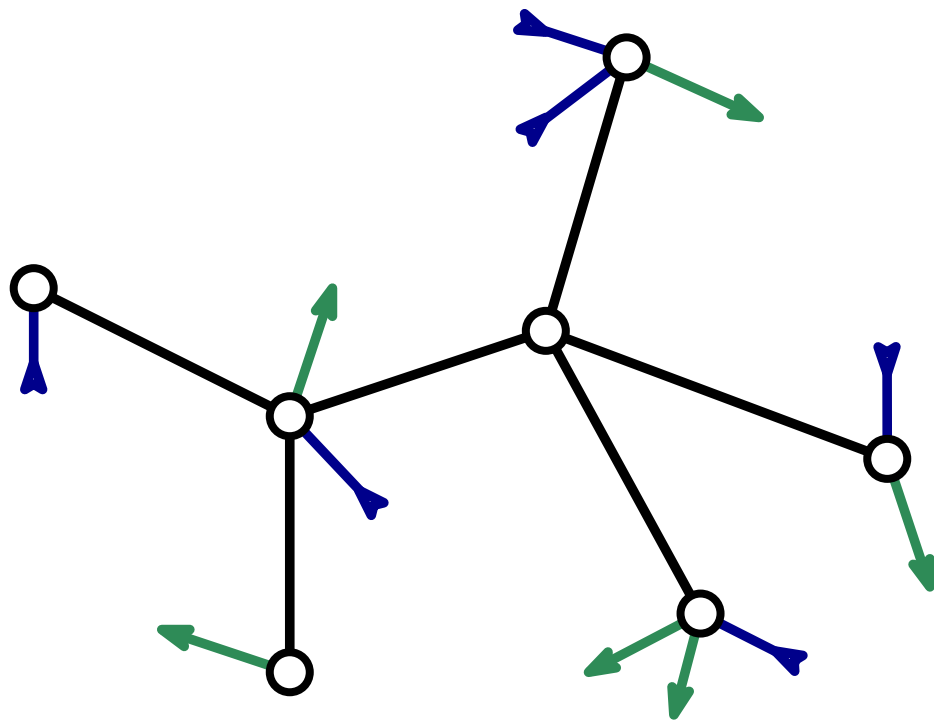
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

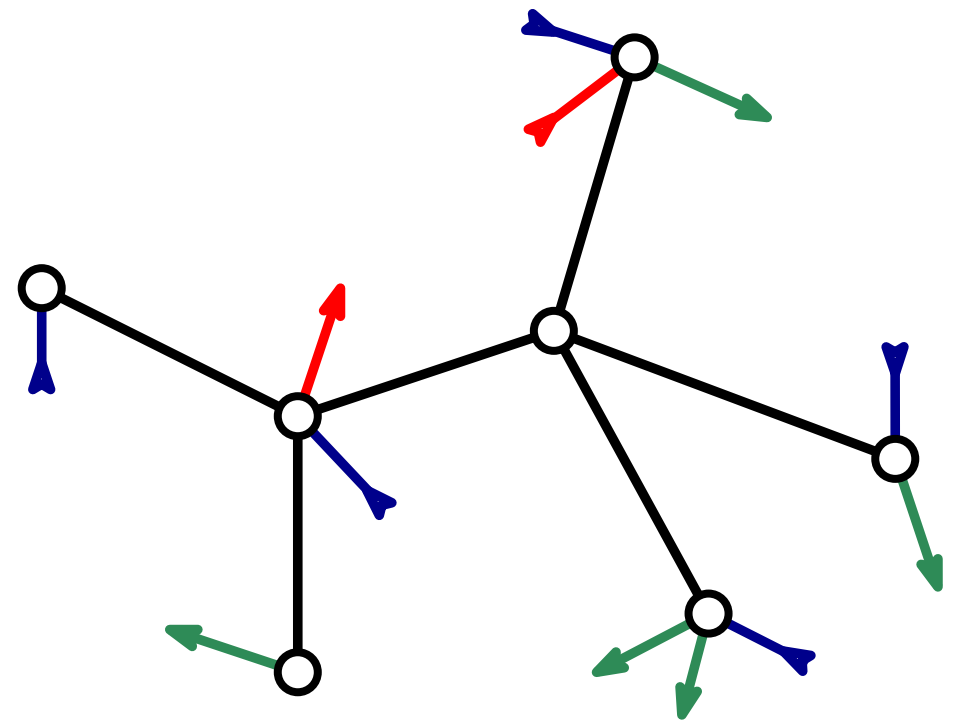
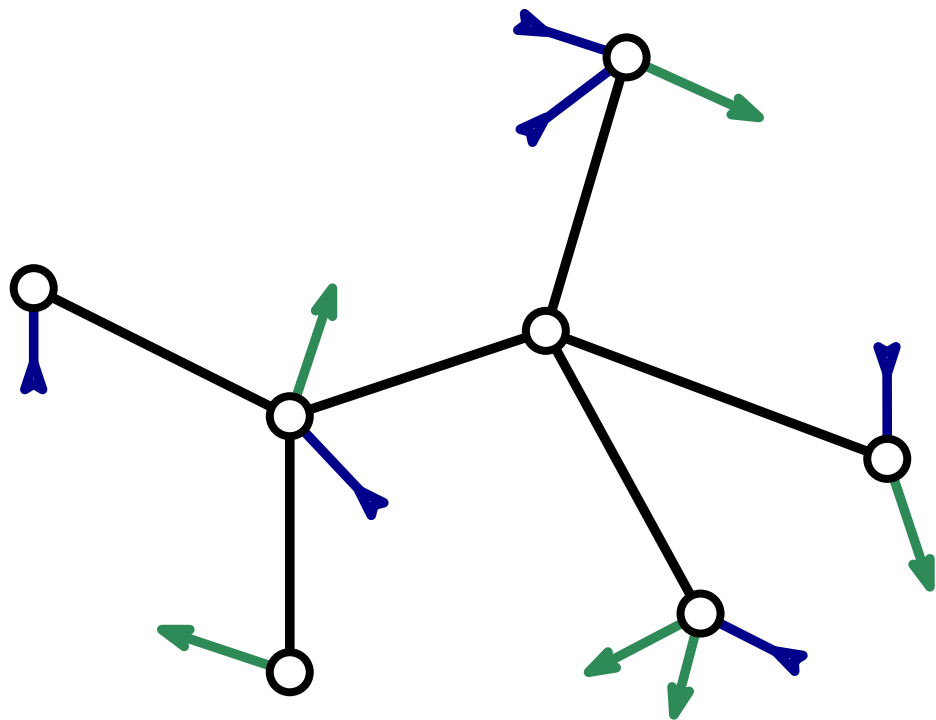
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

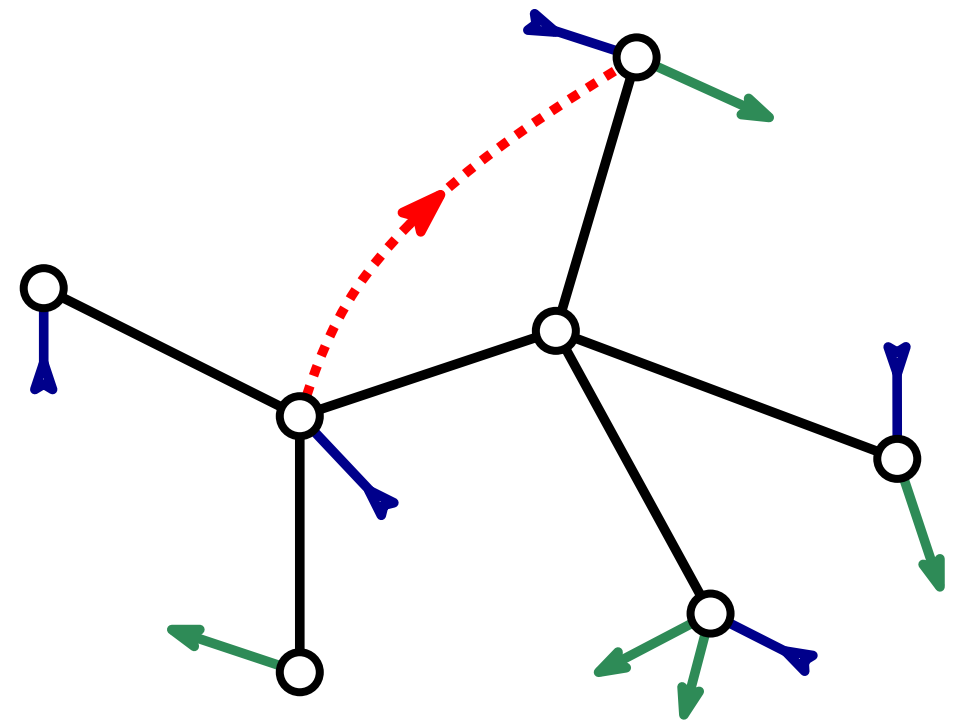
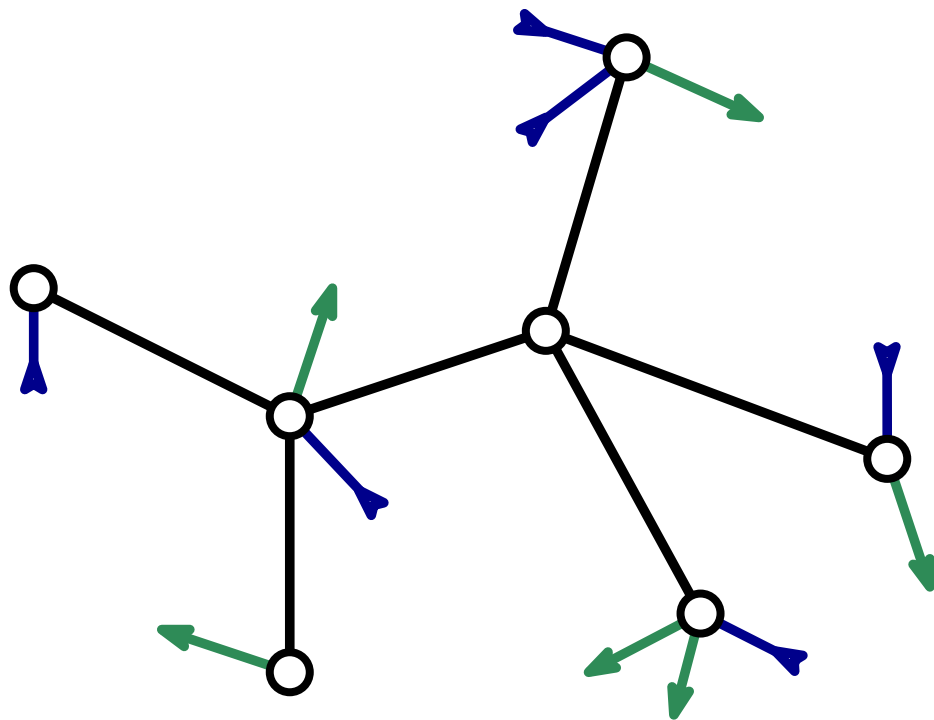
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

