ALEA . 19.03.09

Corrigé Exercice F. Comets

1) En notant i le premier pas S_1 de S ($i = 1, 2, \dots b$), on a

$$Z^{\eta}_{n,\beta} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b} e^{\beta \eta(i)} Z^{\theta_i \eta}_{n-1,\beta}$$

Les $Z^{\theta_i \eta}_{n-1,\beta}$ sont les fonctions de partition de longueur $n-1$ dans les sous-arbres en dessous de i : les sous-arbres étant disjoints, les variables sont indépendantes.

2 - a) En lisant le cours :

bone annealed $\quad p(\beta) \leq \lambda(\beta)$

Prop. 1.2.6 : $\quad p(\beta) \leq h(\beta)$. (= le membre de droite de (0.2)).

2 - b) En lisant le cours :

$$W_n := Z^{\eta}_{n\beta} e^{-n\lambda(\beta)} \longrightarrow W_\infty \quad \text{p.s.}$$

avec $\begin{cases} \text{soit } W_\infty > 0 & \text{p.s} \\ \text{soit } W_\infty = 0 & \text{p.s} \end{cases}$

2-c) Dans l'inégalité (0,3), on injecte l'égalité trouvée à la question 1 — multipliée par $e^{-n\lambda(\beta)}$ — et on intègre par Q : on obtient

$$b^\alpha Q(W_n^\alpha) \geq b\, e^{\lambda(\alpha\beta)-\alpha\lambda(\beta)} Q(W_{n-1}^\alpha)$$

$$- 2(1-\alpha)\frac{b(b-1)}{2}\left[Q(W_{n-1}^{\alpha/2})\right]^2 e^{2\lambda\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)-}$$

Par convexité : $2\lambda\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) = 2\left[\lambda\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)-\lambda(0)\right] \leq \lambda(\alpha\beta)$

et par Jensen ($\alpha \in (0,1)$)

$$\begin{aligned} Q W_n^\alpha &= Q\, Q(W_n^\alpha | \mathcal{G}_{n-1}) \\ &\geq Q\, Q(W_n | \mathcal{G}_{n-1})^\alpha \qquad \text{(Jensen)} \\ &= Q\, W_{n-1}^\alpha \qquad \text{(martingale)} \end{aligned}$$

donc :

$$b^\alpha Q(W_n^\alpha) \geq b\, e^{\lambda(\alpha\beta)-\alpha\lambda(\beta)} Q(W_n^\alpha) - b(b-1) e^{\lambda(\alpha\beta)-\alpha\lambda(\beta)} \left[Q W_{n-1}^{\alpha/2}\right]^2$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

2-d On divise les deux membres de (2-c) par $1-\alpha$ et on fait $\alpha \nearrow 1$:

$$\left(\ln b - \beta\lambda'(\beta) + \lambda(\beta)\right) \underbrace{Q(W_n)}_{\substack{\text{|||} \\ 1}} \leq (b-1)\, Q\left(W_{n-1}^{1/2}\right)^2$$

Mais $\begin{cases} W_{n-1}^{1/2} \xrightarrow[p.s.]{} W_\infty^{1/2} \\ \sup_n Q\left[\left(W_{n-1}^{1/2}\right)^2\right] = 1 < \infty \end{cases}$, donc $W_{n-1}^{1/2} \xrightarrow{\mathbb{L}^1} W_\infty^{1/2}$

d'où :

$$\ln b - \beta\lambda'(\beta) + \lambda(\beta) \leq (b-1)\left(Q W_\infty^{1/2}\right)^2 .$$

Si $\beta \lneq \beta_c$, le majorant est > 0 et donc $Q W_\infty^{1/2} > 0$

et $W_\infty \neq 0$. Donc $W_\infty > 0$ p.s. et

$$p(\beta) = \lambda(\beta) + \lim_n \frac{1}{n} \ln W_n = \lambda(\beta) .$$

2-e) $p(\beta)$ est convexe et vérifie

$p(\beta) = \lambda(\beta)$ sur $[0, \beta_c)$ (et même sur $[0, \beta_c]$ par continuité),

$$p(\cdot) \geq \text{tangente à } \lambda \text{ en } \beta_c .$$

soit : $p \geq h$.

2-f): Si S est une trajectoire fixée quelconque, le théorème de Cramér de grandes déviations donne :

$$Q\left(\eta : H_n(S) \geq an\right) \leq \exp -n\left(\lambda^*(a) + o(1)\right)$$

avec $\lambda^*(a) = \sup_{r}\{ra - \lambda(r)\}$. (pour tout $a \geq Q(\eta(0))$)

Donc $H_n^* = \max\{H_n(S) ; S$ trajectoire de longueur $n\}$

vérifie :

$$Q(H_n^* \geq na) = Q(\exists S : H_n(S) \geq na)$$
$$\leq b^n \times e^{-n[\lambda^*(a) + o(1)]}$$

Si $a > \lambda'(\beta_c)$, on a $\lambda^*(a) > \ln b$,

et par Borel-Cantelli

$H_n^* \leq na$ pour tout n assez grand, Q-p.s.

Donc Q-p.s., (pour $\beta \geq \beta_c$)

$$Z_{n,\beta}^{\eta} = P\left[e^{(\beta-\beta_c)H_n} \times e^{\beta_c H_n}\right]$$
$$\leq e^{(\beta-\beta_c)H_n^*} Z_{n,\beta_c}^{\eta}$$
$$\leq \exp n\left[(\beta-\beta_c)\lambda'(\beta_c) + p(\beta_c) + o(1)\right]$$

Donc $p(\beta) \leq h(\beta)$. $\blacksquare$