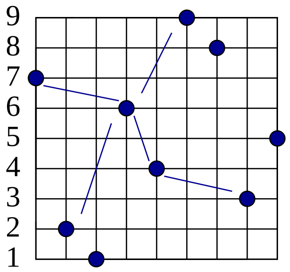
SOUS-SUITES (DÉ)CROISSANTES DANS LES PERMUTATIONS : ASPECTS COMBINATOIRES

MIREILLE BOUSQUET-MÉLOU
JOURNÉES ALEA 2009

Abstract. On présente des outils combinatoires, pour partie classiques, permettant de dénombrer les permutations sans sous-suite (dé)croissante de longueur k : correspondance de Robinson-Schensted, tableaux de Young, pour arriver à la formule déterminantale de Gessel comptant les permutations en question. On évoque aussi l'énumération des *involutions* sans longue sous-suite (dé)croissante.

1. Rappels sur les permutations

Une permutation sur $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection sur cet ensemble. On la note souvent comme un mot, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ où $\sigma_i = \sigma(i)$. L'ensemble de ces permutations est noté $\mathfrak{S}_n$. Par exemple, $\sigma = 7\ 2\ 1\ 6\ 4\ 9\ 8\ 3\ 5 \in \mathfrak{S}_9$. On utilise aussi le graphe de σ, soit, dans l'exemple précédent :



Toujours pour notre permutation exemplaire, 2 6 8 est une sous-suite croissante, et 9 3 est une sous-suite décroissante. Il y a ici plusieurs sous-suites croissantes maximales (par exemple 2 6 8 et 2 6 9) et une seule sous-suite décroissante maximale, à savoir 7 6 4 3. Les unes et les autres se repèrent bien sur le graphe de σ. On note $\text{cmax}(\sigma)$ (resp. $\text{dmax}(\sigma)$) la taille (nombre de lettres) d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) maximale. Dans notre exemple, $\text{cmax}(\sigma) = 3$ et $\text{dmax}(\sigma) = 4$.

Rappelons que $\mathfrak{S}_n$ est un groupe (pour la composition des permutations, vues comme fonctions de $[n]$). Par exemple, si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ et τ_i est la transposition élémentaire qui échange i et $i+1$, on a $\sigma\tau_i = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+2} \cdots \sigma_n$. Le graphe de la permutation inverse σ^{-1} s'obtient en prenant le symétrique de celui de σ par rapport à la première diagonale. Au passage, $\text{cmax}(\sigma) = \text{cmax}(\sigma^{-1})$ et $\text{dmax}(\sigma) = \text{dmax}(\sigma^{-1})$. Une *involution* est une permutation égale à son inverse. Une *inversion* de σ est un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma_i > \sigma_j$. La *signature* de σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$, où $\text{inv}(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions de σ.

Toutes les symétries du carré agissent sur $\mathfrak{S}_n$. En particulier, on note $\text{mir}(\sigma) = \sigma_n \cdots \sigma_2\sigma_1$ le *miroir* de σ. Notons que cette fois $\text{cmax}(\sigma) = \text{dmax}(\text{mir}(\sigma))$ et $\text{dmax}(\sigma) = \text{cmax}(\text{mir}(\sigma))$.

Date: 9 Mars 2009.

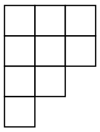
L'objectif principal de cet exposé est l'énumération des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\text{dmax}(\sigma) \leq d$. On note $a(n,d)$ le nombre de ces permutations, et $\mathfrak{S}_{n,d}$ l'ensemble correspondant. La remarque qui précède implique que $a(n,d)$ est aussi le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\text{cmax}(\sigma) \leq d$.

2. La bijection de Robinson-Schensted

Une *partition* de l'entier $n \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante finie d'entiers positifs dont la somme est n :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d = n.$$

On note $|\lambda| = n$ le *poids*, ou la *taille*, de λ, et $\ell(\lambda) = d$ sa *longueur*, c'est-à-dire le nombre de parts. Par exemple, $\lambda = (3,3,2,1)$ est une partition de 9 de longueur 4. On représente une partition par un diagramme, dont les lignes correspondent aux parts λ_i. Dans le cas précédent :



Un *tableau de Young (standard)* de forme λ est un remplissage des cases de ce diagramme par les entiers de 1 à n (chaque entier apparaissant une fois exactement), qui doit être croissant dans les lignes (vers la droite) et colonnes (vers le bas). Par exemple :

1	3	5
2	4	8
6	9	
7		

La *partition conjuguée* de λ, notée λ^*, a pour diagramme le symétrique de celui de λ par rapport à la (seconde) diagonale. On définit de même le conjugué d'un tableau de Young.

La bijection de Robinson-Schensted, qui figure dans des termes un peu vagues dans un papier de Gilbert de Beauregard Robinson en 1938 [19] et dans des termes tout à fait précis dans celui de Schensted en 1961 [22], transforme une permutation de $\mathfrak{S}_n$ en une paire (P,Q) de tableaux de Young de taille n et de même forme. L'opération élémentaire qui permet de construire P pas à pas, en lisant les entrées $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ de σ dans cet ordre, est *l'insertion en ligne* dans un tableau, que nous décrivons maintenant.