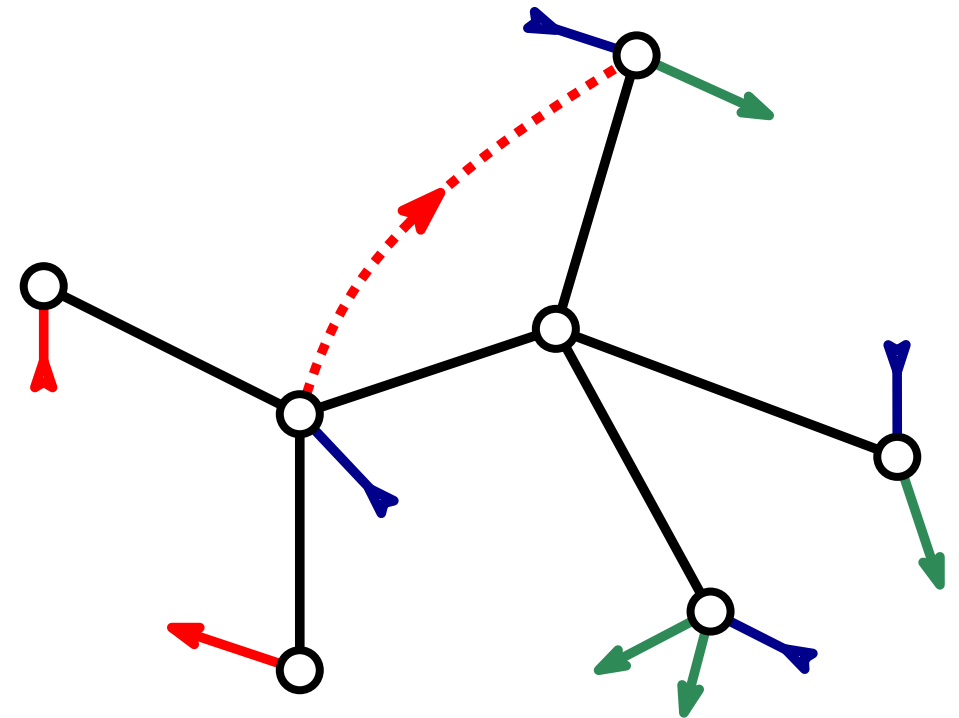
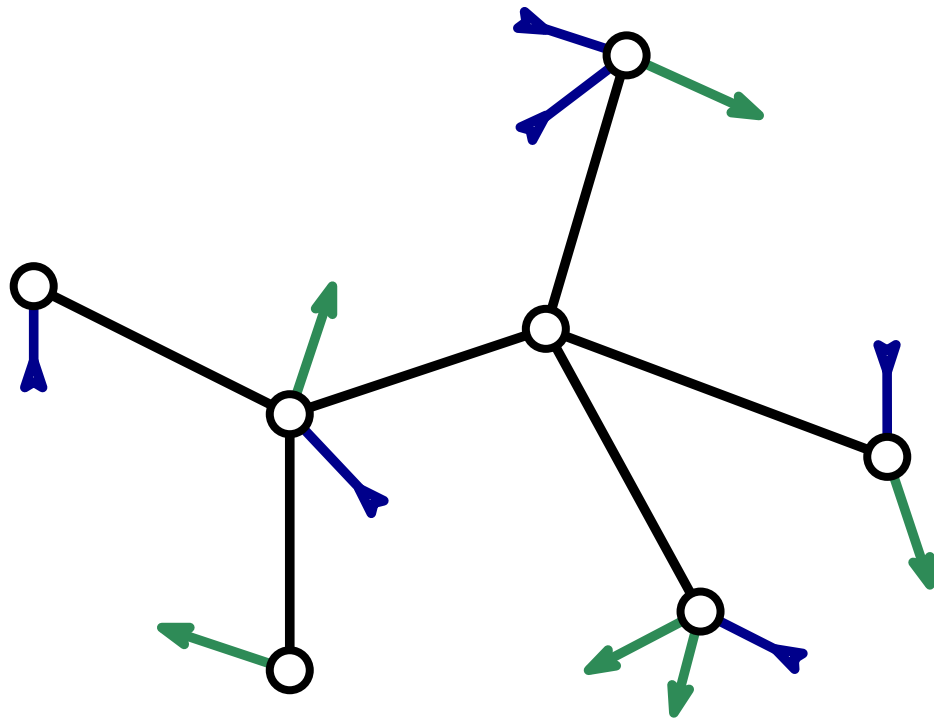
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

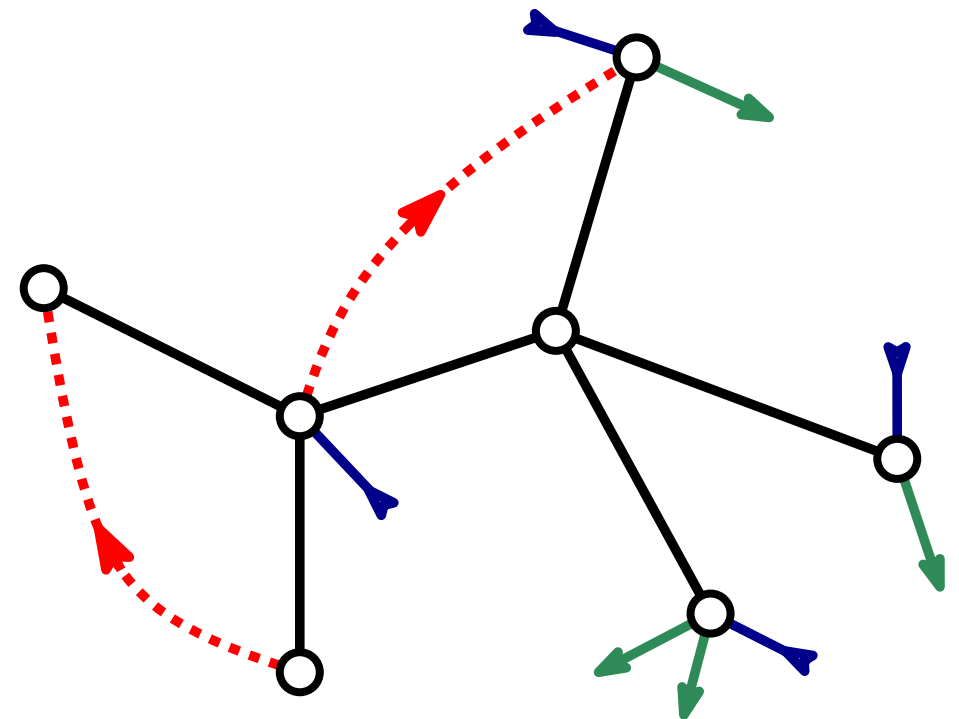
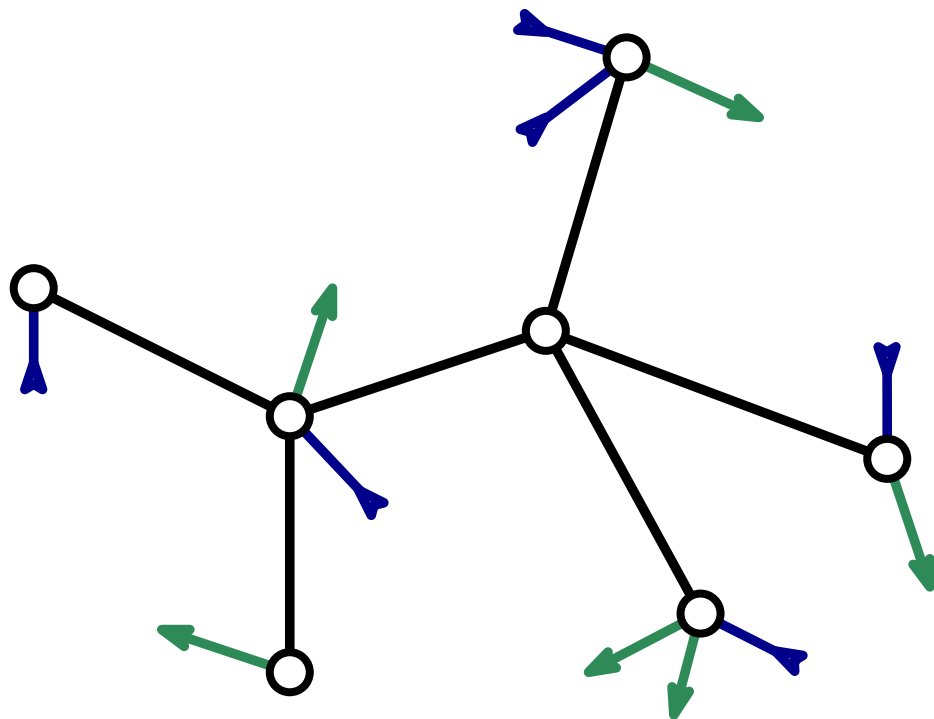
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

