SOUS-SUITES (DÉ)CROISSANTES DANS LES PERMUTATIONS : ASPECTS COMBINATOIRES

1. Jouons avec Robinson et Schensted

Soit $\sigma = 2\,9\,3\,6\,1\,5\,8\,4\,7$. Déterminer les tableaux (P, Q) asssociés à σ par la bijection de Robinson-Schensted, notée Φ. Vérifier que $\mathrm{cmax}(\sigma)$ et $\mathrm{dmax}(\sigma)$ sont respectivement la largeur et la hauteur de P.

Calculer $\Phi(\sigma^{-1})$ et constatez la belle symétrie annoncée en cours. De même, calculez $\Phi(\mathrm{mir}(\sigma))$ et comparez avec P le premier tableau obtenu.

Enfin, puisque Φ est une bijection, calculez $\Phi^{-1}(P, Q)$ pour la paire de tableaux suivante :

$$\text{P=}\quad\begin{matrix}1 & 2 & 7\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 9 & \\ 6 & & \end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ 6 & 8 & \\ 9 & & \end{matrix}\quad\text{=Q}$$

2. Permutations sans sous-suite croissante de longueur 3

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans sous-suite croissante de longueur 3, et $a(n)$ le nombre de ces permutations, qu'on se propose d'évaluer via une construction récursive simple des éléments de $\mathcal{A}_n$.

Pour $1 \le i < n$, on note $\mathcal{A}_{n,i}$ l'ensemble des permutations σ de $\mathcal{A}_n$ dont la première montée est en position i :

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_i < \sigma_{i+1}.$$

Pour ne pas oublier l'unique permutation dépourvue de montées (à savoir $n(n-1)\cdots 21$), on note $\mathcal{A}_{n,n}$ l'ensemble réduit à cette permutation. Enfin, $a(n,i)$ est le cardinal de $\mathcal{A}_{n,i}$.

Observer qu'en effaçant la valeur n d'une permutation de $\mathcal{A}_n$, on obtient une permutation de $\mathcal{A}_{n-1}$. Inversement, soit $\tau \in \mathcal{A}_{n-1,i}$. Où peut-on insérer n dans τ pour obtenir une permutation σ de $\mathcal{A}_n$? Pour chacune de ces places d'insertion possibles, quel est la position j de la première montée de σ ?

Déduire de ceci une relation de récurrence liant $a(n,j)$ aux nombres $a(n-1,i)$, pour i variable, puis une équation sur la série génératrice

$$A(t,u) = \sum_{0\le j\le n} t^n u^j \; a(n,j).$$

Pour finir, résoudre cette équation par la méthode du noyau : on doit aboutir à $a(n) = C_n$, le n-ième nombre de Catalan.

En utilisant la bijection de RS et le codage des tableaux par des chemins, voyez-vous une explication directe à ce résultat ?