Imaginons avoir déjà construit un tableau partiel P_{i-1}, de taille $i-1$, qui contient les lettres $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}$ de σ. On forme le tableau P_i comme suit :

- si P_{i-1} est vide (ce qui n'arrive que pour $i=1$), P_i est réduit à une case contenant σ_i,
- si toutes les entrées de la première ligne de P_{i-1} sont inférieures à σ_i, on insère σ_i au bout à droite de la première ligne,
- sinon, soit x la plus petite valeur supérieure à σ_i figurant dans la première ligne de P_{i-1}. On remplace x par σ_i dans P_{i-1}. La valeur x est *éjectée*, et on l'insère dans le tableau formé des lignes $2, 3, \ldots$ de P_{i-1}.

Le tableau final P_n obtenu après lecture complète de σ est le premier tableau P de la paire (P,Q) associée à σ par la bijection de Robinson-Schensted. Le second tableau, Q, a la même forme que P, et code l'ordre de création des cases de P. Plus précisément, la case de P créée à l'instant i porte dans Q l'étiquette i.

Un exemple est urgent : pour $\sigma = 7\ 2\ 1\ 6\ 4\ 9\ 8\ 3\ 5$, on forme tour à tour les tableaux suivants pour aboutir à P :

$$\begin{array}{l}7\end{array}\quad \begin{array}{l}2\\7\end{array}\quad \begin{array}{l}1\\2\\7\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&6\\2&\\7&\end{array}\quad \begin{array}{ll}1&4\\2&6\\7&\end{array}\quad \begin{array}{lll}1&4&9\\2&6&\\7&&\end{array}\quad \begin{array}{lll}1&4&8\\2&6&9\\7&&\end{array}\quad \begin{array}{lll}1&3&8\\2&4&9\\6&&\\7&&\end{array}\quad \begin{array}{lll}1&3&5\\2&4&8\\6&9&\\7&&\end{array} = P$$

Quant au tableau Q, il traduit l'ordre dans lequel ont été créées les cases de P :

$$\begin{array}{lll}1&4&6\\2&5&7\\3&9&\\8&&\end{array} = Q$$

Théorème 1. *La transformation Φ qui associe à une permutation σ la paire (P, Q) décrite ci-dessus est une bijection entre permutations de $\mathfrak{S}_n$ et paires de tableaux de Young de taille n et de même forme.*

Cette bijection a de belles propriétés de symétrie. Si $\Phi(\sigma) = (P, Q)$ alors $\Phi(\sigma^{-1}) = (Q, P)$, et $\Phi(\mathrm{mir}(\sigma)) = (P^*, Q')$, où P^* est le tableau conjugué de P (la description de Q' est plus délicate).

Enfin, les paramètres $\mathrm{cmax}(\sigma)$ et $\mathrm{dmax}(\sigma)$ sont respectivement la largeur et la hauteur du tableau P.

Le fait que Φ soit une bijection est le Lemme 3 dans l'article de Schensted [22]. La deuxième propriété de symétrie lui est également due. Il semble ne pas avoir remarqué la première, due à Schützenberger [23]. Il est vrai que, pour remarquable qu'elle soit, elle n'est pas commode à prouver à partir de cette description de Φ. En revanche, deux descriptions plus tardives de Φ, celle de Viennot [27] et celle de Fomin [7, 6] rendent évidente cette symétrie.

Le lien entre les sous-suites croissantes et décroissantes maximales de σ et les dimensions de P est dû à Schensted. Notons que ces deux résultats sont équivalents, via le fait que $\Phi(\mathrm{mir}(\sigma)) = (P^*, Q')$ et que $\mathrm{cmax}(\sigma) = \mathrm{dmax}(\mathrm{mir}(\sigma))$.

Enfin, la description du tableau Q' a été donnée par Schützenberger [23].

De nombreux autres détails, notamment bibliographiques, figurent dans le chapitre 7 du second volume de *Enumerative Combinatorics*, par Stanley [25], et dans l'appendice 7.1 de ce même ouvrage.

3. La formule des équerres

Il s'agit ici de dénombrer les tableaux de Young de forme λ donnée. Le nombre de tels tableaux est traditionnellement noté f_λ, ou f^λ ou $f(\lambda)$, et on jonglera sans doute avec ces différentes notations ci-dessous.