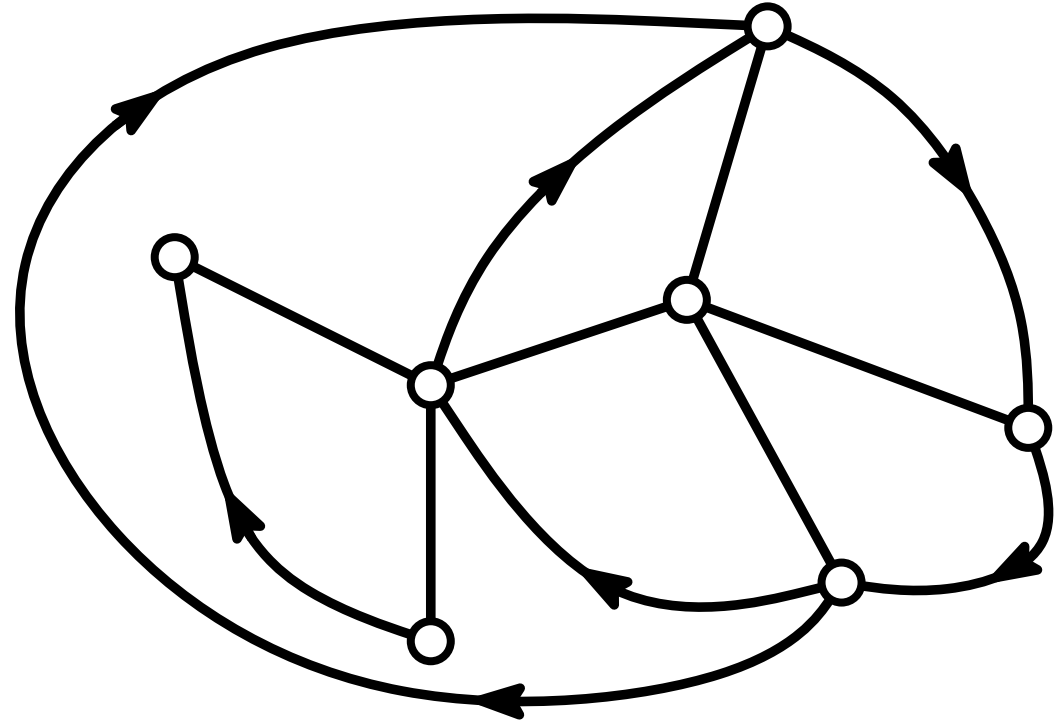
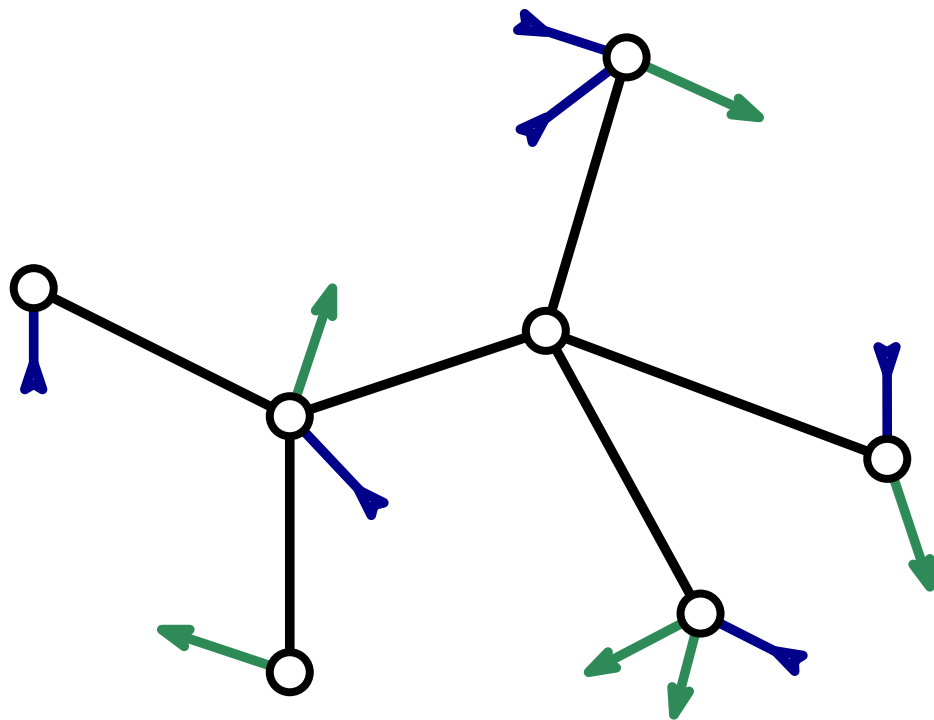
$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



Arbre bourgeonnant

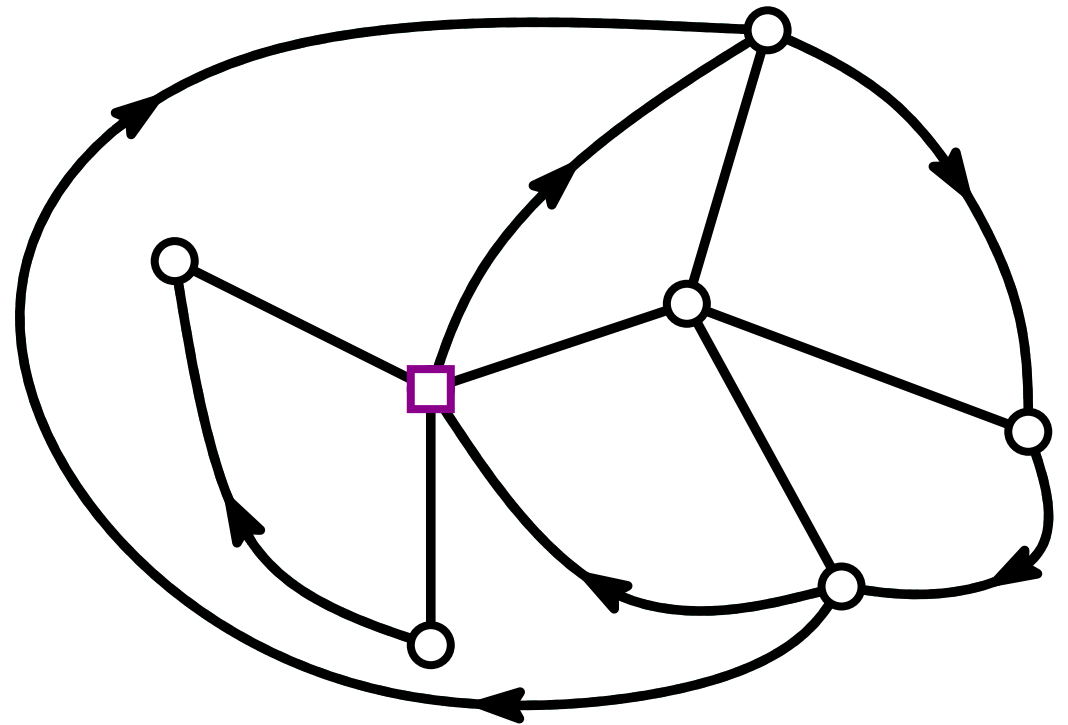
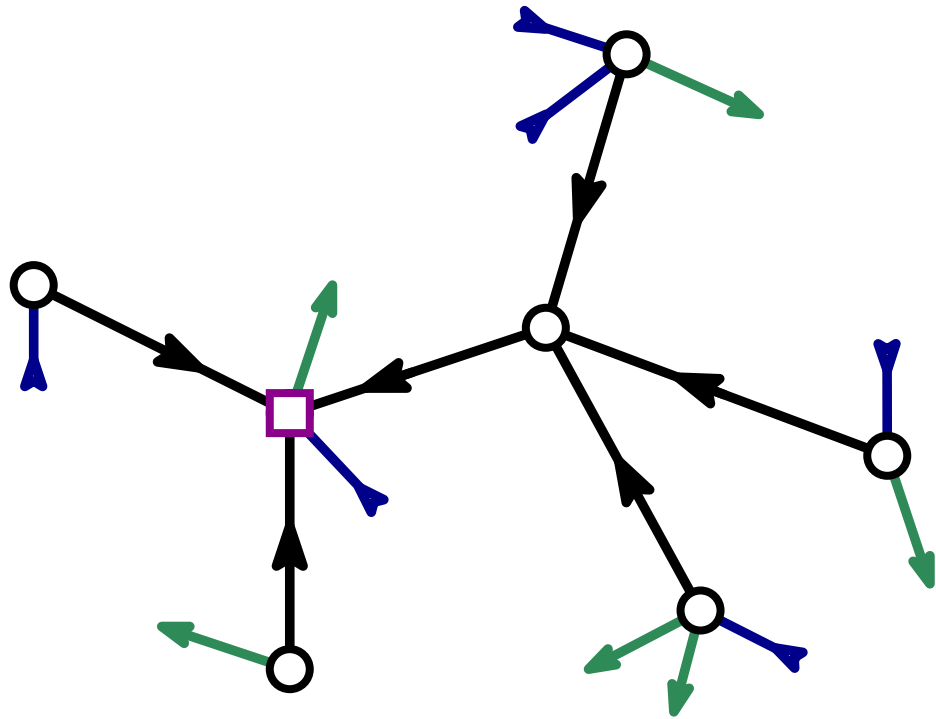
Un **arbre bourgeonnant** est un arbre plan dont les sommets peuvent porter des **bourgeons ouvrants** ou des **bourgeons fermants** et tel que :

