Sur quelques propriétés des nombres de Delannoy et leur généralisation

Christian Lavault

LIPN, CNRS ESA 7030 Université Paris 13
Email: lavault@lipn.univ-paris13.fr

Résumé

Les nombres de Delannoy dans le plan $\mathbb{Z}^2$ se définissent par la récurrence $D(p,q) = D(p-1,q) + D(p,q-1) + D(p-1,q-1)$, où $D(p,0) = D(0,q) = 1$. Il s'agit du nombre de chemins minimaux du plan joignant $(0,0)$ à (q,p), dont les seuls pas autorisés sont les pas « Est » $(1,0)$, « Nord » $(0,1)$ et « Nord-Est » $(1,1)$. Lorsque $n \equiv p = q$, ils représentent les « mouvements du roi » sur un échiquier et $D(n,n) = P_n(3)$, où $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre (cf. Weisstein [8, p.411], Comtet [2], Moser-Zayachkowski [3], Vardi [7], etc.). Une autre forme close s'exprime par

$$D(n,n) = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = {}_2F_1\left[\begin{array}{c} -n, n+1 \\ 1 \end{array} ; -1\right].$$

Soit $\mathcal{D}(p,q)$ l'ensemble des chemins de Delannoy sur $\mathbb{Z}^2$ entre deux points distants de p pas vers l'est et de q pas vers le nord. Il est prouvé dans Autebert *et al.* [1] que $\mathcal{D}(p,q)$, muni d'un ordre naturel, est un poset qui possède une structure de treillis distributif dont la trame est de cardinal $2pq$.

Avec une autre approche que celle de Schwer [6], nous nous intéressons ici à certaines propriétés combinatoires des nombres de Delannoy $D(p_1,\ldots,p_n)$, « généralisés » en dimension quelconque $n \ge 2$: suivant Pemantle [4] et Pemantle-Wilson [5] nous étudions en particulier le comportement asymptotique de leurs séries génératrices diagonales multivariées.

Mots-clés: Combinatoire analytique, asymptotique multivariée, nombres de Motzkin et de Schröder .

Références

[1] **Autebert J-M., Latapy M. et Schwer S.**, Le treillis des chemins de Delannoy, *Rapport de recherche*, RR LIPN 2001-03, mars 2001.

[2] **Comtet L.**, *Analyse combinatoire*, Tome I & II, PUF, Coll. Sup, 1970.

[3] **Moser L., Zayachkowski H.S.**, Lattice Paths with Diagonal Steps, *Scripta Math.*, 26, 222-229, 1963.

[4] **Pemantle R.**, Generating function with high-order poles are nearly polynomial, *Proc. of Mathematics and Computer Science. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, p. 305-321, Birkhäuser, 2000.

[5] **Pemantle R. et Wilson**, *Asymptotics for multivariate sequences*, Part I, II & III, *in preparation*, 2000.

[6] **Schwer S. R.**, S-arrangements avec répétition de tas, *Rapport de recherche*, RR LIPN 2001-01, mars 2001.

[7] **Vardi I.**, *Computational Recreations in Mathematics*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1991.

[8] **Weisstein E. W.**, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 2000.