La bijection de Robinson-Schensted nous dit que :

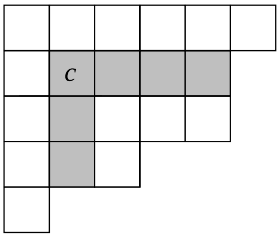
$$\sum_{|\lambda|=n} f_\lambda^2 = n!.$$

Pour les amateurs d'algèbre, ceci est qu'une instance de la formule

$$\sum_{\chi \text{ irred}} (\dim \chi)^2 = |G|$$

qui lie l'ordre d'un groupe fini G aux dimensions de ses représentations irréductibles [24]. En effet, les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ (un groupe d'ordre $n!$ s'il en fut) sont indexées par les partitions λ de n, et la dimension de la représentation indexée par λ est précisément le nombre f_λ. On ne creusera pas cette veine ici. Il faut toutefois savoir que les outils combinatoires que l'on déroule jouent un rôle important dans l'étude des représentations de $\mathfrak{S}_n$ et des fonctions symétriques. Voir [25, Chap. 7] ou [15] ou [20] pour un petit aperçu...

Revenons donc à nos moutons : l'énumération des tableaux de forme λ. À chaque case c de λ (ou de son diagramme...) on associe un ensemble de cases appelé *équerre* de c, comme illustré ci-dessous :



On note h_c la longueur de cette équerre (c'est-à-dire le nombre de cases qu'elle comporte). Pour l'exemple ci-dessus, $h_c = 6$.

Théorème 2. *Soit λ une partition de n. Le nombre de tableaux de Young standard de forme λ est :*

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} h_c}.$$

Par exemple, pour la partition λ de la page 2,

$$f_\lambda = \frac{9!}{6\ 4\ 2\ 5\ 3\ 1\ 3\ 1\ 1} = 168.$$

En exprimant les équerres en fonction des parts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ de λ, on se convainc que la formule ci-dessus, dite *formule des équerres*, est équivalente à :

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (\lambda_i - i + d)!} \prod_{1\le i<j\le d} (\lambda_i - \lambda_j - i + j). \tag{1}$$

C'est sous cette forme qu'elle a été démontrée pour la première fois, par MacMahon en 1909 [16]. La formulation en termes d'équerres est due à Frame, Robinson et Thrall [8], qui en ont donné une très jolie preuve probabiliste. Nous allons ici démontrer (1) par un principe de réflexion, assez voisin de celui que nous utiliserons en Section 4 pour dénombrer les permutations sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$.

Un tableau P de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$, avec $|\lambda| = n$, se code par un mot de longueur n, disons $u = u_1 \cdots u_n$, sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, d\}$, de la façon suivante : $u_i = k$ si l'entier i figure dans la ligne k de P (la ligne supérieure est, par convention, la ligne 1). Le codage du tableau de la page 2 est ainsi $u = 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 3$. Ce codage est une bijection entre tableaux de taille n et *mots de Yamanouchi* de longueur n. Un mot $u = u_1 \cdots u_n$ est dit de Yamanouchi si pour toute factorisation $u = vw$,

$$u = vw \ \Rightarrow\ |v|_1 \ge |v|_2 \ge \cdots \ge |v|_d, \tag{2}$$

où $|v|_k$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre k dans le mot v. La forme de λ est donnée par la *composition* de u, c'est-à-dire que $\lambda_k = |u|_k$. Ces mots de Yamanouchi peuvent encore être vus comme des chemins dans $\mathbb{N}^d$: on part de l'origine $(0,\ldots,0)$ et on fait un pas $e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ quand on lit la lettre k (il est entendu que la coordonnée 1 dans e_k arrive en k-ième position). La condition (2) se traduit en disant que tout point $(x_1,\ldots,x_d)$ du chemin doit être dans le secteur

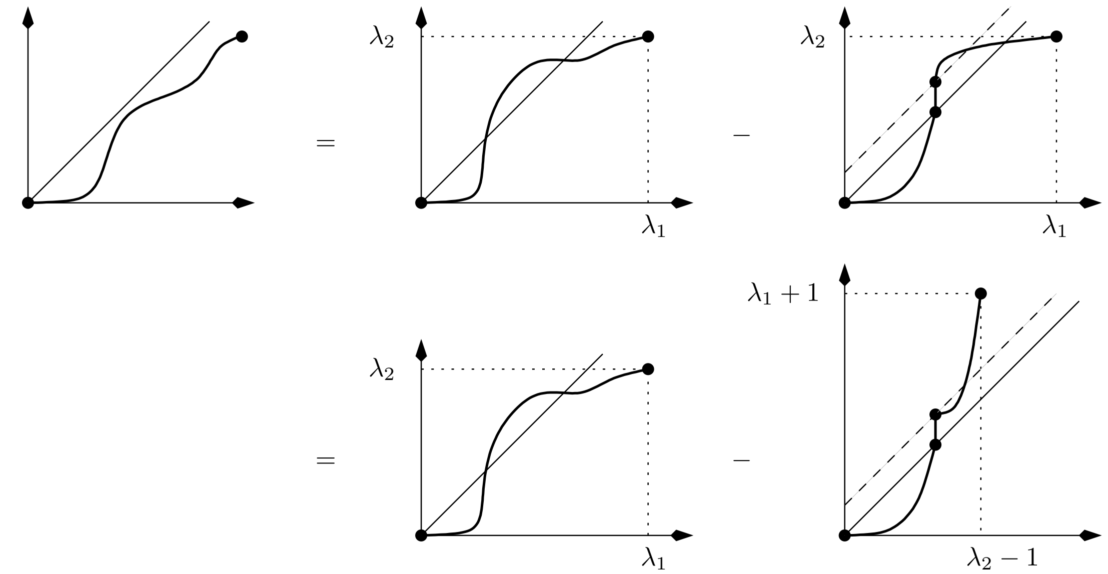
$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_d \geq 0. \tag{3}$$

Le point final du chemin est $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$.