$$\# \text{ bourgeons ouvrants} = \# \text{ bourgeons fermants}$$



En réalisant les clôtures en un sens horaire, on associe canoniquement une carte plane à un arbre bourgeonnant.

Arbre bourgeonnant

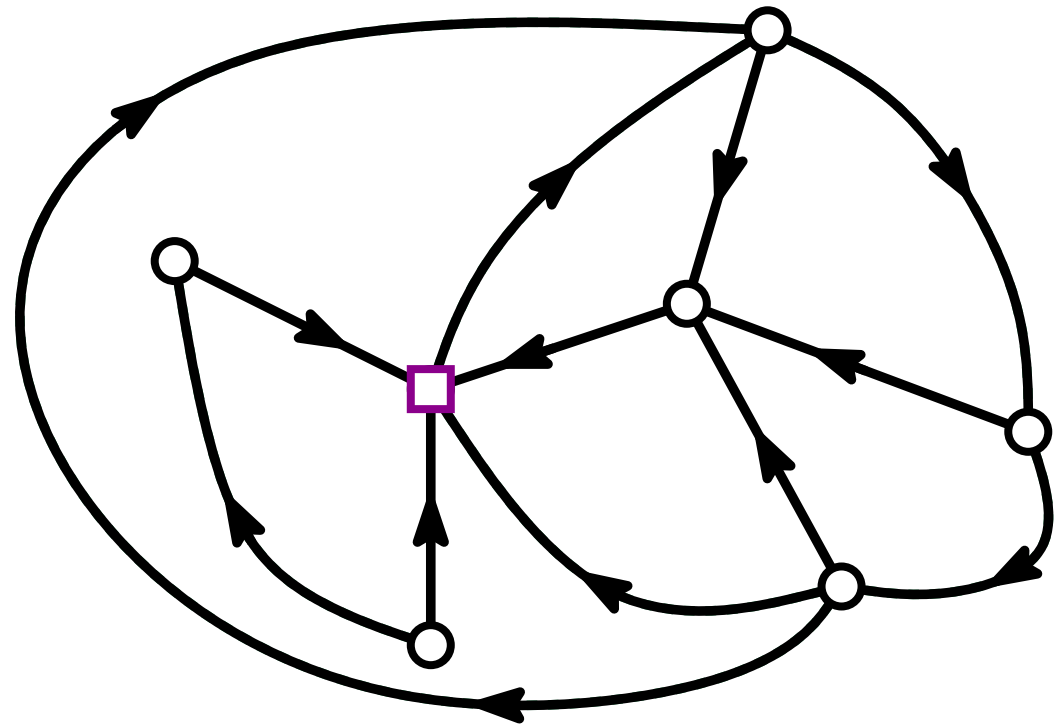
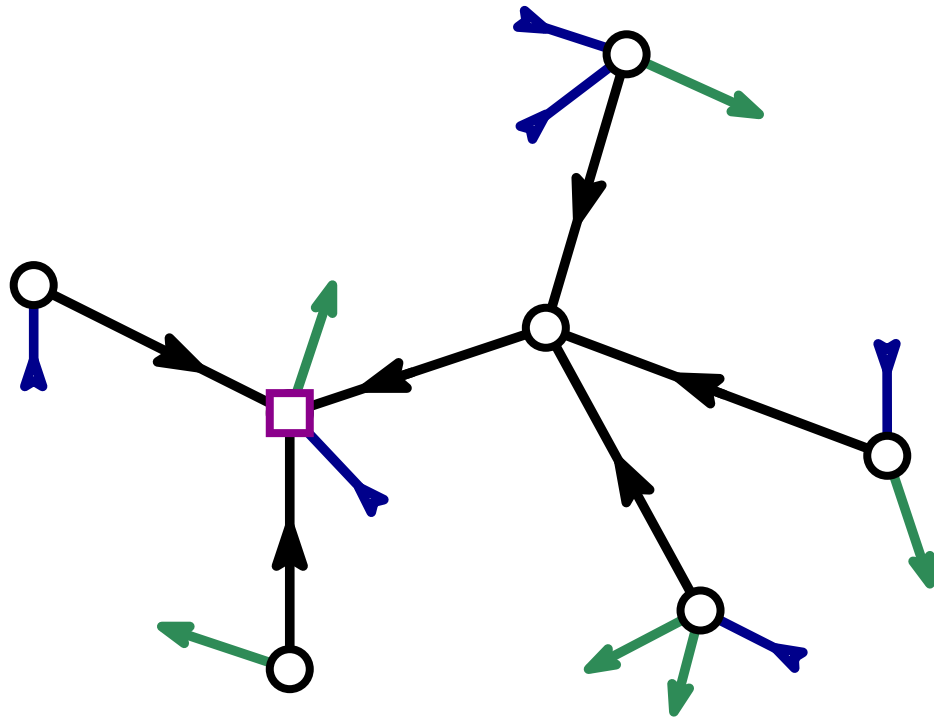


En réalisant les clôtures en un sens horaire, on associe canoniquement une carte plane à un arbre bourgeonnant.

Si l'arbre est enracinée et ses arêtes orientées vers la racine + arêtes de clôture orientées canoniquement

⇒ Orientation accessible de la carte sans cycle antihoraire

Arbre bourgeonnant



En réalisant les clôtures en un sens horaire, on associe canoniquement une carte plane à un arbre bourgeonnant.

Si l'arbre est enracinée et ses arêtes orientées vers la racine + arêtes de clôture orientées canoniquement

⇒ Orientation accessible de la carte sans cycle antihoraire

Peut-on toujours transformer une carte plane en un arbre bourgeonnant ?

Théorème [Bernardi '07], [A., Poulalhon '14+] :

Soit une carte plane M enracinée est munie d'une orientation **accessible** et **minimale** (= sans cycle antihoraire).

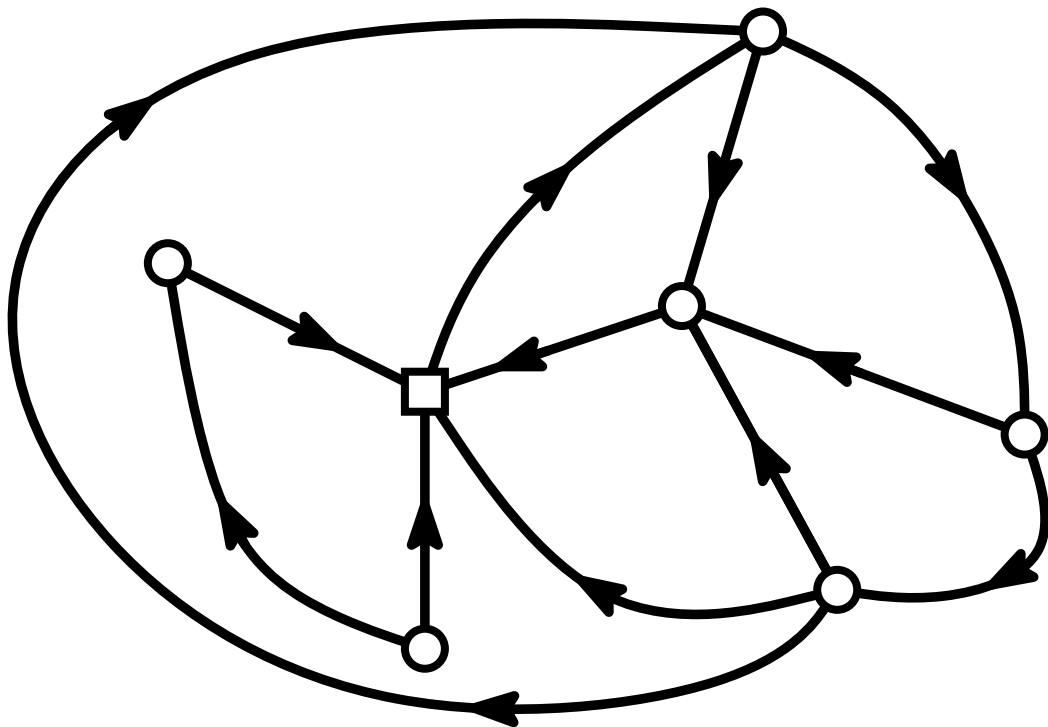
Alors, il existe un **unique** arbre bourgeonnant enraciné au même point et dont la clôture est M munie de la même orientation.

Peut-on toujours transformer une carte plane en un arbre bourgeonnant ?

Théorème [Bernardi '07], [A., Poulalhon '14+] :

Soit une carte plane M enracinée est munie d'une orientation **accessible** et **minimale** (= sans cycle antihoraire).

Alors, il existe un **unique** arbre bourgeonnant enraciné au même point et dont la clôture est M munie de la même orientation.

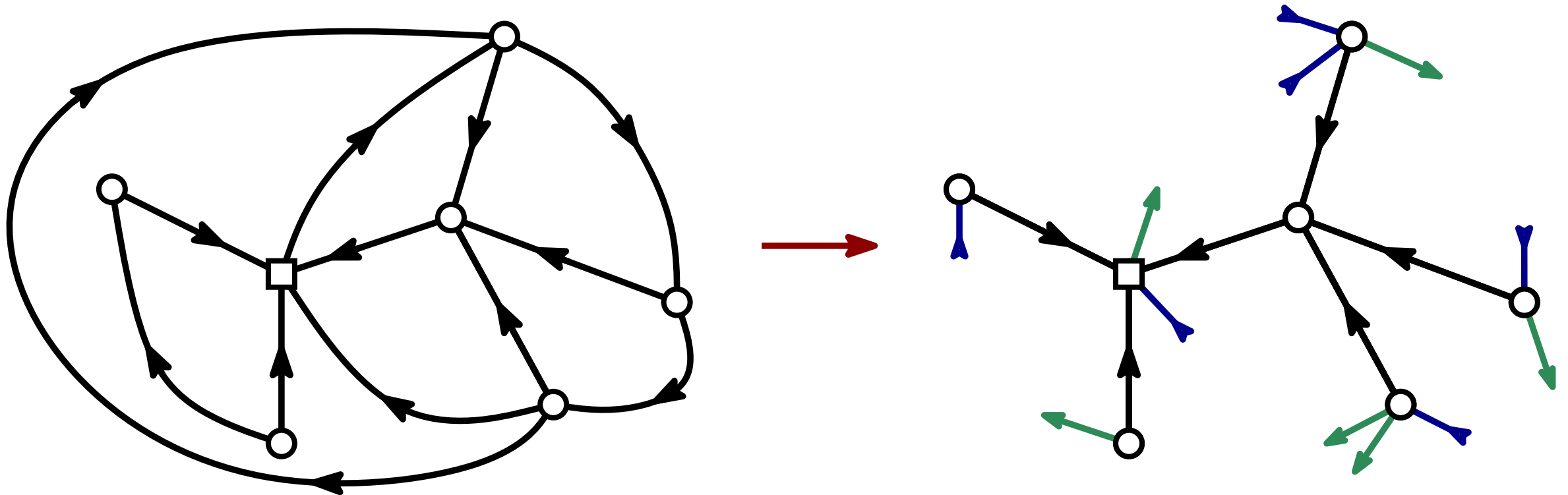


Peut-on toujours transformer une carte plane en un arbre bourgeonnant ?

Théorème [Bernardi '07], [A., Poulalhon

Soit une carte plane M enracinée est munie d'une orientation \vec{M} accessible et **minimale** (= sans cycle antihorlogaire). Alors, il existe un **unique** arbre bourgeonnant enraciné T et dont la clôture est M munie de la même orientation.

Preuve par induction sur le nombre de faces + identification des arêtes de clôture...



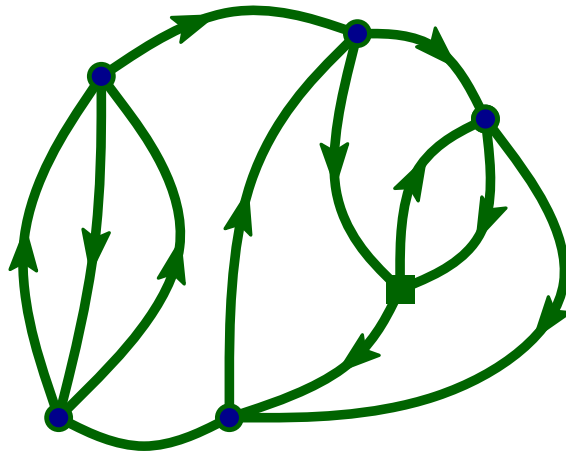
Orientations canoniques

On peut donc appliquer la construction dès qu'on dispose d'une **orientation canonique accessible** pour la famille de cartes qui nous intéresse.

Orientations canoniques

On peut donc appliquer la construction dès qu'on dispose d'une **orientation canonique accessible** pour la famille de cartes qui nous intéresse.

Cartes 4-régulières

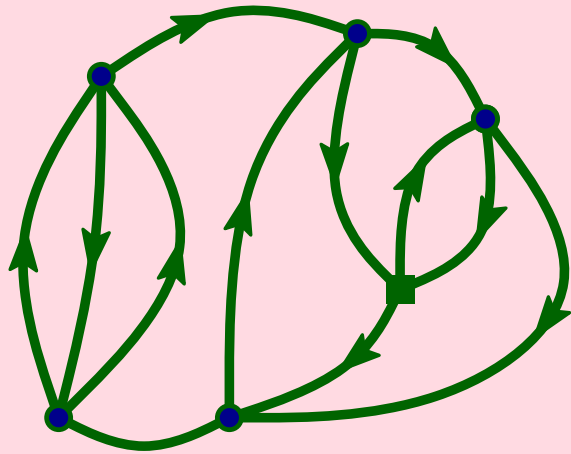


2 arêtes sortantes / sommet
2 arêtes entrantes / sommet

Orientations canoniques

On peut donc appliquer la construction dès qu'on dispose d'une **orientation canonique accessible** pour la famille de cartes qui nous intéresse.

Cartes 4-régulières



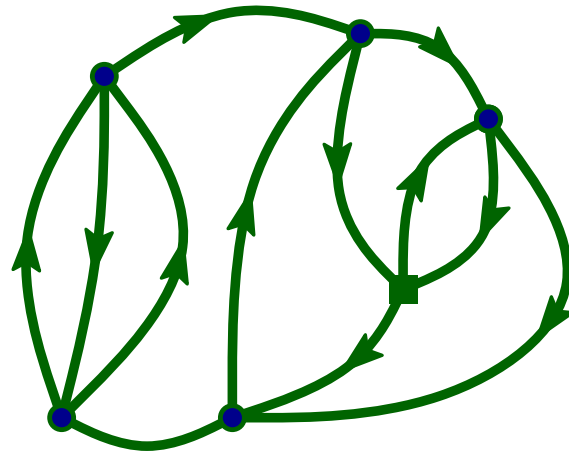
2 arêtes sortantes / sommet
2 arêtes entrantes / sommet

Une carte est 4-régulière ssi elle admet une orientation telle que chaque sommet a degré entrant 2 et degré sortant 2.

Orientations canoniques

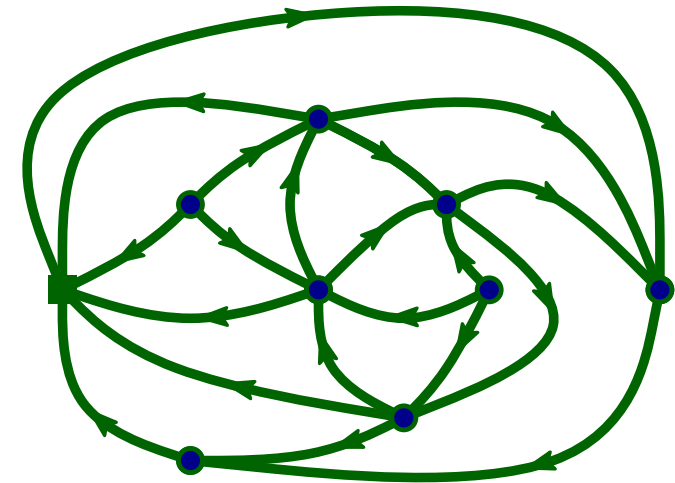
On peut donc appliquer la construction dès qu'on dispose d'une **orientation canonique accessible** pour la famille de cartes qui nous intéresse.