Par exemple, un tableau de forme (λ_1,λ_2) se code par un chemin sous-diagonal dans $\mathbb{N}^2$, un *méandre*, en d'autres termes. Lesquels méandres on sait fort bien compter par le principe de réflexion :

$$f(\lambda_1,\lambda_2) = \binom{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1} - \binom{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+1} \tag{4}$$

comme illustré ci-dessous.



C'est ce principe qu'on va généraliser pour compter les chemins (ou mots) de Yamanouchi en dimension d.

Proposition 3. *Le nombre de tableaux de forme $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$, où $|\lambda| = n$, est*

$$f_\lambda = n!\det\left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!}\right)_{1\leq i,j\leq d}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la spécialisation de cette expression au cas $d=2$ donne bien (4).

Proof. On cherche à dénombrer les chemins de Yamanouchi finissant au point $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$. On va définir une classe plus vaste de chemins, dotés d'un signe.

Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_d$. On note $T(\sigma)$ le point de $\mathbb{N}^d$ de coordonnées $(\lambda_{\sigma_1} - \sigma_1 + 1,\ldots,\lambda_{\sigma_d} - \sigma_d + d)$. On note $\mathcal{P}_\sigma$ l'ensemble des chemins (à pas unitaires et positifs) issu de l'origine de $\mathbb{N}^d$ et finissant en $T(\sigma)$. Le *signe* d'un tel chemin est $\varepsilon(\sigma)$, la signature de σ. Notons que $\mathcal{P}_\sigma$ est vide dès que l'une des coordonnées de $T(\sigma)$ est strictement négative. On note enfin $\mathcal{P} = \cup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{P}_\sigma$. Le nombre de chemins de $\mathcal{P}_\sigma$ est

$$\frac{n!}{\prod_{1 \le i \le d} (\lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i)!}.$$

Pour $\sigma = \mathrm{id}$, le point $T(\sigma)$ coincide avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Donc $\mathcal{P}_{\mathrm{id}}$ contient en particulier les chemins de Yamanouchi que l'on cherche à dénombrer. Pour $\sigma \neq \mathrm{id}$, il n'y a pas de chemin de Yamanouchi (au sens de la condition (2) ou (3)) dans $\mathcal{P}$. En effet, σ a au moins une inversion (i, j), et le point $T(\sigma)$ qui est le point d'arrivée de tous les chemins de $\mathcal{P}_\sigma$, a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ avec $x_i = \lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i$ et $x_j = \lambda_{\sigma_j} - \sigma_j + j$, de sorte que

$$x_i - x_j = \left(\lambda_{\sigma_i} - \lambda_{\sigma_j}\right) + (i - j) + (\sigma_j - \sigma_i)$$

et chacun de ces termes est négatif (car $\sigma_j < \sigma_i$), le terme $(i-j)$ étant même strictement négatif. Les conditions (3) ne sont donc pas vérifiées par le point final $T(\sigma)$.

On va maintenant définir une involution sur les chemins de $\mathcal{P}$ qui ne sont *pas* de Yamanouchi, involution qui change le signe de ces chemins. Compte tenu du dénombrement que nous avons fait pour les chemins de $\mathcal{P}_\sigma$, ceci prouvera que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \frac{n!}{\prod_i (\lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i)!}$$

compte les chemins de Yamanouchi (lesquels, d'après ce qui précède, finissent forcément en λ). Ce qui est précisément la formule déterminantale de la proposition.

Allons-y donc avec cette involution. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, et u un mot (chemin) de $\mathcal{P}_\sigma$ qui n'est pas de Yamanouchi. Il existe un préfixe v de u et un entier $k < d$ tel que $u = v(k+1)w$ avec $|v|_k = |v|_{k+1}$. (Manifestement, le préfixe $v(k+1)$ ne satisfait pas les conditions (2)). On choisit v de longueur minimale, de sorte que le préfixe $v(k+1)$ est le premier qui pose problème. On associe à u le mot $\psi(u) = v(k+1)\tilde{w}$, où $\tilde{w}$ est obtenu en remplaçant dans w toute occurrence de k par $(k+1)$, et inversement.

On vérifie aisément que $\psi(u) \in \mathcal{P}_\tau$, avec $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+2} \cdots \sigma_n$, de sorte que $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. De plus, $\psi(u)$ n'est pas non plus un mot de Yamanouchi : son premier "problème" survient pour le préfixe $v(k+1)$. Cette remarque implique que $\psi(\psi(u))$ coincide avec u.