Cartes 4-régulières



2 arêtes sortantes / sommet
2 arêtes entrantes / sommet

Triangulations simples

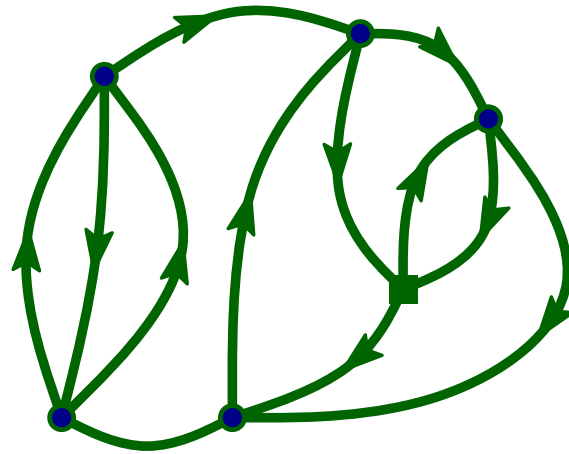


3 arêtes sortantes / sommet interne
1 arête sortante / sommet externe

Orientations canoniques

On peut donc appliquer la construction dès qu'on dispose d'une **orientation canonique accessible** pour la famille de cartes qui nous intéresse.

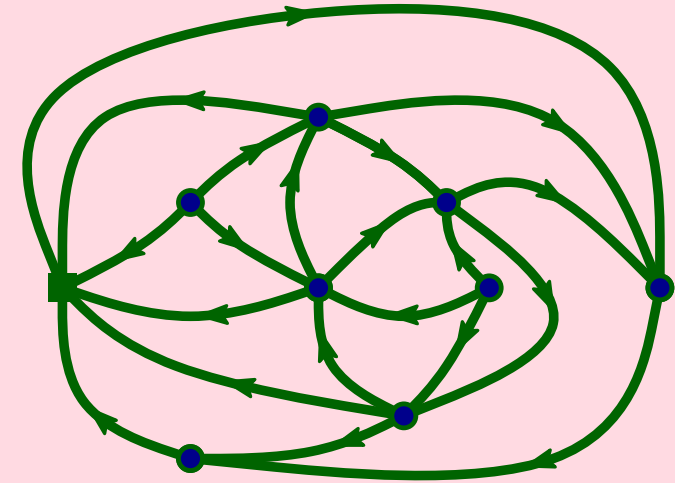
Cartes 4-régulières



2 arêtes sortantes / sommet
2 arêtes entrantes / sommet



Triangulations simples

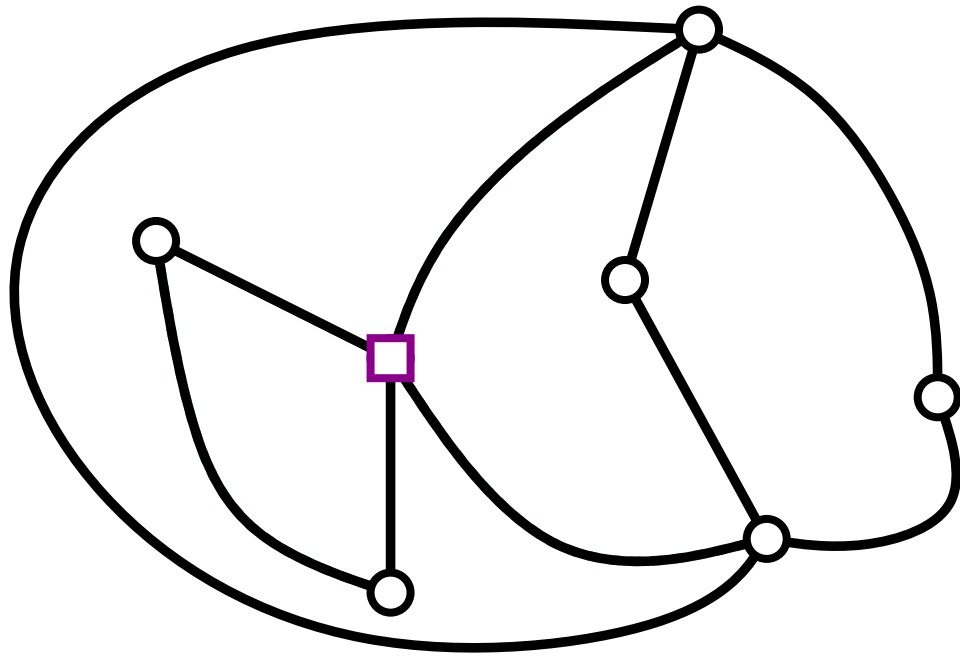


3 arêtes sortantes / sommet interne
1 arête sortante / sommet externe

Une triangulation est simple ssi elle admet une orientation telle que :
chaque sommet interne a degré sortant 3
chaque sommet externe a degré sortant 1.

Méthode bijective

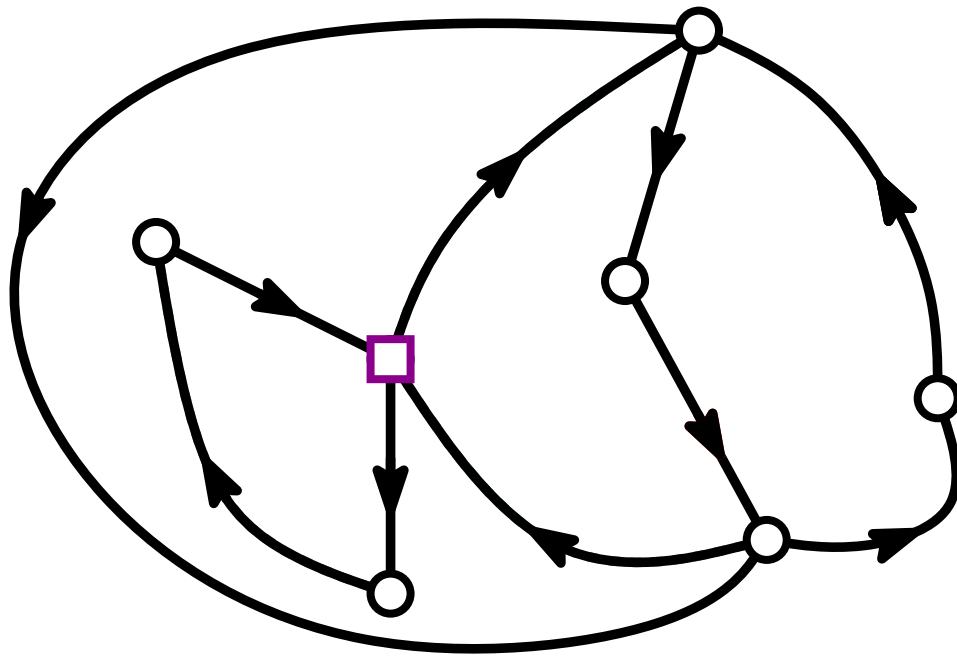
- Considérer une famille de cartes



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes

Méthode bijective

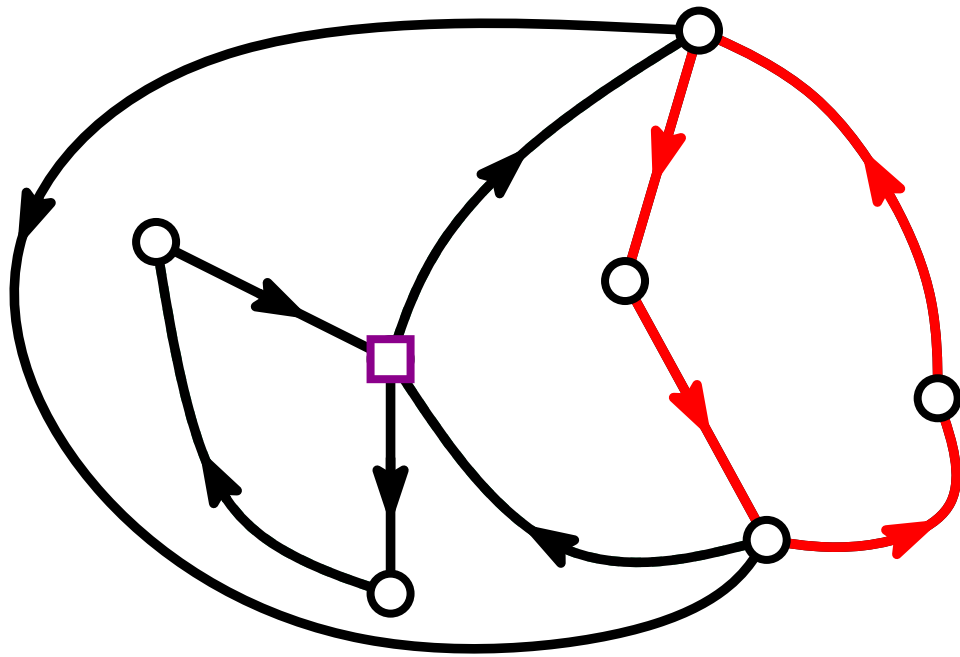
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