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

Il reste à déduire de la proposition 3 la formule des équerres, sous sa forme (1). C'est en fait facile :

$$\begin{aligned}
f_\lambda &= n! \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{1 \le i,j \le d} \\
&= n! \det \left(\frac{(\lambda_i - i + j + 1) \cdots (\lambda_i - i + d)}{(\lambda_i - i + d)!} \right)_{1 \le i,j \le d} \\
&= \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (\lambda_i - i + d)!} \det \left((\lambda_i - i + j + 1) \cdots (\lambda_i - i + d) \right)_{1 \le i,j \le d}.
\end{aligned}$$

Le coefficient (i, j) de ce dernier déterminant s'écrit $P_j(\lambda_i - i)$ où $P_j(x) = (x + j + 1) \cdots (x + d)$ est un polynôme en x de degré $d - j$ et de coefficient dominant 1. Ce déterminant est donc égal au déterminant de Vandermonde $\det((\lambda_i - i)^{d-j})$, c'est-à-dire à $\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j - i + j)$. Ce qui donne pour f_λ l'expression (1). ■

4. Permutations sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$

Venons-en maintenant à l'énumération des permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ dont les sous-suites décroissantes sont de longueur au plus d. En d'autres termes $\mathrm{dmax}(\sigma) \le d$. Rappelons que le nombre de telles permutations est noté $a(n,d)$. Par la bijection de Robinson-Schensted, $a(n,d)$ est aussi le nombre de paires de tableaux de Young de taille n, de même forme, et de hauteur au plus d. Via la formule des équerres (1), ceci fournit une première expression de $a(n,d)$:

$$a(n,d) = \sum_{\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_d \ge 0} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{d}(\lambda_i - i + d)!} \prod_{1 \le i < j \le d} (\lambda_i - \lambda_j - i + j).$$

Les théorèmes de clôture sur les suites *P-récurrentes* (ou de façon équivalente sur les séries *D-finies* [13, 14]) impliquent alors que pour tout d, la série $\sum_n a(n,d)t^n$ est *différentiellement finie* : elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en t (voir sur ce sujet le cours de Bruno Salvy à ALEA en 2003 [21]). Pour des conjectures sur la forme de ces équations, voir [2, 3].

Nous allons ici être plus gourmands, et donner une expression close, non pas de la série génératrice ordinaire $\sum_n a(n,d)t^n$, mais d'une série génératrice qu'on pourrait qualifier *de Bessel*,

$$A_d(t) = \sum_{n \ge 0} a(n,d) \frac{t^{2n}}{n!^2}.$$

Noter l'exposant $2n$ de t et, bien sûr, la division par $n!^2$. Cette série est tout aussi différentiellement finie que la série génératrice ordinaire. La formule ci-dessous a été démontrée pour la première fois par Gessel en 1990 [10].

Théorème 4. *Pour $i \in \mathbb{Z}$, soit*

$$I_i(t) = \sum_{n \ge \max(0,-i)} \frac{t^{2n+i}}{n!(n+i)!}. \tag{5}$$

En particulier, $I_i(t) = I_{-i}(t)$. Alors la série de Bessel des permutations sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ est

$$A_d(t) = \det\left(I_{i-j}\right)_{1 \le i,j \le d}.$$

Proof. Nous donnons ici une preuve publiée par Gessel, Weinstein et Wilf en 1998 [9]. À la suite, on donnera quelques détails sur la preuve originale, qui est moins élémentaire.

Les paires (P,Q) de tableaux de même forme que l'on veut compter se codent par des paires de chemins de Yamanouchi dans $\mathbb{Z}^d$, finissant au même point λ. De façon équivalente, en parcourant le chemin du tableau P, puis, à l'envers, le chemin du tableau Q, on obtient un chemin de $\mathbb{Z}^d$, commençant et finissant à l'origine, formé de pas unitaires e_k et $-e_k$, les pas positifs venant avant les pas négatifs, et dont chaque sommet $(x_1, \ldots, x_d)$ vérifie la condition de Yamanouchi (3). Par exemple, la paire (P,Q) de la page 3 se code par le chemin (ou mot...)

$$1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 3\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1},$$

la lettre k (resp. $\bar{k}$) représentant le pas e_k (resp. $-e_k$). Après avoir traduit en termes de mots la condition de Yamanouchi sur ces chemins à pas positifs et négatifs, on aboutit à l'énoncé suivant : les permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ sont en bijection avec les mots u de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, d, \bar{1}, \ldots, \bar{d}\}$, où les lettres barrées arrivent après les lettres non barrées, et tels que pour toute factorisation $u = vw$:

$$u = vw \quad \Rightarrow \quad |v|_1 - |v|_{\bar{1}} \geq |v|_2 - |v|_{\bar{2}} \geq \cdots \geq |v|_d - |v|_{\bar{d}} \geq 0. \tag{6}$$