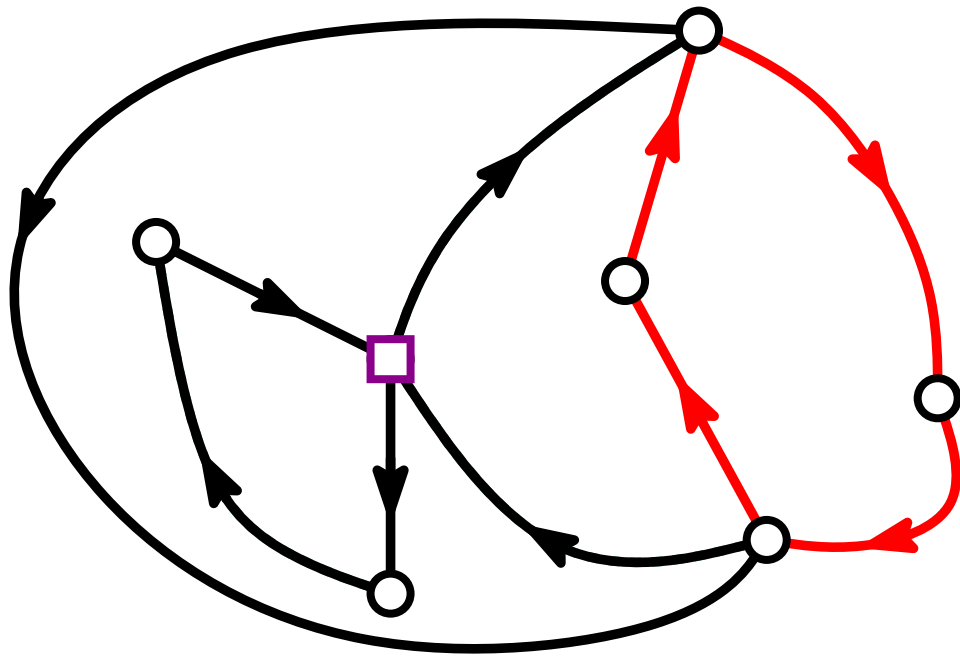
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

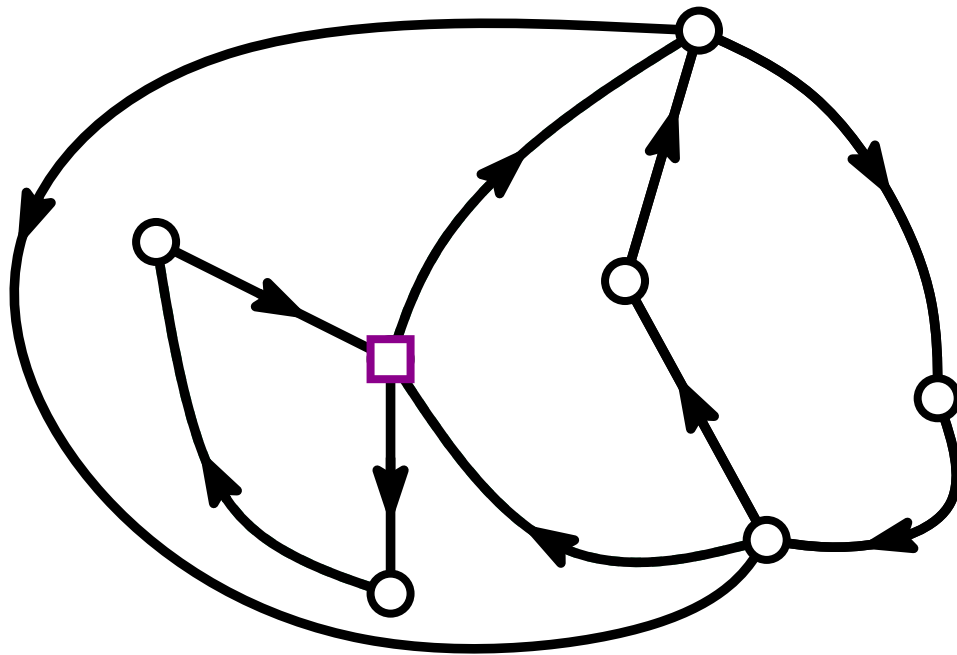
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

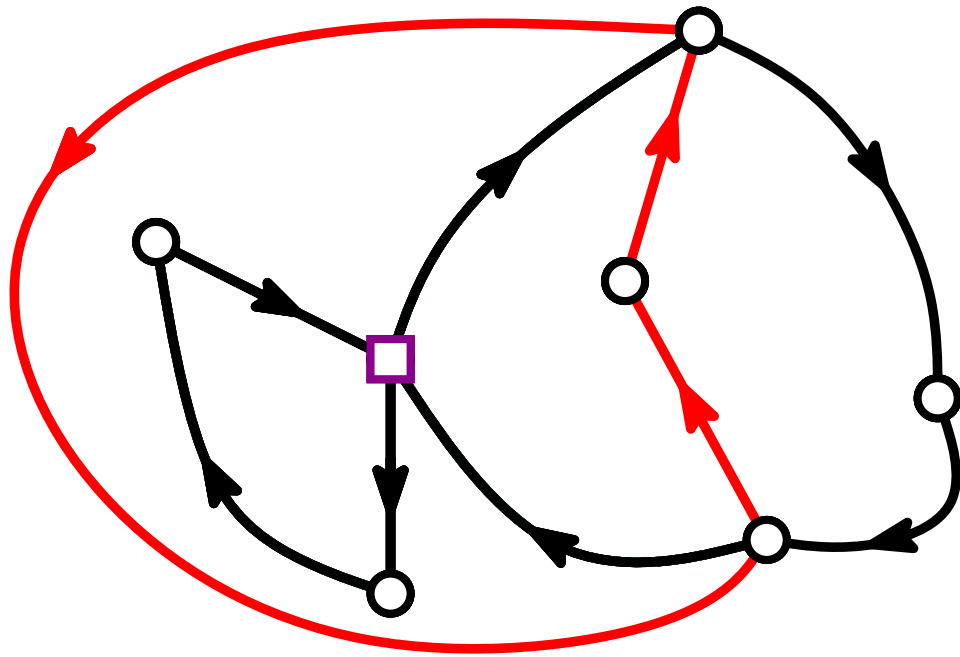
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

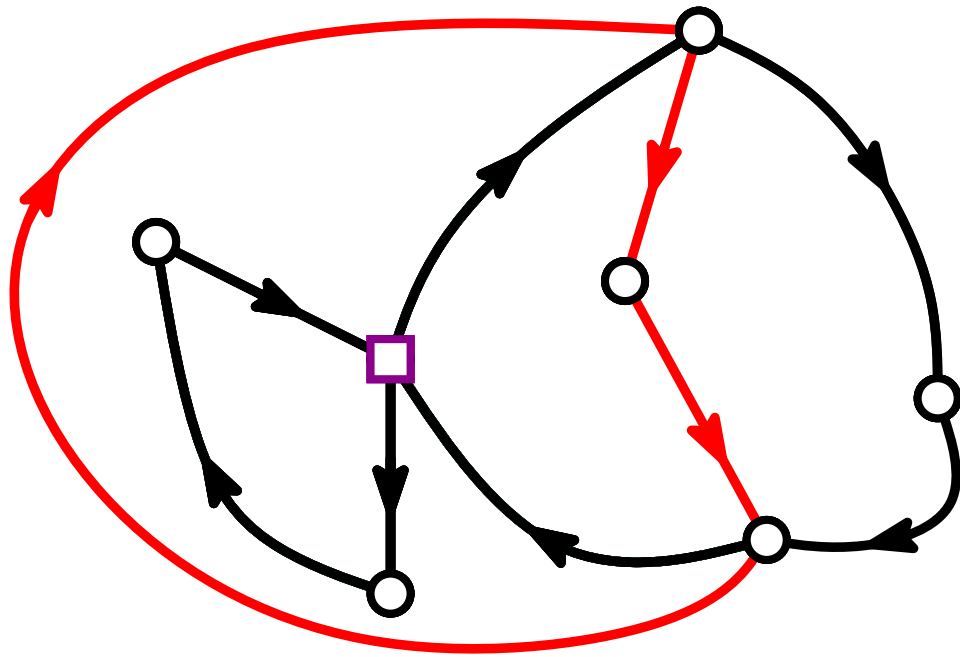
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