On va maintenant définir une classe plus vaste de chemins, dotés d'un signe. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_d$. On note $T(\sigma)$ le point $(1 - \sigma_1, \ldots, d - \sigma_d)$. On note $\mathcal{P}_\sigma$ l'ensemble des chemins (à pas unitaires positifs ou négatifs) de $\mathbb{Z}^d$, issus de l'origine, finissant en $T(\sigma)$, et *triés* (les pas positifs viennent avant les pas négatifs). Le *signe* d'un tel chemin est $\varepsilon(\sigma)$, la signature de σ. Notons que la longueur de ces chemins est toujours paire (la somme des coordonnées du point d'arrivée étant 0). On note enfin $\mathcal{P} = \cup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{P}_\sigma$. Le nombre de chemins de longueur $2n$ dans $\mathcal{P}_\sigma$ est

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{n_1, \ldots, n_d} \frac{(2n)!}{\prod_i n_i!(n_i + i - \sigma_i)!},$$

la somme portant sur les d-uplets $(n_1, \ldots, n_d)$ tels que $\sum_i n_i = n$ (avec $n_i \geq 0$ et $n_i + i - \sigma_i \geq 0$). Il est facile de voir que la somme ci-dessus (sans le facteur $1/\binom{2n}{n}$) compte *tous* les chemins de longueur $2n$ allant de l'origine à $T(\sigma)$: ces chemins font $n_i + i - \sigma_i$ pas e_i, et n_i pas $-e_i$. La longueur totale est

$$\sum_i (2n_i + i - \sigma_i) = 2 \sum_i n_i = 2n.$$

Par ailleurs, il est clair que le nombre de ces chemins s'obtient en multipliant le nombre de chemins *triés* par $\binom{2n}{n}$ (ce binomial décrit le mélange du mot positif et du mot négatif). D'où le résultat sur le dénombrement des chemins triés de $\mathcal{P}_\sigma$.

Pour $\sigma = \mathrm{id}$, le point $T(\sigma)$ coincide avec l'origine. Donc $\mathcal{P}_{\mathrm{id}}$ contient en particulier les chemins triés satisfaisant (6) que l'on cherche à dénombrer. Pour $\sigma \neq \mathrm{id}$, aucun chemin de $\mathcal{P}_\sigma$ ne satisfait (6). En effet, l'une des coordonnées du point d'arrivée $T(\sigma)$ est alors négative, et on a fait dans cette direction plus de pas négatifs que positifs.

On va maintenant définir une involution sur les chemins de $\mathcal{P}$ qui ne sont satisfont pas (6), involution qui change le signe de ces chemins. Compte tenu du dénombrement que nous avons fait pour les chemins de $\mathcal{P}_\sigma$, ceci prouvera que le nombre de permutations τ de $\mathfrak{S}_n$ satisfaisant $\mathrm{dmax}(\tau) \leq d$ est :

$$a(n, d) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \sum_{n_1, \ldots, n_d} \frac{(2n)!}{\prod_i n_i!(n_i + i - \sigma_i)!},$$

où, de nouveau, $\sum_i n_i = n$. Ensuite, quelques manipulations indolores (passage à la série génératrice de Bessel, identification d'un déterminant) achèvent la preuve, comme esquissé ici :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} a(n, d) \frac{t^n}{n!^2} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \sum_{n_1, \ldots, n_d} \prod_{i=1}^{d} \frac{t^{2n_i + i - \sigma_i}}{n_i!(n_i + i - \sigma_i)!} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{d} \sum_{n_i} \frac{t^{2n_i + i - \sigma_i}}{n_i!(n_i + i - \sigma_i)!} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{d} I_{i - \sigma_i}(t) \\
&= \det(I_{i-j})_{1 \leq i, j \leq d}.
\end{aligned}$$

Décrivons donc pour finir notre involution. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, et u un mot (chemin) de $\mathcal{P}_\sigma$ qui ne satisfait pas (6). Remarquons d'abord que, pour tout préfixe v de u, on a bien $|v|_d - |v|_{\bar{d}} \geq 0$. En effet, $|u|_d - |u|_{\bar{d}} = d - \sigma_d \geq 0$, et les pas positifs arrivent dans u avant les pas négatifs. Donc le problème vient d'une autre des inégalités de (6) : il existe un préfixe v de u et un entier $k < d$ tel que $u = vxw$ avec $|v|_k - |v|_{\bar{k}} = |v|_{k+1} - |v|_{\overline{k+1}}$ et $x = k+1$ ou $x = \bar{k}$. (Manifestement, le préfixe vx ne satisfait pas les conditions (6)). On choisit v de longueur minimale, de sorte que le préfixe vx est le premier qui pose problème. On associe à u le mot $\psi(u) = vx\tilde{w}$, où $\tilde{w}$ est obtenu en remplaçant dans w toute occurrence de $\pm k$ par $\pm(k+1)$, et inversement.

On vérifie aisément que $\psi(u) \in \mathcal{P}_\tau$, avec $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}\sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+2} \cdots \sigma_n$, de sorte que $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. De plus, $\psi(u)$ ne satisfait pas non plus la condition (6) : son premier "problème" survient pour le préfixe vx. Cette remarque implique que $\psi(\psi(u))$ coincide avec u.

Ceci achève la preuve du théorème. ∎

Terminons cette section par quelques détails sur la preuve originale, qui utilise plus d'outils [10]. À savoir, par ordre d'apparition à l'écran :

(1) la bijection de Robinson-Schensted pour se ramener à du dénombrement de tableaux (également utilisée ci-dessus bien entendu) ;

(2) une identité sur les fonctions de Schur s_λ (ce sont des fonctions symétriques qui comptent des tableaux *semi-standard*, plus généraux que les tableaux standard considérés ici). Cette identité est une formule déterminantale pour

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y), \tag{7}$$

où la somme porte sur les partitions de hauteur au plus d. Elle s'obtient en combinant la formule de Jacobi-Trudi exprimant les s_λ en termes des fonctions symétriques homogènes h_i, et la formule de Cauchy-Binet pour le déterminant d'un produit de matrices ;

(3) finalement, l'application à l'expression déterminantale de (7) d'un certain homomorphisme θ qui est au cœur du papier de Gessel, et permet, en gros, d'extraire la contribution des tableaux standard d'une série qui s'interprète en termes de tableaux semi-standard.

5. Involutions sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$

Il existe aussi une formule close pour la série génératrice *exponentielle* des *involutions* sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ (ou, de façon équivalente, pour les tableaux standard de hauteur au plus d). Les propriétés de la bijection de Robinson-Schensted (Théorème 1) et la conjugaison des tableaux montrent qu'il est équivalent d'énumérer les involutions sans sous-suite *croissante* de longueur $d+1$, mais ça n'est pas du tout évident sur les involutions elles-mêmes, si on ne connaît pas la bijection de Robinson-Schensted...

Le résultat suivant est encore dû à Gessel [10] et utilise à peu près les mêmes outils que sa preuve du théorème 4.

On note $b(n,d)$ le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$ sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$, et

$$B_d(t) = \sum_{n \geq 0} b(n,d) \frac{t^n}{n!}.$$

Théorème 5. *La série exponentielle des involutions sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ est*

$$B_d(t) = \begin{cases} \det\left(I_{i-j} + I_{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le d/2} & \text{si } d \text{ est pair,} \\ e^t \ \det\left(I_{i-j} - I_{i+j}\right)_{1\le i,j\le (d-1)/2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les séries $I_i(t)$ sont définies par (5).

À ma connaissance, il n'existe pas de preuve analogue à celle que nous avons donnée plus haut pour les *permutations* sans longue sous-suite décroissante. En revanche, il en existe une qui n'utilise qu'une construction récursive simple de ces involutions, par insertion du cycle contenant la valeur maximale (voir [4] et la section 6.1).

Il existe aussi des formules déterminantales pour la série génératrice exponentielle :

- des involutions sans point fixe sans sous-suite croissante de longueur $d+1$ (Baik & Rains 2001 [1]),
- des involutions sans point fixe sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ (Goulden 1992 [11]).

Les deux problèmes ne sont pas équivalents cette fois.

Signalons enfin une observation due à Wilf [28], et qui semble attendre une explication combinatoire : lorsque d est pair,

$$A_d(t) = B_d(t)B_d(-t).$$

6. Remarques, compléments, bibliographie...

6.1. Structures décomposables

La preuve qu'on a donnée pour le dénombrement des permutations sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ utilise de façon clef la bijection de Robinson-Schensted. Pourtant, ces permutations sont des structures décomposables récursivement : une permutation de $\mathfrak{S}_{n,d}$ s'obtient en insérant la valeur n dans une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1,d}$. Lors de cette insertion, il faut prendre garde à ne pas créer une sous-suite décroissante de longueur $d+1$. Pour cela, il nous faut garder en mémoire où démarre la sous-suite décroissante de longueur d la plus à droite. Mais pour mettre à jour cette information, il nous faut garder en mémoire où démarre la sous-suite décroissante de longueur $d-1$ la plus à droite. Et ainsi de suite, jusqu'à la position de la descente la plus à droite. Moyennant quoi, on peut écrire des récurrences simples pour le nombre $a(n, d; k_d, \ldots, k_2)$ de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$, où la sous-suite décroissante de longueur i la plus à droite démarre en position k_i pour tout $i \in [2, d]$. Cette récurrence se traduit en une équation fonctionnelle sur la série génératrice correspondante $A_d(t; u_d, \ldots, u_2)$, à $d-1$ variables catalytiques. On peut se demander comment résoudre directement cette équation.

La situation n'est pas désespérée : en exploitant une construction récursive similaire pour les *involutions* sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$, due à Jaggard & Marincel [12], on peut obtenir les formules du Théorème 5 pour le comptage de ces involutions [4].