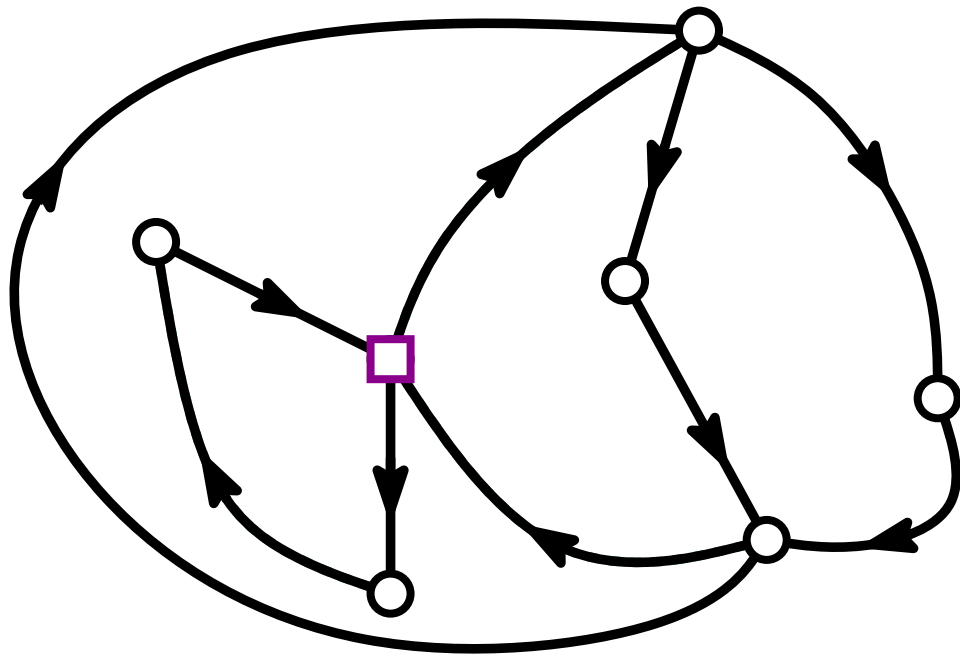
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

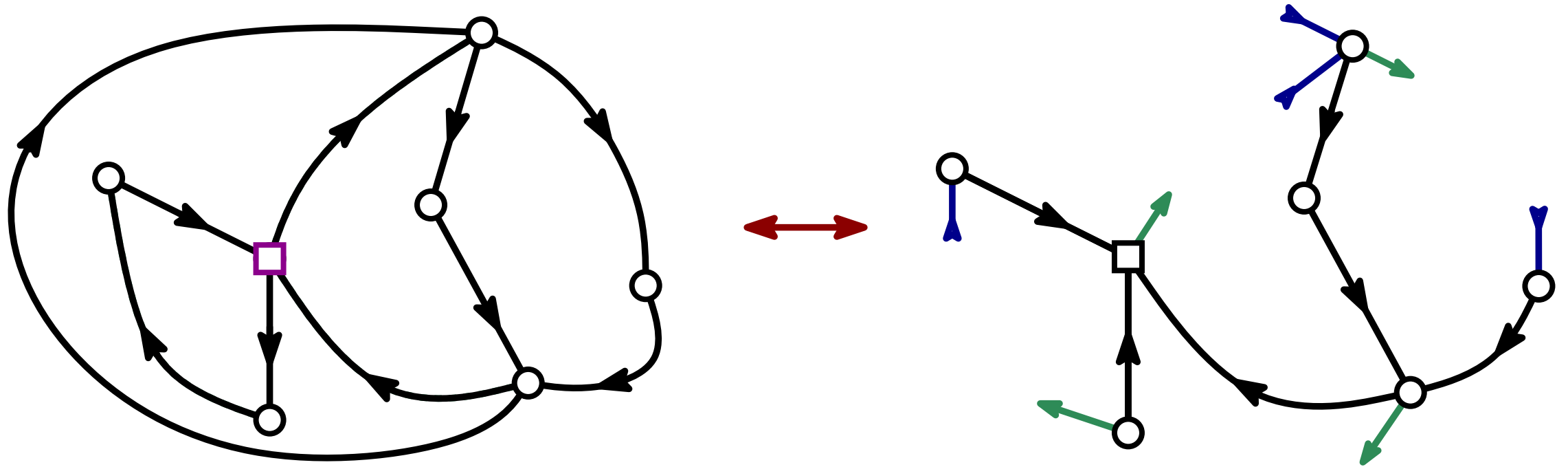
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

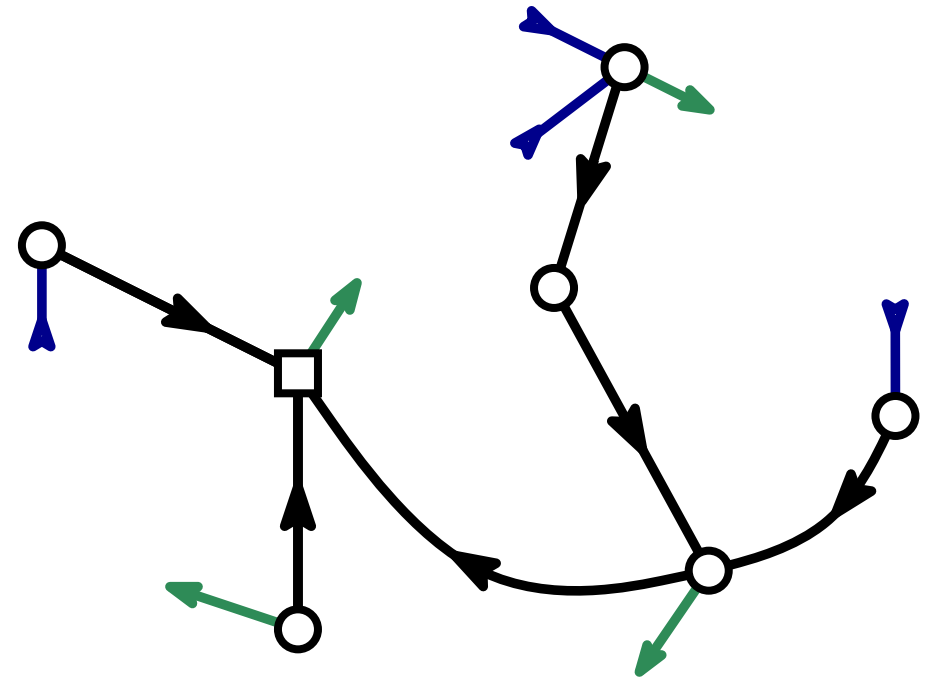
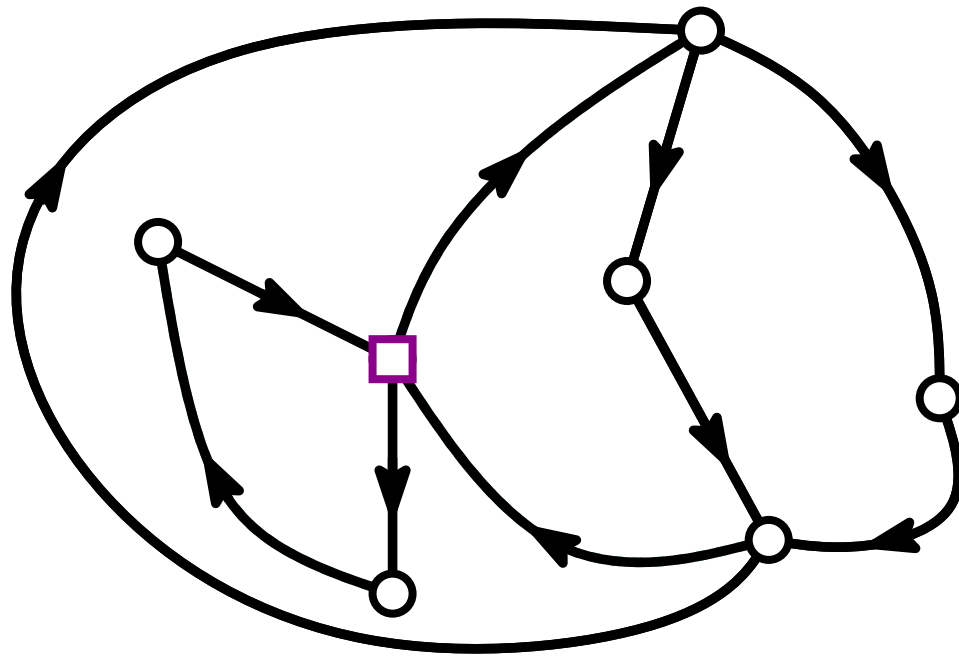
- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.
- Appliquer la bijection.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.
- Appliquer la bijection.
- Etudier la famille d'arbres bourgeonnants.



Cartes avec degré pair = cartes eulériennes
Même degré entrant/sortant.



Arbres avec
même degré entrant/sortant.

Méthode bijective

- Considérer une famille de cartes
- Trouver une caractérisation via des orientations
- Considérer l'unique orientation sans cycle antihoraire.
- Appliquer la bijection.
- Etudier la famille d'arbres bourgeonnants.

Applications :

génération aléatoire, encodage, ...

étude des cartes planaires : contrôle de la distance grâce aux chemins les plus à gauche

Perspectives :

autre approche d'unification [Bernardi, Fusy '10], comprendre les liens.

unifier la compréhension des distances.

Bibliographie

Référence sur la théorie des α -orientations (dont je me suis très largement inspirée pour ce cours) [Felsner '04] (mais aussi [Propp '93]).

Application au dessin :

[Schnyder '89]

[Bonichon, Felsner, Mosbah '04] : version plus fine / plus générale de l'algorithme de comptage

[Thèse d'Eric Fusy '07]

Arbres couvrants et couplages :

[Propp '93]

[Kenyon, Propp, Wilson '00]

Merci !

Bijections et orientations :

[Bernardi '07] + [A., Poulalhon +14]

[Bernardi, Fusy '12] : autre unification des bijections existentes reposant sur des orientations

[Addario-Berry, A. +14] + [Bernardi, Collet, Fusy '14] : contrôle de la distance.