6.2. Liens avec les matrices aléatoires

On va faire court, compte tenu de l'ignorance de l'auteur sur le sujet. Ces liens semblent être de deux types au moins :

(1) le *nombre* de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans sous-suite décroissante de longueur $d+1$ s'écrit

$$a(n,d) = \mathbb{E}\left(|\mathrm{tr}(M)^n|^2\right),$$

pour une matrice M unitaire de taille $k \times k$ distribuée selon la mesure de Haar sur le groupe unitaire. On se reportera par exemple à Rains [18] ;

(2) à une normalisation près, la forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ du tableau associé à la permutation aléatoire (et uniforme) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est distribuée, lorsque $n \to \infty$, comme la suite (également normalisée, et également dans la limite où $n \to \infty$) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ des valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire, pour la mesure gausienne "habituelle" de densité

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\,\mathrm{tr}(M^2))dM.$$

Il semble qu'Okounkov [17] en ait donné une explication directe via les cartes, dont on sait qu'elles sont liées et aux permutations, et aux matrices hermitiennes aléatoires [29]. Un beau sujet pour de prochaines journées ALEA !

6.3. Références

Le sujet est foisonnant. En amont de la bibliographie ci-dessous, on peut partir, pour les aspects combinatoires de la question, de l'article de synthèse qu'à écrit Stanley pour le congrès des mathématiciens en 2006 [26]. La loi de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation était aussi à l'honneur dans une autre conférence plénière de ce même congrès, celle de Deift [5].

References

[1] J. Baik and E. M. Rains. Algebraic aspects of increasing subsequences. *Duke Math. J.*, 109(1):1–65, 2001.

[2] F. Bergeron, L. Favreau, and D. Krob. Conjectures on the enumeration of tableaux of bounded height. *Discrete Math.*, 139(1-3):463–468, 1995.

[3] F. Bergeron and F. Gascon. Counting Young tableaux of bounded height. *J. Integer Seq.*, 3(1):Article 00.1.7, 1 HTML document (electronic), 2000.

[4] M. Bousquet-Mélou. Bare-hand enumeration of involutions with no long decreasing subsequence. In preparation.

[5] P. Deift. Universality for mathematical and physical systems. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 125–152. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[6] S. Fomin. Duality of graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 3(4):357–404, 1994.

[7] S. Fomin. Schensted algorithms for dual graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 4(1):5–45, 1995.

[8] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric groups. *Canadian J. Math.*, 6:316–324, 1954.

[9] I. Gessel, J. Weinstein, and H. S. Wilf. Lattice walks in $\mathbf{Z}^d$ and permutations with no long ascending subsequences. *Electron. J. Combin.*, 5(1):Research Paper 2, 11 pp. (electronic), 1998.

[10] I. M. Gessel. Symmetric functions and P-recursiveness. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53(2):257–285, 1990.

[11] I. P. Goulden. A linear operator for symmetric functions and tableaux in a strip with given trace. *Discrete Math.*, 99(1-3):69–77, 1992.

[12] A. D. Jaggard and J. J. Marincel. Generating tree isomorphisms for pattern-avoiding involutions. To appear in *Ann. Combinatorics*. Available at http://dimacs.rutgers.edu/~adj/Research/jm_invols.html.

[13] L. Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, 113(2):373–378, 1988.

[14] L. Lipshitz. D-finite power series. *J. Algebra*, 122:353–373, 1989.

[15] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.

[16] P. A. MacMahon. *Combinatory analysis. Vol. I, II (bound in one volume)*. Dover Phoenix Editions. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of *An introduction to combinatory analysis* (1920) and *Combinatory analysis. Vol. I, II* (1915, 1916).

[17] A. Okounkov. Random matrices and random permutations. *Internat. Math. Res. Notices*, 20:1043–1095, 2000.

[18] E. M. Rains. Increasing subsequences and the classical groups. *Electron. J. Combin.*, 5:Research Paper 12, 9 pp. (electronic), 1998.

[19] G. de B. Robinson. On the Representations of the Symmetric Group. *Amer. J. Math.*, 60(3):745–760, 1938.

[20] B. E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.

[21] B. Salvy. Séries différentiellement finies. http://algo.inria.fr/salvy/Talks/Alea03/index.html, Journées ALEA 2003.

[22] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13:179–191, 1961.

[23] M. P. Schützenberger. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scand.*, 12:117–128, 1963.

[24] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[25] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[26] R. P. Stanley. Increasing and decreasing subsequences and their variants. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 545–579. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[27] G. Viennot. Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)*, pages 29–58. Lecture Notes in Math., Vol. 579. Springer, Berlin, 1977.

[28] H. S. Wilf. Ascending subsequences of permutations and the shapes of tableaux. *J. Combin. Theory Ser. A*, 60(1):155–157, 1992.

[29] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction. *Math. Comput. Modelling*, 26(8-10):281–304, 1997.

M. Bousquet-Mélou : CNRS, LaBRI, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

E-mail address: mireille.bousquet@labri.fr